

FICHA 11 - SOLUÇÕES**AULA PRÁTICA**

1. a) Se f é contínua em $[a, b]$ e $c \in]a, b[$ com $f(c) > 0$, então $f(x) > 0$ numa vizinhança $I = V_\epsilon(c) \subset [a, b]$ e portanto $\int_I f(x) dx > 0$. Então, $\int_a^b f(x) dx = \int_I f(x) dx + \int_{[a,b] \setminus I} f(x) dx \geq \int_I f(x) dx > 0$, onde se usou que $f \geq 0$. Se $c = a$ ou $c = b$, é análogo.
b) É equivalente a a).
2. a) $5 = f(5/2)$; b) $3 = f(3)$; c) $1/2 = f(1/2)$.
3. a) $-\cos x^2$ b) $2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$ c) $\int_1^{x^2} \cos(\sqrt{t}) dt + 2x^2 \cos|x|$.
4. Como f é diferenciável, e portanto contínua, podemos derivar ambos os membros (usando o Teorema Fundamental do Cálculo) para concluir que $f'(x) = 0$, para $x \neq 0$, ou seja, que f é constante em $]0, +\infty[$ e em $] - \infty, 0[$. Da continuidade de f em \mathbb{R} conclui-se então o resultado.
5. Use a regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo: a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{2}{3}$.
6. a) $D_g =] - 1, +\infty[$; g é estritamente crescente em $] - 1, +\infty[$, pelo que não tem extremos.
b) $D_h = \mathbb{R}$; h é estritamente crescente em $]1, +\infty[$ e estritamente decrescente em $] - \infty, 1[$, tendo um mínimo em 1.
7. a) $-\ln(2)$; b) $1/2$; c) $2\pi^3/4^3 = \pi^3/32$.
8. Todos com integração (ou primitivação) por partes: a) -1 ; b) $\frac{\ln 2}{4}$ c) $\frac{1}{2} \operatorname{sh}(\pi)$.
9. a) $[\operatorname{arctg}(2t)]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{12}$; b) $[-\sqrt{1-t^2} + \operatorname{arcsen} t]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$;
c) $\left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right]_2^3 = \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 2) = \ln \sqrt{\frac{3}{2}}$;
d) $\frac{1}{2} \left[\ln|t+1| - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \operatorname{arctg} t \right]_0^1 = \frac{1}{8} (\pi + \log 4)$; e) $[2 \operatorname{arctg}(t)]_0^1 = \pi/2$;
f) $[\cos t]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{2}$.

SUPLEMENTARES

1. a) Tomando uma decomposição de $[0, 2]$ da forma $d = \{0, 1 - \epsilon, 1 + \epsilon, 2\}$, verifique que neste caso $S_d(f) - s_d(f) = 4\epsilon$. É suficiente tomar, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon < \frac{1}{4n}$ (por exemplo, $\epsilon = 1/4(n+1)$).
b) Da alínea anterior $\lim S_{d_n}(f) - s_{d_n}(f) = 0$ logo f é integrável em $[0, 2]$ e $\int_0^2 f(x) dx = \lim S_{d_n}(f) = 4$.

2. a) Temos que $\sup_{x \in [a,b]} f(x) = b = \sup_{x \in [a,b]} x$, para quaisquer $a, b \in [0, 1]$. Logo, para qualquer decomposição do intervalo $[0, 1]$, temos $S_d(f) = S_d(x)$ e assim

$$\overline{\int_0^1} f(x) dx = \inf S_d(f) = \inf S_d(x) = \int_0^1 x dx = \int_0^1 x dx = 1/2,$$

já que x é integrável.

- b) Por outro lado, $\underline{\int_0^1} f(x) dx = 0$, já que $\inf_{x \in [a,b]} f(x) = 0$, para quaisquer $a, b \in [0, 1]$, logo

$$\underline{\int_0^1} f(x) dx \neq \overline{\int_0^1} f(x) dx$$

e assim f não é integrável.

3. a) Basta notar que se $f(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$, então do T. Valor Intermédio, f não muda de sinal em $[a, b]$, e fazer como no Ex. 1 da Ficha 11.

b) Fazer $h = f - g$ e usar a).

4. Se fosse $f(c) > 0$ (respectivamente $f(c) < 0$) para algum $c \in \mathbb{R}$ então $\int_I f(x) dx > 0$ (respectivamente $\int_I f(x) dx < 0$) numa vizinhança $I = V_\epsilon(c)$. OU Usar o Teorema Fundamental do Cálculo, notando que $\int_0^x f(t) dt = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Por exemplo $f(x) = 0, x \neq 1, f(1) \neq 0$.

5. Comece por aplicar o Teorema de Weierstrass a f em $[a, b]$ para garantir a existência de $m = \min f([a, b])$ e $M = \max f([a, b])$. Obtenha as desigualdades

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M,$$

e aplique o Teorema do Valor Intermédio (Teorema de Bolzano) para obter o resultado pedido.

6. a) $\sin x^2$, b) $2e^{4x^2} - e^{x^2}$, c) $4x^3 \sin(x^2) - 2x \sin(|x|)$.

7. Verifique que está nas condições de aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo, aplique-o para obter ψ' e verifique que pode voltar a usar o Teorema Fundamental do Cálculo para obter ψ'' .

8. Use o Teorema Fundamental do Cálculo em conjunto com a regra de derivação da função composta para obter $\psi'(x) = 0$, para $x \in]0, \pi/2[$.

9. Em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: F é o produto de duas funções diferenciáveis (justifique) e, logo, contínuas. Em 0, usando a regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo, prove que F é contínua. Mostre, igualmente recorrendo à regra de Cauchy e ao Teorema Fundamental do Cálculo, que F é diferenciável em 0 se e só se f é diferenciável em 0, caso em que, $F'(0) = \frac{f'(0)}{2}$.

10. Da continuidade de u e v , podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para derivar os integrais indefinidos e provar que $u = v$.

11. Use a regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo: $-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$.
12. a) $D_f = \mathbb{R}$; f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $] -\infty, 0]$ (note que f é par); tendo um mínimo em 0.
 b) $D_g = \mathbb{R}^+$; g é estritamente crescente em \mathbb{R}^+ , pelo que não tem extremos.
13. a) Use o Teorema Fundamental do Cálculo e a regra de derivação da função composta para obter g' e g'' e com base no estudo do sinal destas funções obtenha que: g é crescente em $] -\infty, 2[$, decrescente em $]2, +\infty[$, tendo máximo em 2, e a concavidade do gráfico de g está virada para baixo.
 b) É majorada: $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq g(2)$.
 Obtenha $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(0)(x^2 - 4x + 3) = -\infty$, o que lhe permite concluir que g não é minorada.
14. a) $\ln 2$; b) 0; c) 0; d) 2; e) $\frac{1}{2}(1 - e)$;
15. Com integração (ou primitivação) por partes: a) $\frac{\ln 2 - 1}{2} = \ln \sqrt{\frac{2}{e}}$; b) $\frac{-1 + \pi \operatorname{sh}(1/2)}{1 + \pi^2}$;
16. Uma vez que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $F'(x) = e^{-x^2}$, aplicando o método de integração por partes a $\int_0^1 1 \cdot F(x) dx$ obtém o resultado desejado.
17. a) $\left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} \right| = \ln \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} \right)$;
 b) $\left[\frac{1}{8} \operatorname{sen}(2t) + \frac{t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$;
 c) $[8 \ln |t| - 4 \ln(1+t^2)]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = 8 \ln(\sqrt{3}/2) - 8 \ln(1/2) - 4 \ln(7/4) + 4 \ln(5/4) = 4 \ln(15/7)$.
 d) $[\operatorname{arctg}(t)]_{-1}^0 = \frac{\pi}{4}$;