TÉCNICO LISBOA

# Cálculo Diferencial e Integral I - 2º Sem. 2019/20

## FICHA 13

Critérios de convergência. Convergência absoluta e simples.

---

### AULA PRÁTICA

1. Determine a natureza das seguintes séries de termos não-negativos (pode usar que a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e só se $\alpha > 1$):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n-1}$

2. Determine a natureza das seguintes séries de termos não-negativos:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{3^{2n}}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{4n^2+\ln n}\right)^n$.

3. Determine a natureza das seguintes séries de termos não-negativos:

$$\text{i) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \qquad \text{ii) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n},$$

(Sugestão: Utilize o critério do integral para i)e o critério de comparação para ii).)

4. Determine a natureza das seguintes séries, usando critérios de convergência apropriados:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+\sqrt{n}}\right)^n$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{e^n}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n+1}\sqrt[4]{n+2}}$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n^2}$.

5. Sendo $(a_n)$ o termo geral de uma sucessão de termos positivos, indique, justificando, a natureza das séries

$$\sum (1+a_n), \qquad \sum \frac{1}{n^2+a_n}.$$

6. Mostre que se $\sum |a_n|$ converge então, para cada $p \in \mathbb{N}$, $\sum a_n^p$ também converge. Para cada $p \in \mathbb{N}$, dê um exemplo em que $\sum a_n^p$ converge mas $\sum |a_n|$ diverge.

7. Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries alternadas:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-4)^{-n+1}$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2-1}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}$, f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$,

---

## EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Determine a natureza das seguintes séries de termos não-negativos (pode usar que a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e só se $\alpha > 1$):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{3n+1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(n+1)}}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+1}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n+1}$

2. Determine a natureza das seguintes séries de termos não-negativos:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{2n}+1}{3^n+n}\right)^n$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n}{b^n}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$,

3. a) Determine a natureza das seguintes séries de termos não-negativos:

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}, \quad \text{ii)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}.$$

b) Justifique que as séries

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln n}$$

divergem para $\alpha \leq 1$ e convergem para $\alpha > 1$.

4. a) Justifique que se $f$ é uma função real tal que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}^+,$$

então, para qualquer sucessão $a_n \geq 0$ com $a_n \to 0$, as séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ têm a mesma natureza.

b) Determine a natureza das séries seguintes, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

5. Determine a natureza das seguintes séries, usando critérios de convergência apropriados:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+4}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2^n}$, c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1000}}{(1.001)^n}$,

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!}$,

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^3$,

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n}$,

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n!}{n!}$,

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$,

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^3}$,

m) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$,

n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}$,

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$,

6. Seja $(a_n)$ uma sucessão de termos positivos e $(b_n)$ uma sucessão limitada.

   a) Mostre que a convergência da série $\sum a_n$ implica a convergência da série $\sum a_n b_n$.

   b) Use o resultado anterior para provar que se a série $\sum a_n$ converge então também converge $\sum a_n^2$.

   c) Mostre, por meio de um contraexemplo, que a recíproca da proposição anterior é falsa.

7. Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries alternadas:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.