

FICHA 9 - SOLUÇÕES

AULA PRÁTICA

1. Em $a = 0$: $p_{2,0}(x) = 1 - x + x^2$; em $a = 1$: $p_{2,1}(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - 1)^2$. Tem um extremo local em $a = 1$, já que $f'(1) = 0$, $f''(1) = -1 \neq 0$ (máximo, porque $f''(1) < 0$).

2. Temos $p_{4,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x - a)^4$.

a) Por comparação de coeficientes com a expressão geral de $p_{4,0}(x)$: $f^{(0)}(0) = f(0) = -1$, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2$, $f^{(3)}(0) = 2$, $f^{(4)}(0) = 3!$ não tem extremo em a (a primeira derivada não nula é de ordem ímpar).

b) Calcular as derivadas $p_{4,1}^{(k)}(1) = f^{(k)}(1)$: $f(1) = -1$, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 3, 4$, $f^{(2)}(1) = -2 < 0$ tem um máximo em 2.

(Alternativamente, escrever $p_{4,1}(x) = -2 + 2x - x^2 = -2 + 2x - (x - 1)^2 - 2x + 1 = -1 - (x - 1)^2$ e comparar coeficientes.)

3. $p(x) = -12 + 2(x - 3) + (x - 3)^2$.

4. Usa-se $f(x) = \sqrt{x}$ com $a = 100$. Recta tangente: $y = p_1(x) := 10 + \frac{1}{20}(x - 100)$. A aproximação dada pela recta tangente fornece $p_1(99,7) = 9,985$. Do sinal da segunda derivada, depreende-se que o resto de Lagrange é negativo (verifique!), pelo que a aproximação é por excesso.

5. Escreva a fórmula de Taylor de ordem 4 de $f(x) = \sin x$ em $a = 0$: $f^{(4)}(0) = f^{(2)}(0) = f(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, $f'(0) = 1$, logo $p_4(x) = p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$, com resto de Lagrange $r_4(x) = \frac{\cos(c)}{5!} x^5$, com c entre 0 e x . Deduza então que, para $x \in [0, 1]$,

$$|r_4(x)| = \frac{|\cos(c)|}{5!} |x|^5 \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < 0.01.$$

6. Escreva a fórmula de Taylor de ordem n para e^x em $a = 0$, com resto de Lagrange $r_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$. com $c \in]0, 0.1[$. Deduza que $|r_3(0.1)| \leq \frac{10^{-4}}{8}$ e que, portanto, a aproximação dada por $p_3(0.1) = 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{6} = 1,1051(6)$ difere do valor exacto de $e^{0.1}$, no máximo, de $\frac{10^{-4}}{8}$. Se tomarmos 1,052 como aproximação final, introduzimos um erro adicional de $(1 - 0.6) \times 10^{-4}$. O erro total continuará inferior a 10^{-4} .

7.

a) $2\sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$, b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-x)^4}$, c) $3 \ln|x + 3|$, ,

d) $-\frac{1}{x-2}$, e) $\frac{e^{2x}}{2} + \frac{2^{3x}}{3 \ln 2}$, f) $4 \cosh(x/4)$, g) $-\frac{1}{2} \cos(2x)$,

h) $\arctg(x/2)$, i) $P\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\right) = P\left(\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\right) = \frac{1}{2} \arcsen(2x)$.

8.

- a) $\frac{1}{4} \ln(3 + x^4)$, b) $2e^{\sqrt{x}}$, c) $-\cos(e^x)$, d) $\frac{(x^2 - 1)^6}{12}$, e) $\frac{2}{3} \sqrt{(1 + \operatorname{sh} x)^3}$,
 f) $-\frac{1}{1 + e^x}$, g) $-\ln|\cos x|$, h) $P\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\right) = P\left(\frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\right) = \ln(1 + \operatorname{sen}^2 x)$,
 i) $\frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x$, j) $\operatorname{arctg}(\ln x)$, k) $\operatorname{arcsen}(e^x)$. l) $\frac{3}{1 + \cos x}$, m) $\ln(\ln x)$,
 n) $\frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arcsen} x)^3}$, o) $\ln(\operatorname{arctg} x)$.

9. a) $f(x) = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3}{2}x + 1$.

b) $g(x) = \begin{cases} \ln(x - 1) + 3, & \text{se } x > 1 \\ \ln(1 - x) + 2, & \text{se } x < 1. \end{cases}$

SUPLEMENTARES

1. a) $p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$. Temos $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$ e $f'''(0) = 0$ (verifique) logo $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
 b) $p_5(x) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{2e}{3}x^4$.
2. a) $p(x) = 18 + 24(x - 3) + 9(x - 3)^2 + (x - 3)^3$;
 b) $p(x) = 81 + 108(x - 3) + 54(x - 3)^2 + 12(x - 3)^3 + (x - 3)^4$.
3. Por comparação de coeficientes com a expressão geral de $p_{n,a}(x)$:
- a) $f^{(0)}(0) = f(0) = 1$, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, 3$, $f^{(4)}(0) = 4! > 0$ tem um mínimo em $a = 0$.
 b) $p_{4,-1}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + x^3 = (x + 1)^3 - x = (x + 1)^3 - (x + 1) + 1$. Logo $f(-1) = 1$, $f'(-1) = -1$, $f^{(k)}(-1) = 0$, $k = 2, 4$, $f^{(3)}(-1) = 6$ (ou calcular as derivadas $p_{4,-1}^{(k)}(-1)$), não tem extremo em a .
 c) $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, 4$, $f^{(3)}(0) = 3!$, $f^{(5)}(0) = -5!$. Não tem extremo em a .
 d) $p_{5,1}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} = \frac{((x-1)+1)^2}{2} - \frac{((x-1)+1)^4}{4} = \frac{1}{4} - (x - 1)^2 - (x - 1)^3 - \frac{(x-1)^4}{4}$. Logo, $f(1) = \frac{1}{4}$, $f'(1) = 0$, $f^{(2)}(1) = -2$, $f^{(3)}(1) = -3!$, $f^{(4)}(1) = -3!$, $f^{(5)}(1) = 0$ (alternativamente, calcular as derivadas $p_{5,1}^{(k)}(1)$). Tem máximo em a .
4. f tem um máximo relativo em 0. $p_4(x) = 1 - \frac{1}{4!}x^4$.
5. Usando sucessivamente a regra de derivação da função composta e os valores de $f^{(k)}(1)$, $k = 0, 1, 2$, deduzidos do polinómio de Taylor dado, obtêm-se

$$g(0) = f(1) = 2, \quad g'(0) = f'(1) = -1, \quad g''(0) = f'(1) + f''(1) = 3.$$

Logo, $p_2(x) = 2 - x + \frac{3}{2}x^2$.

6. a) • Relativa a $a = 0$: $f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}e^{2c}x^3$, em que c está entre 0 e x .
 Relativa a $a = 1$: $f(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4}{3}e^{2c}(x-1)^3$, em que c está entre 1 e x .
- Relativa a $a = 0$: $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{(1+c)^3}x^3$, em que c está entre 0 e x .
 Relativa a $a = 1$: $f(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{(1+c)^3}(x-1)^3$ em que c está entre 1 e x .
- Relativa a $a = 0$: $f(x) = 1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + \frac{\pi^3}{6}\text{sen}(\pi c)x^3$, em que $c \in]0, x[$ ou $c \in]x, 0[$.
 Relativa a $a = 1$: $f(x) = -1 + \frac{\pi^2}{2}(x-1)^2 + \frac{\pi^3}{6}\text{sen}(\pi c)(x-1)^3$ em que c está entre 1 e x .
- Relativa a $a = 0$: $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{(c+1)^{-5/2}}{16}x^3$, em que $c \in]0, x[$ ou $c \in]x, 0[$.
 Relativa a $a = 1$: $f(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{16\sqrt{2}}(x-1)^2 + \frac{(c+1)^{-5/2}}{16}(x-1)^3$, em que c está entre 1 e x .

b) e^{2x} : para $x \in]0, 1/2[$, temos também $c \in]0, 1/2[$ e $\left| \frac{4}{3}e^{2c}x^3 \right| \leq \frac{4\sqrt{e}}{3 \cdot 2^3} = \frac{\sqrt{e}}{6} < \frac{1}{3}$.

$\ln(1+x)$: para $x \in]0, 1/2[$, temos também $c \in]0, 1/2[$ e $\left| \frac{1}{3}\frac{1}{(1+c)^3}x^3 \right| \leq \frac{1}{24}$.

$\cos(\pi x)$: para $x \in]0, 1/2[$, temos também $c \in]0, 1/2[$ e $\left| \frac{\pi^3}{6}\text{sen}(\pi c)x^3 \right| \leq \frac{\pi^3}{48}$.

$\sqrt{x+1}$: para $x \in]0, 1/2[$, temos também $c \in]0, 1/2[$ e $\left| \frac{(c+1)^{-5/2}}{16}x^3 \right| \leq \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{128}$.

7. Escreva a fórmula de Taylor de ordem 2 em $a = 0$ da função exponencial com resto de Lagrange $r_2(x) = \frac{-e^{-c}}{3!}x^3$, com c entre 0 e x . Deduza então que $|r_2(x)| = \frac{e^{-c}}{3!}|x|^3 \leq \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

8. Nas condições dadas, f é n vezes diferenciável e o resto de Lagrange da fórmula de Taylor de ordem $n - 1$ em $a = 0$ é identicamente nulo (deduza!). Nesse caso, $f(x)$ coincidirá com $p_{n-1}(x)$ em \mathbb{R} e, por conseguinte, será um polinómio de grau não superior a $n - 1$.

9.

a) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4$, b) $\frac{1}{7}x^7 + \frac{3}{5}x^5 + x^3 + x$,

c) $P\left(\frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}\right) = P\left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}$,

d) $P\left(\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}}{x}\right) = P\left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$,

e) $P\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}\right) = -\frac{1}{2}P\left(-2(1-2x)^{-\frac{1}{5}}\right) = -\frac{5}{8}(1-2x)^{\frac{4}{5}}$;

f) e^{x+3} ; g) $\frac{1}{\ln 2}2^{x-1}$; h) $-e^{1-x}$, i) $\frac{1}{2}\ln|x+1/2|$,

j) $\text{tg } x$, k) $-2 \cotg x$, l) $2 \arctg(2x)$, m) $P(\text{tg}^2 x) = P(\sec^2 x - 1) = \text{tg } x - x$.

10.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{1}{2} \ln(1 + 2e^x), & \text{b)} & \ln(1 + \operatorname{sen} x), & \text{c)} & -e^{1/x}, & \text{d)} & e^{e^x}, \\ \text{e)} & e^{\operatorname{tg} x}, & \text{f)} & \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x^2 + 2), & \text{g)} & \frac{1}{4} \sqrt[3]{(1 + x^3)^4}, & \text{h)} & \frac{5}{6} \sqrt[5]{(x^2 - 1)^6}, \\ \text{i)} & -\operatorname{arctg}(\cos x), & \text{j)} & -\frac{1}{4(1 + x^4)}, & \text{k)} & \frac{2}{3} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x, & \text{l)} & \frac{1}{\cos x} = \sec x, \\ \text{m)} & \ln(2 + \operatorname{ch} x), & \text{n)} & \frac{1}{2(1 - \alpha)} \frac{1}{(1 + x^2)^{\alpha-1}}, \text{ se } \alpha \neq 1, \ln \sqrt{1 + x^2}, \text{ se } \alpha = 1. \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \sqrt{2x^3}, & \text{b)} & -3 \cos x + \frac{2}{3} x^3, & \text{c)} & \frac{1}{3} \ln |1 + x^3|, & \text{d)} & -\frac{1}{2} e^{-x^2}, \\ \text{e)} & \frac{1}{3} (1 + x^2)^{3/2}, & \text{f)} & \frac{1}{2} e^{2 \operatorname{sen} x}, & \text{g)} & -\frac{1}{x + 1}, & \text{h)} & \ln \sqrt{1 + x^2}; \\ \text{i)} & \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}, & \text{j)} & \frac{1}{4} P \left(\frac{4x^3}{(x^4)^2 + 1} \right) = \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(x^4); & \text{k)} & \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2), & \text{l)} & \operatorname{sen}(\ln x), \\ \text{m)} & P(\cos x(1 - 2 \operatorname{sen}^2 x)) = P(\cos x - 2 \cos x \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen} x - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 x, \text{ (ou por partes);} \\ \text{n)} & P \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) = \ln |\operatorname{sen} x|; & \text{o)} & P(3^{\operatorname{sen}^2 x} 2 \operatorname{sen} x \cos x) = P(3^{\operatorname{sen}^2 x} (\operatorname{sen}^2 x)') = \frac{1}{\ln 3} 3^{\operatorname{sen}^2 x}; \\ \text{p)} & P \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg} \sqrt{x} \right) = 2P((\sqrt{x})' \operatorname{tg} \sqrt{x}) = -2 \ln |\cos \sqrt{x}|; & \text{q)} & \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}x), \\ \text{r)} & \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(e^x/2), & \text{s)} & P \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right) + P \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = -\sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arcsen} x, \\ \text{t)} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arcsen}(\sqrt{2}x^2), & \text{u)} & 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}. \end{aligned}$$

12. • $P(x \operatorname{sen}(x^2)) = \frac{1}{2} \cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, logo a forma geral das primitivas é $F(x) = \frac{1}{2} \cos(x^2) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

a) $F(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = 0$, logo $C = -\frac{1}{2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ não existe, para qualquer $C \in \mathbb{R}$, logo não existe uma primitiva nas condições dadas.

• $P\left(\frac{e^x}{2+e^x}\right) = \ln(2 + e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, logo a forma geral das primitivas é $F(x) = \ln(2 + e^x) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

a) $F(0) = 0 \Leftrightarrow \ln 3 + C = 0$, logo $C = -\ln 3$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$, para qualquer $C \in \mathbb{R}$, logo não existe uma primitiva nas condições dadas.

• $P\left(\frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg}^2 x)}\right) = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)$, $x \in \mathbb{R}$, logo a forma geral das primitivas é $F(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

a) $F(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x) + C = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} + C, \text{ logo } C = -\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}.$$

$$13. F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-1} + 1, & \text{se } x > 1, \\ -\frac{1}{x-1} + 10, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$