

## FICHA 14 - SOLUÇÕES

## AULA PRÁTICA

1. a)  $R = 3$ ; a série converge absolutamente para  $0 \leq x \leq 6$ , converge simplesmente para  $x = 0$  e diverge para  $x < 0 \vee x \geq 6$ ;
- b)  $R = 4$ ; a série converge absolutamente para  $-3 \leq x \leq 5$  e diverge para  $x < -3 \vee x > 5$ .
- c)  $R = 1$ ; a série converge absolutamente para  $0 < x < 2$ , converge simplesmente para  $x = 2$  e diverge para  $x \leq 0 \vee x > 2$ .
- d)  $R = 1$ ; a série converge absolutamente para  $-4 \leq x \leq -2$ , e diverge para  $x < -4 \vee x > -2$ .
- e)  $R = 2$ ; a série converge absolutamente para  $0 < x < 4$ , e diverge para  $x \leq 0 \vee x \geq 4$ .
- f)  $R = +\infty$ ; a série converge absolutamente para  $x \in \mathbb{R}$ .

2. a) O raio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(2n+1)!}$  é  $R = +\infty$ , logo esta série converge absolutamente para  $y \in \mathbb{R}$ . Fazendo  $y = x^2$ , conclui-se que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$  converge absolutamente para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ .

b) O raio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^n$  é  $R = 1$ , e esta série converge absolutamente para  $-1 < y < 1$ , converge simplesmente para  $y = 1$  e diverge para  $y \leq -1 \vee y > 1$ . Fazendo  $y = x^2$ , conclui-se que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$  converge absolutamente para  $-1 < x < 1$ , converge simplesmente para  $x = -1 \vee x = 1$  e diverge para  $x < -1 \vee x > 1$ .

c) O raio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n^2+1}$  é  $R = 1$ ; esta série converge absolutamente para  $|y| \leq 1$  e diverge para  $|y| > 1$ . Fazendo  $y = (5x+1)^2$ , e resolvendo em ordem a  $x$ , temos que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+1)^{2n}}{n^2+1}$  converge absolutamente para  $-\frac{2}{5} \leq x \leq 0$  e diverge para  $x < -\frac{2}{5} \vee x > 0$ .

3. a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}} = \frac{2(x-1)}{3-x}$ , para  $-1 < x < 3$ ,

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{n+1}} = \frac{x^2}{3(3-x^2)}$ , para  $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ .

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! 3^n} x^n = e^{\frac{x}{3}}$ , para  $x \in \mathbb{R}$  (dado que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n = e^y$ , para  $y \in \mathbb{R}$ ).

4. a)  $R = 3$ . Convergência absoluta para  $x \in ]-2, 4[$  (é necessário estudar a série nos pontos  $-2$  e  $4$ .)

b) Directamente dos coeficientes da série de Taylor obtem-se:  $g(1) = 0$  e  $g''(1) = \frac{\sqrt{2}}{9}$ . A série de Taylor de  $x + g'(x)$  no ponto 1 é

$$1 + (x-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x-1)^n}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{4}{3} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{9}\right)(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(x-1)^n}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}.$$

5. a)  $\frac{x^4}{1-2x} = \sum_{n=4}^{\infty} 2^{n-4} x^n$ , para  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ .

- b) Temos  $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$  e para  $n \geq 4$ ,  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 2^{n-4} \Leftrightarrow f^{(n)}(0) = n!2^{n-4}$ . Como  $f^{(4)}(0) = 4! > 0$ ,  $f$  tem um mínimo em 0.

### SUPEMENTARES

1. a)  $R = 1$ ; a série converge absolutamente para  $-1 < x < 1$ , converge simplesmente para  $x = -1$  e diverge para  $x < -1 \vee x \geq 1$ .
  - b)  $R = 3$ ; a série converge absolutamente para  $-2 < x < 4$ , diverge se  $x \leq -2 \vee x \geq 4$ .
  - c)  $R = 1$ ; a série converge absolutamente para  $-2 < x < 0$ , converge simplesmente para  $x = -2$  e diverge para  $x < -2 \vee x \geq 0$ .
  - d)  $R = 1$ ; a série converge absolutamente para  $0 \leq x \leq 2$ , e diverge para  $x < 0 \vee x > 2$ .
  - e)  $R = |a|$ ; a série converge absolutamente para  $-a - |a| < x < a - |a|$  (ou seja, para  $a > 0$ ,  $-2a < x < 0$ , para  $a < 0$ ,  $0 < x < -2a$ ) e diverge para  $x \leq -a - |a| \vee x \geq a - |a|$  (se  $|x + a| = |a|$ , as séries obtidas têm um termo geral que não converge para 0).
  - f)  $R = +\infty$ ; a série converge absolutamente para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
2. a) Fazer  $y = (1 - 3x)^2$ . A série é absolutamente convergente se  $-4 < y < 4 \Leftrightarrow x \in ]-\frac{1}{3}, 1[$ , simplesmente convergente se  $x = 1$  e divergente se  $x \in ]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup ]1, +\infty[$ .
  - b) Fazer  $y = (2x)^3$ . A série é absolutamente convergente se  $-1 < y < 1 \Leftrightarrow x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ , simplesmente convergente se  $x = -\frac{1}{2}$  e divergente se  $x \in ]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$ .
  - c) É uma série geométrica de razão  $\frac{x}{x+1}$ , logo converge absolutamente se  $\left| \frac{x}{x+1} \right| < 1$  e diverge se  $\left| \frac{x}{x+1} \right| \geq 1$ . Resolvendo em ordem a  $x$ , temos  $\left| \frac{x}{x+1} \right| < 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ , ou seja  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^n$  converge absolutamente para  $x > -\frac{1}{2}$  e diverge para  $x \leq -\frac{1}{2}$ .
  - d) o raio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n} y^n$  é  $R = 1$  e esta série converge absolutamente para  $|y| < 1$ , converge simplesmente para  $y = -1$  e diverge para  $y < -1 \vee y \geq 1$ . Fazendo  $y = \frac{x-2}{x}$ , conclui-se que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n} \left( \frac{x-2}{x} \right)^n$  converge absolutamente para  $x > 1$ , converge simplesmente para  $x = 1$  e diverge para  $x > 1$ .
3. a) No ponto  $-3$  a série dos módulos é dada por

$$\sum |a_n(-3)^n| = \sum |a_n|3^n = \sum |a_n|3^n$$

Como no ponto 3 a série é divergente, a série  $\sum a_n 3^n$  é divergente, e  $\sum |a_n 3^n|$  é também divergente. Logo a convergência em  $-3$  é simples.

- b) O raio de convergência da série é 3, uma vez que a convergência em  $-3$  é simples (se  $|x| < R$ , a série converge absolutamente em  $x$ , se  $|x| > R$ , a série diverge em  $x$ , logo se a série converge simplesmente em  $x$ , tem-se  $|x| = R$ ). Logo a série converge absolutamente para  $|x| < 3$  e diverge para  $|x| > 3$ .
  - c) Por exemplo,  $\sum \frac{1}{n3^n} x^n$ .
4. a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2} = \frac{x^2}{x+1}$ , para  $|x| < 1$  (dado que  $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$ , para  $|y| < 1$ ).

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{4^{n+1}} = \frac{x}{4(2-x)}$ , para  $|x| < 2$ .

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^n = \frac{1}{2}(e^{-x} - 1)$ , para  $x \in \mathbb{R}$  (dado que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n = e^y$ , para  $y \in \mathbb{R}$ ).

5. a)  $(x-2)^2 e^x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^2}{(n-2)!} (x-2)^n$ , para  $x \in \mathbb{R}$ . Temos  $f^{(n)}(2) = n(n-1)e^2$ ,  $n \geq 2$ ,  
 $f'(2) = 0$ .

b) Da série de Taylor de  $\frac{1}{x} = (\ln|x|)'$  no ponto  $-1$  obtém-se, para  $-2 < x < 0$ ,

$$\ln|x| = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x+1)^n, \quad f^{(n)}(-1) = (n-1)!.$$

c)  $\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)' = e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$ , para  $x \in \mathbb{R}$ , e  $\int_0^x e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$ .

Temos  $f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)! \frac{1}{n!(2n+1)} = \frac{(2n)!}{n!}$  e  $f^{(2n)}(0) = 0$ .

d)  $\frac{1}{(x+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n x^n$ , para  $|x| < 1$  (obtenha primeiro a série da primitiva).

Temos  $f^{(n)}(0) = n!(n+1)(-1)^n = (n+1)!(-1)^n$ .

6. a)  $e^{3x-2} = e^{-2} \cdot e^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{e^2 n!} x^n$ , para  $x \in \mathbb{R}$ . Temos  $f^{(n)}(0) = \frac{3^n}{e^2}$ .

b)  $\frac{2x}{4x+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{2n-1} x^n$ , para  $x \in ]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ . Temos  $f^{(n)}(0) = n!(-1)^{n-1} 2^{2n-1}$ .

c)  $\sin(x-1)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x-1)^{4n+2}$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

Temos  $f^{(4n+2)}(1) = (4n+2)! \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ ,  $f^{(k)}(1) = 0$ , se  $k \neq 4n+2$ .

d) Como f), notando que  $\cos y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n}$ .

e)  $\frac{1}{2+x} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{x-2}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (x-2)^n$ , para  $-2 < x < 6$ .

Temos  $f^{(n)}(2) = \frac{n!(-1)^n}{4^{n+1}}$ .

f)  $x \operatorname{arctg}(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+2}$ , para  $-1/2 < x < 1/2$

Temos  $f^{(2n+2)}(0) = (2n+2)! \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1}$ , e  $f^{(k)}(0) = 0$  para  $k \neq 2n+2$ .

7.  $\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n$ , para  $|y| < 1$ , logo  $\phi(x) = x \ln(1+x^3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{3n+1}$ ,

para  $-1 < x < 1$ . Deste desenvolvimento obtém-se  $\phi'(0) = \phi''(0) = \phi'''(0) = 0$ ,  $\phi^{(4)}(0) = 4! > 0$ , e, portanto a função tem mínimo em 0.

8. Do Teorema Fundamental do Cálculo,  $\phi'(x) = 2x \ln(1 + x^4)$ . Use o exercício anterior para obter o desenvolvimento de  $\phi'(x)$  para  $|x| < 1$ , e obtenha, por primitivação (tendo o cuidado de ajustar a respectiva constante de primitivação),

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} x^{4n+2}$$

Como  $\phi^{(k)}(0) = 0$ ,  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $\phi^{(6)}(0) = 6! \frac{1}{3} > 0$ ,  $\phi$  tem um mínimo em 0.