MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO - 2020

MEEC – IST, TESTE N0.1 TIPO – V01

PROBLEMA No.1

Consider o sistema dinâmico descrito pela equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x(x+1)(x-1) \qquad (1)$$

P1.1 Calcule os pontos de equilíbrio do sistema (1).

P1.2 Trace ***de modo aproximado*** a evolução das trajectórias de x(t), para as seguintes *5* valores iniciais de *x(0): -2, -0.5, 0.5, e +2*. Para isso, calcule explicitamente o sinal de *dx(t)/dt, t≥0.* Com base nesta informação, estabeleça uma conjectura àcerca da estabilidade local de cada um dos pontos de equilíbrio.

P1.3. Confirme a conjectura àcerca das propriedades de estabilidade dos pontos de equilíbrio feita em P1.1 por análise das linearizações do sistema em torno de cada um dos pontos.

P1.4. Diga justificadamente se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: a trajectória correspondente ao estado inicial *x(0)=-0.5* atinge o valor de equilíbrio *0* em tempo finito.

Problema No. 2

A figura 1 representa um sistema de transporte de mercadorias numa fábrica automatizada. O sistema consiste em dois veículos ligados por um cabo modelizado por um conjunto mola+atrito, caracterizado pelos coeficientes k e β. Os dois veículos deslocam-se com atrito no solo, caracterizado pelo mesmo coeficiente γ. Na figura, y_1 e y_2 denotam respectivamente o deslocamento do veículo *1* e veículo *2* em relação às suas posições de início, em repouso. O veículo <u>2</u> é actuado pela força u.

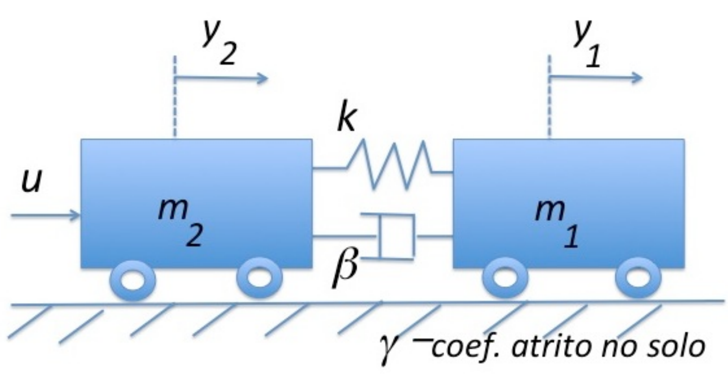

Fig. 1 Sistema com dois veículos ligados por cabo flexivel

P2.1 Deduza, com base nas equação de Newton-Euler, as equações que descrevem a evolução de y_1 e y_2 em função de u.

P2.2 Deduza as mesmas equações recorrendo ao formalismo de Euler-Lagrange.

P.2.3 Com base no resultado obtido em P2.1, escreva na forma matricial as equações do modelo de estado do sistema. Adopte a seguinte escolha de variáveis de estado:

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T: x_1 = y_1, x_2 = dy_1/dt, x_3 = y_2, x_4 = dy_2/dt.$$

Adopte como vector de saída

$$y = [y_1, y_2]^T = [x_1, x_3]^T$$

P2.4 Faça u(t)=1 N; t≥0. Com base no modelo de estado derivado em P2.3, mostre que o limite de $y_1(t)$- $y_2(t)$ quando t tende para infinito é finito mas negativo, isto é, a mola do sistema de ligação entre os dois veículos fica comprimida. Para isso, considere somente as equações de estado que descrevem a evolução das velocidades dos veículos e assuma que elas tendem para valores constantes. Interprete fisicamente por que motivo a "mola fica comprimida".

Problema No. 3

Considere o sistema escalar com entrada u e saída y, com a função de transferência

$$G_1(s) = Y(s)/U(s) = 1/[s^2(s+10)] \qquad (2)$$

P3.1 Escreva, na forma matricial, uma realização em espaço de estados do sistema com dimensão igual a 3.

P3.2 Idem, para o sistema com função de transferência

$$G_2(s) = Y(s)/U(s) = (s^2+1)/[s^2(s+10)] \qquad (3)$$

Para a realização obtida, apresente um diagrama de blocos com três integradores que ilustre como se simula o sistema no ambiente Simulink.

P3.3 É sabido que dada uma função de transferência G(s), existe um número infinito de realizações (em espaço de estados) possíveis. Dê um exemplo de uma realização de $G_1(s)$ diferente da que obteve em P3.1, com dimensão superior a 3.

PROBLEMA No. 4 – Análise em espaço de estados

Considere o "robot" móvel com duas rodas traseiras de tracção e uma roda dianteira de direcção representando na Figura 2.

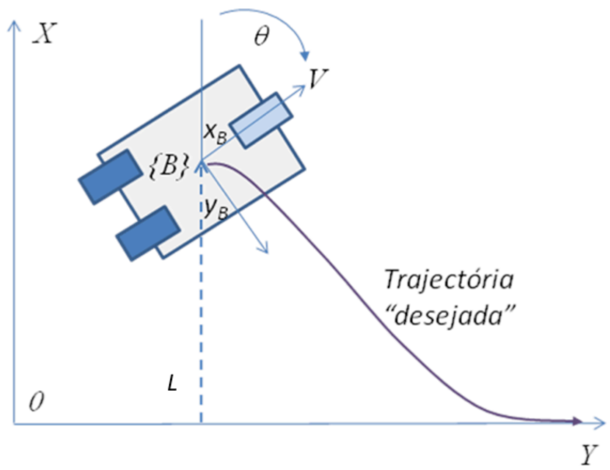

Fig. 2. Robot móvel a seguir a recta Y.

Na figura, *{B}* denota um referencial solidário com o veículo, com eixos x_B, y_B, z_B. O **veículo desloca-se com velocidade linear *V* constante**, por escolha adequada do modo comum da velocidade de rotação das rodas traseiras (não se preocupe com este assunto). Admite-se que **é possível controlar directamente a velocidade angular $d\theta/dt=\omega$ do veículo em torno do eixo z_B**. Pretende-se conduzir a variável *L* (distância do veículo ao eixo *Y*) para *0*, e manter o veículo com movimento ao longo desse eixo *Y*, por acção da variável ω, que desempenha o papel de uma entrada *u*.

P4.1 Modelização e Linearização. No que se segue, consideram-se apenas pequenos desvios em relação ao ponto de equilíbrio correspondente à posição angular $\theta_o = \pi / 2$, velocidade angular $\omega_o = 0$ e distância $L_o = 0$. Seja $V=1m/s$.

Derive a equação diferencial não linear de segunda ordem que descreve o sistema com entrada ω e saída *L* e deduza uma realização correspondente em espaço de estados. Calcule a linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio acima especificado e mostre que ela se pode escrever na forma

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u$$

onde x_1, x_2 *e* u correspondem a pequenos desvios de L, θ, e $u=\omega$ respectivamente em torno de $L_o=0$, $\theta_0=\pi/2$, e $u_0=\omega_0=0$. **Note que**

$$\frac{dL}{dt} = V\cos\theta$$

P4.2 Pretende-se regular o movimento do veículo robótico de modo a conduzir x_1 e x_2 assimptoticamente para 0. Para isso, propõe-se uma lei de controlo por retroacção

$$u = k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t)$$

com $k_1=10$ e $k_2=11$. Mostre que com esta lei de retroacção a posição de equilíbrio $x_1=0$; $x_2=0$ é assimptoticamente estável. Para isso, calcule os valores próprios do sistema de controlo em malha fechada.

P4.3 Para confirmar o resultado obtido em P4.2 trace de modo aproximado um conjunto representativo de trajectórias do sistema no plano de fase (x_1, x_2). *Procedimento a adoptar*: i) calcule os valores e vectores próprios do sistema, ii) faça uma mudança de coordenadas nas quais a dinâmica do sistema fique em forma diagonal, iii) trace trajectórias representativas no novo espaço de fases, iv) "transfira" as trajectórias calculadas para o espaço de fase original.

P4.4 Modifica-se agora o sistema de controlo de modo a estabilizar o sistema em torno de pontos de equilíbrio genéricos $x_1=r$; $x_2=0$. Para isso, reformula-se a lei de retroacção de acordo com

$$u = k_1(-r + x_1(t)) - k_2 x_2(t)$$

onde r denota uma referência arbitrária mas fixa de posição angular desejada. A partir do modelo em espaço de estados, calcule a função de transferência

$$G(s) = \frac{X_1(s)}{R(s)}$$

Verifique que os polos em malha fechada são iguais aos valores próprios determinados em P4.2. Comente acerca da capacidade do sistema em regular a posição angular para um valor desejado arbitrário.

P4.5 Suponha que apenas se pretende regular a posição angular em torno da origem, e que por motivos de ordem técnica (dificuldade em construir actuadores perfeitos) só é possível implementar a lei ideal de controlo de acordo com

$$u = f\left[k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t)\right]$$

onde $f[z]$ representa uma função não linear tal que $f[0]=0$ e $df[z]/dz=1$. Mostre que a origem do sistema de controlo não linear em malha fechada é localmente assimptoticamente estável. Para isso, calcule os valores próprios da linearização do sistema em torno de $x_1=0$; $x_2=0$ e tire conclusões.