FOLHAS DE APOIO PARA FÍSICA I

1. Aquisição e Análise de Dados numa Experiência.

Medir uma grandeza implica, através da interposição entre o observador e fenómeno fisico em causa de uma metodologia e de instrumentos de medida, atribuir um número a essa grandeza referido a um padrão (UNIDADE). Este valor vem afectadode um ERRO devido quer às imprecisões dos instrumentos de medida quer às limitações dos métodos utilizados.

Assim, o resultado de uma medição deve ser sempre apresentado na seguinte forma:

MEDIDA = [VALOR NUMÉRICO] ± [ERRO]   (UNIDADE)

Por exemplo, suponhamos que o resultado de uma experiência para medir a velocidade do som foi:

$$v_s = 340.1 \pm 0.5 \text{ m/s}$$

Isto significa que o valor da grandeza medida se encontra entre 340.1 - 0.5 m/s e 340.1+ 0.5 m/s , ou seja:

$$339.6 < v_s < 340.6 \text{ m/s}$$

→ O valor numérico resultante de uma medição não tem significado se não fôr calculada a respectiva incerteza !

1.1. Erro de Leitura.

Nas experiências em que se realiza uma única medição, o erro que se comete na leitura de uma medida, devido ao limitado *poder resolvente* (menor intervalo do estímulo ΔX que provoca variação na resposta do instrumento) da escala, designa-se ERRO DE LEITURA.

Conforme o tipo de escala do instrumento utilizado temos um erro de leitura que se determina da seguinte forma:

→ O erro de leitura de uma ESCALA CONTÍNUA, tal como a de uma RÉGUA ou da grelha do monitor de um OSCILOSCÓPIO, é igual a *metade da menor divisão* dessa escala.

Por exemplo, o erro de medição num osciloscópio com a escala da base de tempo em 5 ms / DIV é de 0.5 ms, dado que a menor divisão da escala corresponde a 1/5 da unidade da base, sendo 1/2 desse valor 1/10 de 5 ms, ou seja, 0.5 ms.

→ O erro de leitura de uma ESCALA DISCRETA como a de um multímetro digital ou de um cronómetro, o erro de leitura é dado pelo menor valor que é possível ler nessa escala.

Para exemplificar, suponhamos que no mostrador de um multímetro temos que o valor medido para uma dada resistência foi:

$$27.31\ \Omega$$

então o erro de leitura será 0.01 Ω e a medida deverá apresentar-se na forma:

$$R = 27.31 \pm 0.01\ \Omega$$

1.2. Erro Absoluto e Erro Relativo.

No exemplo anterior expressámos o erro nas unidades da própria grandeza medida. Neste caso falamos de ERRO ABSOLUTO.

O erro absoluto não é adequado para comparar o rigôr na medida de grandezas distintas. Para este efeito utiliza-se uma representação adimensional do erro dado pelo quociente entre o erro absoluto E_R de um grandeza R e o valor numérico da medição:

$$\boxed{\delta R = \frac{E_R}{R}}$$

Retomando o exemplo anterior, teríamos um erro relativo de

$$\delta R = 0.01/27.31 = 0.0004$$

ou 0.04 % e a medição da resistência passa a representar-se:

$$R = 27.31\ \Omega \pm 0.04\ \%$$

1.3. Erros experimentais

Existem dois tipos de erros de natureza distinta,

i) Erros sistemáticos
ii) Erros aleatórios.

Os *erros sistemáticos* tem causas possíveis de identificar e, conhecendo com detalhe a física do fenómeno em estudo, podem-se eliminar estes erros. Denominam-se erros sistemáticos uma vez que a sua presença se revela por sistemático acréscimo ou defeito dos valores obtidos face àqueles que seriam de esperar. Um exemplo de erro sistemático é o que ocorre quando o observador se posiciona sempre de maneira incorrecta perante a leitura de uma escala contínua de um instrumento com mostrador analógico. É fácil imaginar que os valores lidos resultem sempre inferiores ou superiores ao que de facto o aparelho indica. Experimentem pesar-se numa comum balança de casa de banho e inclinem sucessivamente a cabeça para a direita e para a esquerda. Verão que em escassas fracções de segundo parecem ter ora emagrecido ora engordado umas "gramitas"! Este exemplo particular pertence à categoria dos erros sistemáticos *de observação.*

Os *erros aleatórios* resultam do efeito de um grande número de pequenas perturbações que se manifestam de forma diferente de experiência para experiência. O resultado conjunto destas perturbações é fazer com que os valores das medições sejam por vezes mais elevados e por outras mais baixos do que seria de esperar. As causas individuais revelam-se difíceis de identificar tornando-se impossíveis de eliminar por muito bem que se conheça a física do problema e a montagem realizada para a experiência.

1.4. Análise Estatística de Erros Acidentais.

Quando obtemos valores diferentes ao repetir a medição de uma mesma grandeza estamos a lidar com *erros acidentais* ou *aleatórios*. Este tipo de erros ocorre, por exemplo, devido às simplificações que frequentemente se introduzem no modelo físico escolhido para o estudo de um dado fenómeno, desprezando-se variáveis sobre as quais não se tem controlo durante a realização da experiência. Podem também dever-se às limitações do equipamento ou mesmo à intervenção subjectiva do observador no processo de medição. Sabemos que se realizarmos uma *média* sobre os valores obtidos na medida de uma certa grandeza, estamos a diminuir a incerteza das nossas medições. Tendo o resultado de cada medida um carácter aleatório, será de esperar (da teoria das probabilidades) que se o número de medições tender para o infinito a média sobre essas medições tende para um valor constante que é o mais próximo do valor correcto se apenas existirem erros acidentais.

MÉDIA SIMPLES:

Suponhamos que temos um conjunto de N medições de uma mesma grandeza. Se as várias medidas tiverem a mesma precisão podemos fazer uma média simples

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

A *variância* σ^2 e o *desvio padrão* σ dão uma medida da dispersão das medidas individuais em torno da média, o que dá uma ideia da precisão da experiência:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{N - 1}$$

A média da amostra $\overline{X}$ é uma variável aleatória, tal como X. Assim sendo, também lhe podemos atribuir um desvio padrão. Este é dado por:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$

MÉDIAS PONDERADAS:

Se tivermos diversas medidas x_1, x_2, ... variável x com diferente precisão cada uma, o valor médio de x deve ser calculado de forma que os valores contribuam para a média conforme o seu peso. Quanto mais rigoroso for um valor maior deverá ser o seu peso, definindo-se a média ponderada:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{X_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

à qual se associa o desvio padrão

$$\sigma = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}\right)^{-1/2}$$

Se o número N de medições for pequeno ($N \leq 10$) não faz sentido calcular o desvio padrão e deve-se usar,como medida da incerteza para a média, o *maior desvio em relação à média*, Δx , ou então o *valor médio dos desvios* em relação à média:

$$\Delta X = \text{máx} \{ | X_i - \overline{X} | \}$$

ou

$$\Delta X = \frac{1}{N} | X_i - \overline{X} |$$

O resultado final será dado por

$$\overline{X} \pm \Delta X$$

1.5. Propagação de Erros.

Na maior parte das experiências, para medir uma certa grandeza é necessário medir várias quanidades independentes. Por exemplo, na experiência de determinação da velocidade da luz é necessário medir o percurso L_{AR} do feixe luminoso entre duas posições em que o campo electromagnético se encontra desfasado de π, e o período T desse sinal. Supondo que:

$$L_{AR} = 300 \pm 5 \text{ cm} = 3.00 \pm 0.05 \text{ m} \quad \text{e} \quad T = (20 \pm 0.5)\ 10^{-9} \text{ s}$$

a velocidade vem dada por:

$$c_{AR} = L_{AR} / (T/2) = 3.00\ 10^{8} \text{ m/s}$$

As incertezas parciais que afectam cada uma das quantidades medidas vão contribuir para a incerteza final com que se determina a grandeza. A essa incerteza chama-se propagação dos erros parciais.

<u>Método simplificado para o cálculo da propagação do erro:</u>

Voltemos ao exemplo anterior. Para calcular o erro de propagação a c_{AR} procede-se da seguinte forma:

Maximiza-se e minimiza-se a grandeza c_{AR} face às suas variáveis L_{AR} e T.

$$c_{AR\,max} = (L_{AR} + E_{LAR}) / (T/2 - E_{T/2}) = 3.13\ 10^{8} \text{ m/s}$$

e

$$c_{AR\,min} = (L - E_L) / (T/2 + E_{T/2}) = 2.88\ 10^{8} \text{ m/s}$$

O erro final da velocidade da luz no ar será dado pela semidiferença dos extremos:

$$Ec_{AR} = (c_{AR\,max} - c_{AR\,min}) / 2$$

ou, alternativamente, pelo maior desvio em relação ao valor numérico de c_{AR} calculado anteriomente:

$$Ec_{AR} = \text{máx}\ \{\ |\ c_{AR\,min} - c_{AR}\ |\ ;\ |\ c_{AR\,max} - c_{AR}\ |\ \}$$

Não existem receitas para o cálculo dos erros. Para cada situação há que estabelecer um compromisso entre o bom senso, as potencialidades do equipamento, o tempo disponível e o objectivo da medição!

1.6. Algarismos significativos.

O resultado da medição de uma grandeza, quer seja determinado directamente ou através de cálculos sobre quantidades medidas, deve expressar a imprecisão inerente à medição, ou seja, conter apenas algarismos significativos.

Definição: ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS (a.s.) são aqueles cujos valores são conhecidos com certeza mais o primeiro coberto pelo erro.

Regras para contar o número de algarismos significativos :

A contagem é feita da esquerda para a direita, começando no primeiro algarismo não nulo e terminando no primeiro algarismo afectado pelo erro.

Se o primeiro algarismo à esquerda for ≥ 5 vale por dois a.s.

O zero à direita do ponto decimal conta como algarismo significativo ao contrário do que acontece com os zeros à esquerda.

Número de algarismos significativos do resultado de operações algébricas:

SOMA e SUBTRAÇÃO: O número de casas decimais do resultado é o menor de entre todas as parcelas.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 1.02\underline{5} \\ 6\underline{2} \\ +\ 0.000\underline{6} \\ \hline 6\underline{3.0256} \end{array}$$

O resultado final tem apenas três a.s., tal como a parcela $6\underline{2}$.

MULTIPLICAÇÃO e DIVISÃO: o resultado final tem um número de a.s. igual ao de menor número de entre os números a operar

OUTRAS OPERAÇÕES: Para operações do tipo raíz quadrada, exponenciais, logarítmos, funções trigonométricas, etc., o número de a.s. é igual ao dos valores de partida.

Regras de arredondamento:

O arredondamento é feito de forma a escolher o número que menos se distancia do inicial. Se os dois números mais próximos estiverem a igual distância do número inicial deve escolher-se o de maior valor absoluto.

2. Tratamento de Dados.

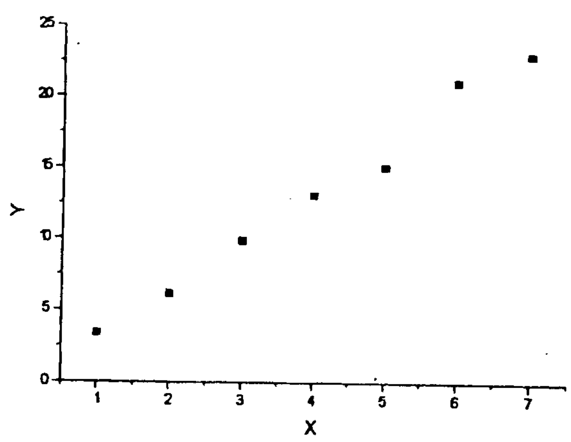
Quando estamos na presença de um certo fenómeno pode haver uma dependência entre grandezas medidas e estarmos interessados em descobrir a expressão matemática que traduz essa relação.

Consideremos para simplificar que temos apenas duas grandezas. Se estas forem dependentes a realção mais simples que pode existir entre elas é uma RELAÇÃO LINEAR. Se chamarmos a essas grandezas X e Y isso significa que a expressão que as relaciona é do tipo:

$$Y = A + BX$$

em que A e B são constantes.

Para encontrar esta expressão tira-se um conjunto tão elevado quanto possível de pares de medidas (x_i, y_i) e marcam-se num gráfico XY esses pontos.



Ao processo de encontrar a linha que melhor representa a relação entre X e Y chama-se ajuste ou *fit* , e no caso de estarmos perante uma relação linear, falamos de REGRESSÃO LINEAR. O método mais conhecido para determinar os parâmetros A e B (ordenada na origem e declive da recta, resp.) que melhor se adaptam aos resultados experimentais é o MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.

Segundo este método, o valor esperado ou o valor mais credível para a grandeza Y, dados os pontos (x_i , y_i), é aquele que minimiza a soma dos quadrados das diferenças entre Y e y_i :

$$D = \sum_{i=1}^{N} \left(Y - Y_i \right)^2$$

ou, substituindo a relação entre Y e X:

$$D = \sum_{i=1}^{N} \left(A + BX_i - Y_i \right)^2$$

Portanto, A e B determinam-se igualando as derivadas de D em ordem a A e a B a zero e resolvendo o sistema daí resultante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial A} = 0 \\ \dfrac{\partial D}{\partial B} = 0 \end{cases}$$

onde $\dfrac{\partial D}{\partial A}$ significa derivada da expressão D considerando que todos os parâmetros que nela intervêm se mantêm constantes excepto A.

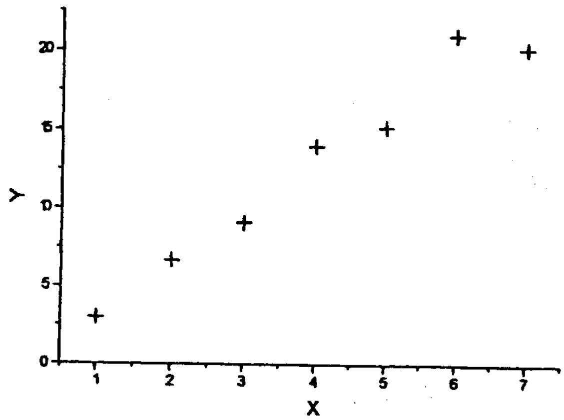
De que resulta:

$$A = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum X_i Y_i}{N \sum X_i^2 - \left(\sum X_i \right)^2}$$

$$B = \frac{N \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{N \sum X_i^2 - \left(\sum X_i \right)^2}$$

Traçado de gráficos a partir de valores experimentais

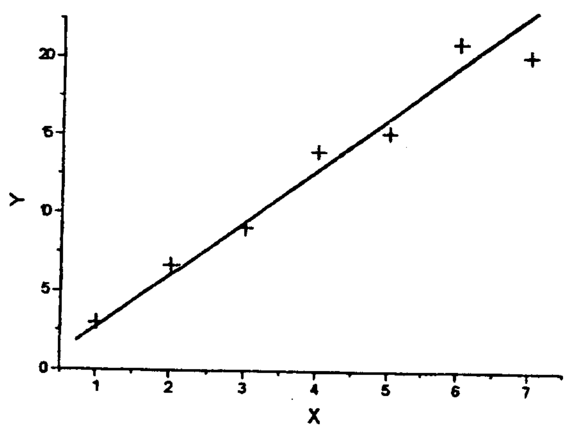
Quando temos uma tabela de valores experimentais (x_i , y_i) pode-se mediante a escolha de uma escala conveniente que tome em consideração os limites entre os quais ambas as grandezas variam, representar esse pares de valores sob a forma de um gráfico.



Quando essas medidas apresentam erros, estes também devem ser apresentados no gráfico sob a forma de barras de erro pois irão contribuir para a estimativa do erro do ajuste escolhido para esses valores experimentais. No caso de escolhermos uma regressão linear, essas barras de erro contribuem para os erros no declive B e na ordenada na origem A.

Vejamos como se pode fazer "manualmente" a escolha da recta de melhor ajuste e o cálculo dos erros:

Escolhe-se a recta que melhor parece minimizar as distâncias entre os pontos (x_i, y_i) e as suas projecções sobre a recta:



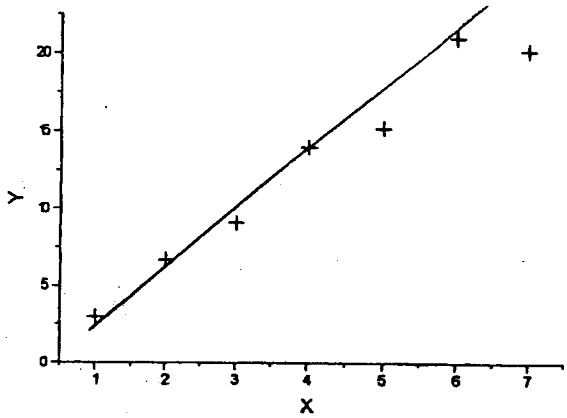
$$\boxed{B = \frac{Y_b - Y_a}{X_b - X_a}}$$

Determina-se o declive B e a ordenada na origem A como acima indicado. A recta de melhor ajuste será:

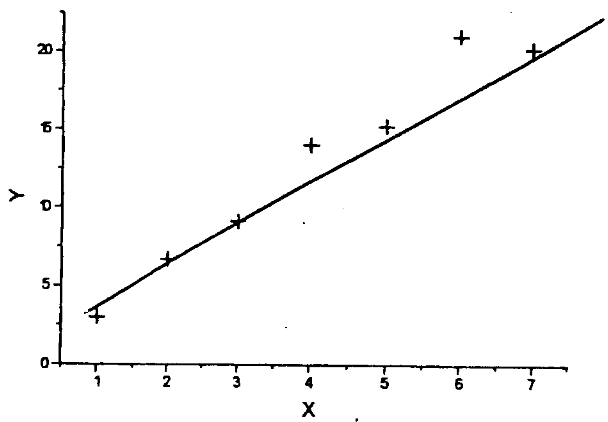
$$Y = A + BX$$

Para calcular os erros de A e de B traçam-se as rectas de:

<u>Maior declive</u> - unindo as extremidades das barras de erro que mais se afastam da recta de regressão, para baixo dessa recta na metade inicial e para cima na metade final.



<u>Menor declive</u> - unindo a extremidade da barra de erro que mais se afasta para cima da recta de regressão na metade inicial com a extremidade da barra de erro que mais se afasta para baixo na metade final.



A partir do declive e da ordenada na origem das rectas de inclinação máxima e mínima pode-se calcular aproximadamente o erro nos parâmetros A e B:

$$\boxed{E_A = \frac{A_{max} - A_{min}}{2}}$$

e

$$E_B = \frac{B_{max} - B_{min}}{2}$$

ou ainda

$$\boxed{E_A = Max\left\{ \left|A_{max} - \overline{A}\right|, \left|A_{min} - \overline{A}\right| \right\}}$$

e análogamente para B

$$E_B = Max\left\{ \left|B_{max} - \overline{B}\right|, \left|B_{min} - \overline{B}\right| \right\}.$$

3. Dimensão de uma grandeza física.

Grandezas e Unidades de Base do S.I.:

Nome da Grandeza de Base	Unidade de Base	Dimensão de Base
Comprimento (l)	metro (m)	L
Massa (m)	quilograma (Kg)	M
Tempo (t)	segundo (s)	T
Intensidade de corrente eléctrica (I)	ampere (A)	I
Temperatura (T)	kelvin (K)	Θ

É possível expressar qualquer grandeza Y em função das grandezas de base S.I. (M, T, L, I ....) designando-se esta representação por equação dimensional

$$DIM\ Y = [\ Y\ ] = A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots$$

onde A, B e C representam as grandezas de base e α, β e γ são os expoentes dimensionais que indicam o número de vezes que a grandeza de base intervém. A dimensão de uma grandeza física representa-se entre parênteses rectos.

Numa equação que relaciona várias grandezas fisicas deve verificar-se a HOMOGENEIDADE DIMENSIONAL, isto é, o termo da esquerda deve ser dimensionalmente igual ao termo da direita. Esta homogeneidade pode ajudar na atribuição de dimensão a constantes e na identificação de relações matemáticas entre várias grandezas.

Exemplo :

Uma partícula carregada de massa m e carga q é sujeita a um campo eléctrico E adquirindo uma aceleração a.
A força eléctrica F = qE deverá igualar-se à força mecânica F = ma. Provemos que as duas equações são dimensionalmente idênticas:

$$[\,F\,] = [ma] = MLT^{-2}$$

$$[\,F\,] = [q]\,[E] \qquad \text{(a)}$$

Carga pode-se expressar em termos das grandezas de base Corrente e Tempo já que $I = dq/dt$ donde vem:

$$[q] = I\,T$$

Campo eléctrico E pode expressar-se em termos do potencial eléctrico já que $E = -\,dV/dx$ pelo que:

$$[E] = [V]\,L^{-1}$$

Por sua vez o potencial é igual a tabalho W sobre carga q. Temos, assim, finalmente:

$$[F] = I\,T\,L^{-1}\,[W/q] = I\,T\,L^{-1}\,ML^{2}T^{-2}\,I^{-1}\,T^{-1} = M\,L\,T^{-2} \qquad \text{(b)}$$

o que está de acordo com (a), como queríamos provar.