4^{a} **LISTA DE EXERCÍCIOS**

Complementos de Álgebra - LMAC e MMA

2^{o} **semestre 2019/2020**

Problema 1. Seja R um anel e considere $\mathrm{Spec}(R)$ com a topologia de Zariski. Lembre-se que um fechado em $\mathrm{Spec}(R)$ é da forma

$$V(J) = \{P \in \ \mathrm{Spec}(R) : J \subseteq P\}, \quad \text{onde } J \text{ é um ideal de } R.$$

Por outro lado, se $X = V(J)$ é um conjunto fechado em $\mathrm{Spec}(R)$, podemos definir $I(X)$, um ideal de R, da seguinte maneira:

$$I(X) = \bigcap_{P \in X} P.$$

Mostre as seguintes propriedades imediatas:

i) $J_1 \subseteq J_2 \ \Rightarrow \ V(J_2) \subseteq V(J_1)$, para ideais J_1 e J_2 de R.

ii) $X_1 \subseteq X_2 \ \Rightarrow \ I(X_2) \subseteq I(X_1)$, para conjuntos fechados $X_1 = V(J_1)$ e $X_2 = V(J_2)$ em $\mathrm{Spec}(R)$.

iii) Para um ideal J de R, $J \subseteq I(V(J)) = \sqrt{J}$.

iv) Para um conjunto fechado $X = V(J)$ em $\mathrm{Spec}(R)$, $V(I(X)) = X$.

v) Há uma correspondência biunívoca entre o conjunto de ideais radicais de R e o conjunto de fechados em $\mathrm{Spec}(R)$.
(Dizemos que um ideal de R, J, é um **ideal radical** se $\sqrt{J} = J$.)

Definição: Seja R um anel e seja $V(J) \neq \emptyset$ um conjunto fechado em $\mathrm{Spec}(R)$. Dizemos que $V(J)$ é **irredutível** em $\mathrm{Spec}(R)$ se $V(J)$ não é a união de dois fechados em $\mathrm{Spec}(R)$, propriamente contidos em $V(J)$:

$$V(J) = V(J_1) \cup V(J_2) \ \Rightarrow \ V(J) = V(J_1) \ \text{ ou } \ V(J) = V(J_2).$$

Problema 2. Seja R um anel e seja $V(J) \neq \emptyset$ um conjunto fechado em $\mathrm{Spec}(R)$. Mostre que

$$V(J) \text{ é irredutível } \Leftrightarrow I(V(J)) = \sqrt{J} \text{ é um ideal primo de } R.$$

Problema 3. Seja R um anel Noetheriano e seja $V(J) \neq \emptyset$ um conjunto fechado em $\mathrm{Spec}(R)$. Mostre que $V(J)$ tem uma decomposição

$$V(J) = V(J_1) \cup \cdots \cup V(J_k) \ ,$$

onde cada $V(J_i)$ é irredutível em $\mathrm{Spec}(R)$.
Omitindo alguns termos, se necessário, podemos rearranjar a expressão acima, satisfazendo $V(J_i) \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} V(J_j)$ (em particular, $V(J_i) \nsubseteq V(J_l)$ para $i \neq l$).

Problema 4. Seja R um anel Noetheriano. Mostre os seguintes factos:

a) Se J é um ideal de R, $J \neq R$, então o conjunto dos ideais primos de R que contêm J tem um número finito de elementos minimais $P_1, \ldots, P_k$ (onde $P_i = \sqrt{J_i}$ e $V(J_i)$ é uma componente irredutível de $V(J)$ na decomposição final de $V(J)$ do Problema 3).

Isto mostra que a decomposição final de $V(J)$ do Problema 3 é única (a menos de reordenação das componentes).

b) Em particular, se R não é um domínio e se R não tem elementos nilpotentes não nulos, então o número de primos minimais em R é pelo menos 2.

Observe que a alínea a) é simplesmente a Proposição 2.12 - a). Aqui queremos demonstrar o mesmo resultado usando os Problems 1, 2 e 3.