

FICHA 11

Integral. Teorema Fundamental do Cálculo e Regra de Barrow.
Integração.

AULA PRÁTICA

- Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$. Mostre que :
 - se existe $c \in [a, b]$ com $f(c) > 0$ então $\int_a^b f(x)dx > 0$;
 - se $\int_a^b f(x) dx = 0$ então $f(x) = 0$ para qualquer $x \in [a, b]$.
- Calcule o valor médio de f no intervalo indicado e verifique o teorema da Média:
 - $f(x) = 2x$ em $[1, 4]$,
 - $f(x) = x$ em $[2, 4]$,
 - $f(x) = x$ em $[-1, 2]$.

- Determine as derivadas das funções seguintes:

$$\text{a) } \int_x^{2\pi} \cos(t^2) dt, \quad \text{b) } \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt, \quad \text{c) } \int_1^{x^2} x \cos(\sqrt{t}) dt.$$

- Mostre que se f é uma função diferenciável em \mathbb{R} verificando a condição

$$\int_0^x f(t) dt = xf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

então f é uma função constante. (Sugestão: derive ambos os membros da igualdade anterior).

- Calcule os limites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} te^{\sqrt{t}} dt}{\int_0^{x^3} (e^{\sqrt[3]{t}} - 1) dt}.$$

- Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

$$\text{a) } g(x) = \int_2^{e^{x+1}} \frac{1}{\ln t} dt, \quad \text{b) } h(x) = \int_1^x (x-t)e^{t^2} dt.$$

- Calcule o valor dos integrais seguintes, usando a Regra de Barrow:

$$\text{a) } \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx \quad \text{b) } \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx \quad \text{c) } \int_{-1}^1 \frac{3 \arctg^2 x}{1+x^2} dx$$

- Calcule o valor dos integrais seguintes, usando integração por partes:

$$\text{a) } \int_{-1}^0 \frac{x}{e^x} dx, \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} \arctg x dx, \quad \text{c) } \int_0^\pi \text{sh } x \text{sen } x dx.$$

9. Calcule o valor dos integrais seguintes, utilizando as substituições indicadas:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}(1+4x)} dx, & t = \sqrt{x}, \\ \text{b)} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x + 1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx, & t = \ln x, \\ \text{c)} \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx, & t = e^x, \\ \text{d)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx, & t = \operatorname{tg} x \\ \text{e)} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos x(1+\cos^2(x))} dx, & t = \cos x \\ \text{f)} \int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx, & x = \sec t. \end{array}$$

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Considere a função f definida no intervalo $[0, 2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1[\\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 & \text{se } x \in]1, 2] \end{cases}$$

a) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma decomposição d_n do intervalo $[0, 2]$ tal que as somas superior $S_{d_n}(f)$ e inferior $s_{d_n}(f)$ verificam

$$S_{d_n}(f) - s_{d_n}(f) < \frac{1}{n}, \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{d_n}(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{d_n}(f) = 4.$$

b) Justifique que f é integrável em $[0, 2]$ e que $\int_0^2 f(x)dx = 4$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Mostre que $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x dx = 1/2$.

b) Justifique que f não é integrável em $[0, 1]$.

3. a) Mostre que se f é contínua em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$, existe pelo menos uma raiz da equação $f(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$.

b) Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que se $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = g(c)$.

4. Sendo f uma função contínua em \mathbb{R} , prove que se é nulo o integral de f em *qualquer* intervalo limitado, então $f(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Dê um exemplo de uma função integrável e com integral nulo em qualquer intervalo limitado e que não verifique $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

5. Prove que, se f é contínua em $[a, b]$ e g é integrável e não negativa em $[a, b]$, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

6. Determine as derivadas das funções seguintes:

a) $\int_1^x \operatorname{sen}(t^2) dt$, b) $\int_x^{2x} e^{t^2} dt$, c) $\int_{x^2}^{x^4} \operatorname{sen}(\sqrt{t}) dt$,

7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\psi(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$. Justifique que ψ é duas vezes diferenciável e que $\psi''(x) = f(x)$.

8. Mostre que a função seguinte é constante (ie não depende de x):

$$\psi(x) = \int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

9. Seja f uma função contínua em \mathbb{R} e

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{se } x \neq 0 \\ f(0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Prove que F é contínua em \mathbb{R} e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; mostre que, nas condições indicadas, F pode não ser diferenciável em 0.

10. Sejam u e v funções contínuas em \mathbb{R} e tais que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\int_a^x u(t) dt = \int_b^x v(t) dt$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $u = v$ e $\int_a^b u(t) dt = 0$.

11. Calcule o limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_{\pi/2}^{\operatorname{arctg} x} \operatorname{sen}(t^2) dt,$$

12. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

a) $f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$, b) $g(x) = \int_{-2x}^{-1} e^{1/t^2} dt$.

13. Supondo que f é uma função diferenciável em \mathbb{R} e tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$ e $f'(x) < 0$, considere a função g definida em \mathbb{R} por

$$g(x) = \int_0^{x^2-4x+3} f(t) dt.$$

(a) Determine os intervalos em que g é monótona, os seus pontos de máximo ou de mínimo e as raízes da equação $g(x) = 0$. Estude ainda o sentido da concavidade do gráfico de g .

(b) A função g é majorada? E minorada?

14. Calcule o valor dos integrais seguintes:

a) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ b) $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} dx$ c) $\int_{-1}^1 \operatorname{tg} x dx$, d) $\int_0^\pi \operatorname{sen} x dx$ e) $\int_{-1}^0 x e^{x^2} dx$.

15. Calcule o valor dos integrais seguintes, usando integração por partes:

a) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x dx$, b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh}(x) \cos(\pi x) dx$.

16. Considere a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Mostre que

$$\int_0^1 F(x) dx = F(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}.$$

(Sugestão: use integração por partes.)

17. Calcule o valor dos integrais seguintes, utilizando as substituições indicadas:

a) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x - 3)\sqrt{1 + e^x}} dx, \quad t^2 = 1 + e^x,$ b) $\int_0^{1/2} \sqrt{1 - 4x^2} dx, \quad x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t$

c) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{8}{\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{sen}^2 x)} dx, \quad t = \operatorname{sen} x,$ d) $\int_{\operatorname{argsh}(-1)}^0 \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad t = \operatorname{sh}(x),$

e) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx, \quad x = \operatorname{tg} t,$ f) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2 - 1}} dx, \quad x = \operatorname{sec} t.$