FICHA 13 - SOLUÇÕES

AULA PRÁTICA

1. Usa-se o Critério geral de Comparação. Convergentes: a), b), d), Divergente: c)

2. Usa-se o Critério de d'Alembert em a), b), c) e o Critério da Raiz / de Cauchy em d). Divergentes: c); Convergentes: a), b), d) .

3. i) Temos que $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$, $x \geq 2$, é uma função crescente e positiva, e que

$$\lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}[\ln|\ln x|]_2^b = \lim_{b\to+\infty}\ln|\ln b| - \ln|\ln 2| = +\infty.$$

Logo, do critério do integral, a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ diverge.

ii) Temos $\dfrac{1}{n^2\ln n} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Logo, como $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, do Critério Geral de Comparação, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$ também converge.

4. a) diverge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$;
   b) converge - critério de d'Alembert;
   c) converge - critério de d'Alembert;
   d) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n}\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{13}{12}}}$;
   e) converge - critério da raiz;
   f) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

5.
   - $\sum(1 + a_n)$ diverge, uma vez que $1 + a_n > 1$, logo o termo geral não converge para 0.
   - $\sum\frac{1}{n^2+a_n}$ converge, uma vez que $\frac{1}{n^2+a_n} < \frac{1}{n^2}$ e $\sum\frac{1}{n^2}$ é convergente.

6. Comece por notar que $|a_n| \to 0$, e portanto, a partir de certa ordem, $|a_n| < 1$, donde, $0 \leq |a_n|^p \leq |a_n|$. O critério geral de comparação e as hipóteses consideradas estabelecem então a convergência absoluta de $\sum a_n^p$. Para $p > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Para $p = 1$: a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

7. a) A série dos módulos é dada por $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, que é divergente por comparação com $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Concluimos que a série dada não é absolutamente convergente. Escrevendo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, temos que $a_n \to 0$, $a_n > 0$ e (a_n) é decrescente. Assim, pelo critério de Leibniz, a série é convergente. Logo, a série é simplesmente convergente.
   b) É absolutamente convergente, comparar a série dos módulos com $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.
   c) É absolutamente convergente: é uma série geométrica de razão $-\frac{1}{4}$.
   d) É divergente: o termo geral tem dois sublimites 1 e -1, logo é divergente. Como o termo geral não converge para 0, a série é divergente.

e) É simplesmente convergente, escrevendo $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

f) É simplesmente convergente.

SUPLEMENTARES

1. Usa-se o Critério geral de Comparação. Divergentes: a), b), c), e), f), g). h). Convergente: d).

2. Usa-se o Critério de d'Alembert em a), b), c) d) e o Critério da Raiz / de Cauchy em e). Divergentes: b), d) se $a \geq b$, e). Convergentes: a), c) .

3. a) i) Critério do Integral com $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$, $x \geq 2$: a série converge.

   ii) Temos
$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \to +\infty.$$
   Logo, $\frac{1}{\sqrt{n}\ln n} > \frac{1}{n}$, a partir de determinada ordem, e do Critério Geral de Comparação, a série diverge.

4. a) Começe por verificar que, com as hipóteses dadas, os termos das séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ são não negativos, a partir de alguma ordem. Obtenha que as hipóteses dadas implicam também que $\lim \frac{f(a_n)}{a_n} = L$ e conclua o resultado usando o critério geral de comparação.

   b) Segue directamente de a), notando que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$$
   que as séries dadas convergem se e só se $\alpha > 1$, por comparação com as séries de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

5. a) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$;

   b) diverge - o termo geral não tende para 0;

   c) diverge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$;

   d) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$;

   e) converge - critério de d'Alembert;

   f) diverge - o termo geral não tende para 0;

   g) diverge - critério de d'Alembert;

   h) converge - $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^3}$, comparar com $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

   i) diverge - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – série harmónica;

   j) diverge - o termo geral não converge para 0;

   k) converge - critério da raiz;

   l) converge - critério da raiz;

m) converge - critério da raiz;

n) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;

o) diverge - o termo geral não tende para 0;

6. a) se (b_n) é limitada, com $|b_n| < c$, então $|a_n b_n| < c|a_n| = ca_n$, logo pelo critério geral de comparação, $\sum a_n b_n$ converge (absolutamente).

   b) se $\sum a_n$ converge, então $\lim a_n = 0$, logo (a_n) é limitada, e por (a), também converge $\sum a_n^2$.

   c) com $a_n = \frac{1}{n}$, tem-se $\sum \frac{1}{n}$ divergente e $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente.

7. a) É uma série alternada. A série dos módulos é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, que é divergente (uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge sse $\alpha > 1$). Concluimos que a série dada não é absolutamente convergente. Escrevendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, temos que $a_n \to 0$, $a_n > 0$ e

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} > 0$$

   ou seja, (a_n) é decrescente. Assim, pelo critério de Leibniz, a série é convergente. Logo, a série é simplesmente convergente.

   b) É simplesmente convergente (proceder como na alinea anterior).

   c) É absolutamente convergente: é uma série geométrica de razão $-\frac{1}{3}$.

   d) e) f) são simplesmente convergentes.