Cálculo Diferencial e Integral I - 2º Sem. 2019/20

FICHA 8

Estudo de funções; esboço de gráficos.

---

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

   a) Mostre que f é diferenciável no ponto 1 e escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

   b) Sabendo que f é diferenciável no ponto 0, determine os valores de a e b.

   c) Defina f' e diga se a função f é de classe $C^1(\mathbb{R})$.

   d) Estude f quanto a monotonia e extremos.

   e) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e determine o contradomínio de f.

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

   c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

   d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(\operatorname{sen} x)$.

   (a) Determine e classifique os extremos locais da função φ.

   (b) O que pode dizer sobre o número de soluções da equação $\varphi''(x) = 0$?

4. Determine intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões, assíntotas e contradomínio e esboce o gráfico das funções, definidas nos respectivos domínios por:

   a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

   b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$

   c) $f(x) = \dfrac{|x|}{1 - |x|}$

   d) $f(x) = x^2 e^{-x}$

   e) $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$

5. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x^2\right) & , \ x \geq 0 \\ xe^{1/x} & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

   a) Mostre que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$.

   b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função f.

   c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Considere a função $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \ln\sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ x^2 e^{1-x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

   a) Determine $\lim_{x\to -1^+} f(x)$, $\quad \lim_{x\to +\infty} f(x)$.
   b) Estude f quanto à diferenciabilidade e calcule f' nos pontos onde existir.
   c) Estude f quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.
   d) Determine o contradomínio de f.
   e) Mostre que não existe $f''(0)$ e que f'' muda de sinal em 0.

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x + 2\operatorname{arctg}|x|.$$

   a) Calcule ou mostre que não existem: $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
   b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a derivada f'.
   c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo relativo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.
   d) Determine o contradomínio da restrição de f ao intervalo $]-\infty, 0]$.

3. Mostre que a função $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ admite assintotas à direita e à esquerda e determine as suas equações. Estude f quanto à monotonia e extremos e esboce o gráfico da função.

4. Faça o estudo da função $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{2} + \ln(x+1) - \ln(x-1)\,,\ \forall\, x > 1\ .$$

   tendo em conta monotonia, extremos, concavidades e pontos de inflexão, assíntotas e contradomínio. Esboce o gráfico da função.

5. Determine intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões, assíntotas e contradomínio e esboce o gráfico das funções, definidas nos respectivos domínios por:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$
   b) $f(x) = xe^{1/x}$
   c) $f(x) = \dfrac{e^{x+1}}{x+2}$
   d) $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln x}$
   e) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

6. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 0, e tal que

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x \neq 0\,.$$

   a) Calcule $f(0)$ e estude f quanto à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.

c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função f.

d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

7. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{|x|}\right)$, $x \neq 0$, e $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

   a) Estude f quanto à continuidade em todo o seu domínio, e quanto à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

   b) Determine, justificando, os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.

   c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função f.

   d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

8. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{1+x}\right) & , x \geq 0 \\ \\ x^2 e^x & , x < 0 \,. \end{cases}$$

   a) Mostre que f é contínua mas não diferenciável no ponto zero.

   b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função f.

   c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.