

FICHA 12

Integração, cálculo de Áreas. Séries geométricas e de Mengoli.

**AULA PRÁTICA**

1. Calcule o valor dos integrais seguintes:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int_{-1}^0 x \operatorname{arctg}(x^2) dx, & \text{d) } \int_{\sqrt{2}}^2 x \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) dx, & \text{g) } \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \operatorname{sen}^4 x} dx, \\
 \text{b) } \int_{-1}^1 \frac{x}{(x-2)^2} dx, & \text{e) } \int_1^8 \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} dx, & \text{h) } \int_1^5 \frac{1}{x\sqrt{4+x}} dx. \\
 \text{c) } \int_0^1 \frac{2}{e^{2x} + 1} dx, & \text{f) } \int_0^1 \ln(1 + \sqrt{x}) dx, & 
 \end{array}$$

2. Sendo  $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{t^2+1}{t}} dt$ ,  $x > 0$ , mostre que

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x).$$

3. Calcule a área limitada pelas linhas de equações:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } y = 4 - x^2 \text{ e } y = |x| - 2, & \text{d) } y = e^x, y = e^{-x} \text{ e } x = 2, \\
 \text{b) } y = \sqrt[3]{x} \text{ e } y = \sqrt{x}, & \text{e) } y = \operatorname{arctg} x, x = 1 \text{ e } y = 0, \\
 \text{c) } y = xe^{x-1}, y = 1 \text{ e } x = 0, & \text{f) } y^2 = 4(1-x) \text{ e } y^2 = 2(2-x),
 \end{array}$$

4. Calcule a área limitada pela elipse de equação  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

5. Calcule a área de região plana constituída pelos pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , que satisfazem as condições seguintes:

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}, \quad y \geq \frac{\pi}{16}x^2, \quad y \leq \operatorname{arctg} x.$$

6. Calcule a área de cada uma das seguintes regiões do plano:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2, y \leq x\}, \\
 \text{b) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x, y \geq x^3, y \leq 4x\}, \\
 \text{c) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 \leq y \leq 2(x+1)\}, \\
 \text{d) } \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} \right\} \\
 \text{e) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq (1-x) \operatorname{arctg} x\}, \\
 \text{f) } \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \ln 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{3 - e^x} \right\}.
 \end{array}$$

7. Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} = \frac{50}{3}, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{4}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} = \frac{5}{3}$$

8. Mostre que cada uma das séries seguintes é uma série de Mengoli, estude a sua convergência e, em caso de convergência, determine a sua soma:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n}{n+1} \right),$$

9. Para cada uma das seguintes séries, estude a sua convergência, calculando, neste caso, a sua soma.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}, & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \pi^{-n+2}, & \text{e) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} + 1}{3^n}, \\ \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsen \left( \frac{n}{n+1} \right), & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{4^n}, & \text{f) } \sum_{n=0}^{\infty} (\arctg(n+1) - \arctg(n)). \end{array}$$

## EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Calcule o valor dos integrais seguintes:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^1 \frac{\arctg x}{1+x^2} dx, & \text{d) } \int_e^{e^4} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx, & \text{g) } \int_0^3 \arctg \sqrt{x} dx, \\ \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx, & \text{e) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx, & \text{h) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^3 x} dx, \\ \text{c) } \int_1^2 \frac{1}{x-4} dx, & \text{f) } \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx, & \end{array}$$

2. Calcule a área limitada pelas linhas de equações:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = 9 - x^2 \text{ e } y = x^2, & \text{f) } y = x^2 - \frac{\pi^2}{4}, y = \cos x, \\ \text{b) } y = \sqrt{x} \text{ e } y = x^2, & \text{g) } y = \ln x \text{ e } y = \ln^2 x, \\ \text{c) } y = e^x, y = 1 - x, x = 1, & \text{h) } y = \cos x \text{ e } y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \text{d) } y = \ln(1+x), y = -\ln(1+x), x = e-1, & \text{i) } x^2 y = 1, y = -27x, \text{ e } x = -8y. \\ \text{e) } y = \ln(1+x^2), y = \ln 2, & \end{array}$$

3. Calcule a área de região plana definida pelas condições  $x^2 + y^2 \leq 4$  e  $y \geq \sqrt{3}x^2$ .

4. Calcule a área de cada uma das seguintes regiões do plano:

$$\text{a) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} \leq y \leq x, y \geq x^2\},$$

- b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq |x|\}$ ,
- c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \ln x \wedge x \leq a\}$ ,  $a > 1$ ,
- d)  $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}\right\}$ ,
- e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x \operatorname{sen} x\}$ .
- f)  $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\right\}$ .

5. Seja  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Define-se  $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  através da expressão  $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(tx) dt$ . Justifique que  $F$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^+$ , e mostre que

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} \left( xF(x) + \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) \right), \quad x > 0.$$

( Sugestão: considere a mudança de variável  $tx = y$ .)

6. Mostre que, para qualquer  $x > 0$ ,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

7. Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = 9, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2},$$

8. Mostre que cada uma das séries seguintes é uma série de Mengoli, estude a sua convergência e, em caso de convergência, determine a sua soma:

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}.$$

9. Use as fórmulas explícitas para a sucessão de somas parciais de cada uma das séries seguintes, provadas por indução na Ficha 2 <sup>21</sup> para mostrar que:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2, & \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1. \\ \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-2)^2}{2^k} = 2, & \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ é divergente.} \end{array}$$

<sup>21</sup>Ver Ficha 2 - Aula Prática Ex. 4.b), Suplementares 1.f), 4.c), d).

10. Para cada uma das seguintes séries, estude a sua convergência, calculando, neste caso, a sua soma.

a) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n\pi-2n},$$

c) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n+1}}{2^{-n+1}},$$

e) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n) 2^{-n},$$

b) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

d) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+2)!} \right),$$