FICHA 12 - SOLUÇÕES

AULA PRÁTICA

1. a) $\frac{\ln 4-\pi}{8}$; b) $\frac{1}{3}-\ln 3$; c) $2+\ln\frac{2}{e^2+1}$; d) $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; e) $\frac{3}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$; f) $\frac{1}{2}$; g) $\operatorname{arctg}(3/4)$; h) $\frac{1}{2}(\ln(\sqrt{5}+2)-\ln(\sqrt{5}-2)-\ln 5)$.

2. Use a substituição $u=\frac{1}{t}$ no integral que representa $F\left(\frac{1}{x}\right)$ e obtenha a expressão de $F(x)$.

3. a) $A = 2\displaystyle\int_0^2 4-x^2-(x-2)\,dx = \frac{44}{3}$;

   b) $A = \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\right)\,dx = \frac{1}{12}$,

   c) $A = \displaystyle\int_0^1 (1-xe^{x-1})\,dx = 1-\frac{1}{e}$.

   d) $A = \displaystyle\int_0^2 \left(e^x-e^{-x}\right)\,dx = e^2+\frac{1}{e^2}-2.$.

   e) $A = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$.

   f) $A = 2\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{2(2-x)}-\sqrt{4(1-x)}\right)\,dx + 2\int_1^2 \sqrt{2(2-x)}\,dx = 2$

   OU integrar em y: $A = 2\displaystyle\int_0^2 \left(2-\frac{y^2}{2}-1+\frac{y^2}{4}\right)\,dy$.

4. $A = 4\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = 2\pi$ (substituição $x=2\operatorname{sen} t$).

5. $A = \displaystyle\int_0^1 \left(\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{16}x^2\right)\,dx + \int_1^2 \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16}x^2\right)\,dx = -\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{3}$.

6. a) $A = \displaystyle\int_0^1 \left(x^2-\frac{x^2}{2}\right)\,dx + \int_1^2 \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\,dx = \frac{1}{2}$.

   b) $A = \displaystyle\int_0^1 (4x-x)\,dx + \int_1^2 (4x-x^3)\,dx = \frac{15}{4}$.

   c) $A = \displaystyle\int_{-1}^1 2(x+1)-(x+1)^2\,dx = \frac{4}{3}$.

   d) $A = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy = -\frac{\pi}{4}$ (fazendo $y=\ln x$).

   e) $A = \displaystyle\int_0^1 (1-x)\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{1-\ln 2}{2}$.

   f) $A = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{3-e^x}\,dx = \frac{2}{3}\ln 2$ (fazendo $y=e^x$).

7. Todos os resultados podem ser obtidos partindo da série geométrica, notando que para $-1 < r < 1$, $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0\, r^p}{1-r}$.

8. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$,

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n) - \ln(n+1))$, diverge.

9. a) diverge, o termo geral não tende para 0;

   b) Diverge, uma vez que o seu termo geral não converge para 0.

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \pi^{-n+2} = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi}\right)^n$, série geométrica de razão $-\frac{1}{\pi}$, converge, porque $\left|-\frac{1}{\pi}\right| < 1$, e $s = -\frac{\pi^2}{1+\pi}$;

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n$, converge uma vez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge - por ser uma série geométrica de razão $0 < \frac{3}{4} < 1$ - e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ - também converge, por ser uma série geométrica de razão $-\frac{1}{4}$, e $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$. A soma é $s = 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5}$;

   e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} + 1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ diverge, uma vez que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n}$ diverge por ser uma série geométrica de razão $\frac{4}{3} > 1$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge por ser uma série geométrica de razão $0 < \frac{1}{3} < 1$. (Alternativamente: diverge uma vez que o seu termo geral não converge para 0.)

   f) É uma série de Mengoli da forma $\displaystyle\sum_{n=1} a_{n+1} - a_n$, com $a_n = \operatorname{arctg}(n)$, logo converge uma vez uma vez que $a_n \to \frac{\pi}{2}$, e a sua soma é $s = \lim a_n - a_1 = \frac{\pi}{4}$.

SUPLEMENTARES

1. a) $\frac{\pi^2}{32}$; b) $\frac{2}{15}$ (escreva $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$); c) $\ln\frac{2}{3}$; d) $\frac{14}{3}$; e) $\frac{1}{2}\ln 2$;
   f) $\frac{\pi}{4}$ $\left(\text{note que } \frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{(x+2)^2+1}\right)$; g) $\frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3}$; h) $\frac{3}{4}$.

2. a) $\displaystyle A = 2\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (9 - x^2 - x^2)\,dx = 18\sqrt{2}$, b) $\displaystyle A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \frac{1}{3}$;
   c)$\displaystyle A = \int_0^1 e^x - (1-x)\,dx = e - \frac{3}{2}$.

d) $A = \int_0^{e-1} 2\ln(1+x)\,dx = 2.$

e) $A = \int_{-1}^{1} \ln 2 - \ln(1+x^2)\,dx = 4 - \pi.$

f) $A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - x^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)\,dx = 2 + \frac{\pi^2}{6}.$

g) $A = \int_1^{e} \left(\ln x - \ln^2 x\right)\,dx = 3 - e.$

h) $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx = 2\sqrt{2}.$

i) $A = \int_{-2}^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{-x}{8}\right)\,dx + \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \left(-27x - \frac{-x}{8}\right)\,dx = \frac{15}{4}.$

3. $A = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x^2\right)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (substituição $x = 2\operatorname{sen} t$ para primitivar $\sqrt{4-x^2}$).

4. a) $A = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x}{2}\right)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x - x^2)\,dx = \frac{7}{48}.$

   b) $A = 2\int_0^{1} (x - x^2)\,dx = \frac{1}{3}.$

   c) $A = \int_1^{a} \ln x\,dx = a(\ln a - 1) + 1.$

   d) $A = \int_0^{2} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}\,dx = \frac{2\pi}{12}$ (fazendo $y = \sqrt{x+2}$).

   e) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x\,dx = 1.$

   f) $A = \int_0^{1} \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{2-\sqrt{2}}{3}.$

5. Considerando a mudança de variável sugerida: $tx = y \Leftrightarrow t = \frac{y}{x}$ e $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{x}$ logo

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(tx)\,dt = \frac{1}{x}\int_1^{\frac{1}{x}} f(y)\,dy.$$

   que se pode diferenciar usando a derivada do produto, o teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta.

6. Use a mudança de variável $y = 1/x$.

7. Todos os resultados podem ser obtidos partindo da série geométrica, notando que para $-1 < r < 1$, $\sum_{n=p}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0\, r^p}{1-r}.$

8. a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{3}{4}$ (como a));

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1.$

9. a) Da Ficha 2- Suplementares Exercicio 4.c) temos que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

   Da definição de série numérica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \lim s_n = \lim 2 - \frac{n+2}{2^n} = 2.$$

   Para as outras alíneas: usar Ex.1.f) e Ex.4.d), Suplementares e Ex. 4.b) - Aula Prática.

10. a) série geométrica de razão $\frac{e}{\pi^2}$, converge uma vez que $\left|\frac{e}{\pi^2}\right| < 1$, e $s = \frac{\pi^2}{\pi^2-e}$;

    b) série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$, com $a_n = -\sqrt{n}$, logo diverge, uma vez que (a_n) diverge;

    c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n+1}}{2^{-n+1}} = \frac{e}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{e}\right)^n$, série geométrica de razão $\frac{-2}{e}$, logo converge porque $\left|-\frac{2}{e}\right| < 1$, e $s = -\frac{e}{e+2}$;

    d) série de Mengoli da forma $\displaystyle\sum_{n=1} a_n - a_{n+2}$, com $a_n = \frac{1}{n!}$, logo converge com $s = a_1 + a_2 - 2\lim a_n = \frac{3}{2}$;

    e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2+(-1)^n)2^{-n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, converge uma vez que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ converge, por ser uma série geométrica de razão $0 \leq \frac{1}{2} < 1$, e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ também converge, por ser uma série geométrica de razão $-\frac{1}{2}$, e $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$. A soma é $s = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.