TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I - 2º Sem. 2019/20

FICHA 10

Primitivas por partes. Primitivas de funções racionais. Primitivas por substituição.

AULA PRÁTICA

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

a) $\cos^2 x$, c) $\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x$, e) $3 \operatorname{ch}^3 x$,
b) $\operatorname{sen}^3 x$, d) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x$, f) $\operatorname{tg}^2 x \sec^2 x$,

2. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $x^3 e^{-x}$, d) $x \operatorname{arctg} x$, g) $\operatorname{ch} x \cos x$,
b) $\operatorname{arcsen} x$, e) $\ln^2 x$, h) $\sqrt{x} \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$,
c) $\sqrt{x} \ln x$, f) $\cos(2x) \ln(\operatorname{tg} x)$, i) $\cos(\ln x)$,

3. Determine a função $\psi :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições

$$\forall_{x>-1} \quad \psi''(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad \psi(0) = \psi'(0) = 1.$$

4. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais (todas imediatamente primitiváveis):

a) $\dfrac{x}{1+(x-1)^2}$, b) $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$, c) $\dfrac{x+1}{(x+2)^3}$.

5. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais, utlizando uma decomposição em fracções simples adequada:

a) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)^2}$, c) $\dfrac{3x^2+2}{x(x^2+2x+2)}$, e) $\dfrac{x+2}{(4-x^2)(1+x^2)}$,
b) $\dfrac{x^4}{x^4-1}$, d) $\dfrac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1}$, f) $\dfrac{1+x^2}{x^3-2x^2+x}$.

6. Determine *todas* as primitivas de cada uma das funções do exercício anterior (nos respectivos domínios).

7. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

a) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, b) $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$, c) $\dfrac{2\ln x - 1}{x \ln x (\ln x - 1)^2}$, d) $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$.

8. Usando a substituição indicada num domínio apropriado, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+2x}}$, $1+2x=t^2$
b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $x=t^6$
c) $\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}$, $t=e^x$
d) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$, $t^2=1+e^x$
e) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}$, $x=\cos t$,
f) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x=\operatorname{sen}^2 t$,
g) $\dfrac{1}{2+\operatorname{tg} x}$, $t=\operatorname{tg} x$,
h) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos x}$, $t=\operatorname{sen} x$.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

a) $\operatorname{sen}^3 x\cos^4 x$,
b) $\cos^3 x\operatorname{sen}^3 x$,
c) $4\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x$,
d) $\operatorname{ch}^2 x$,
e) $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^4 x$,
f) $\sec^4 x$.

2. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $e^x(e^x+x)$,
b) $x\operatorname{sen} x$,
c) $e^x\operatorname{sen} x$,
d) $x^3e^{x^2}$,
e) $x^2\operatorname{sh} x$,
f) $\operatorname{arctg} x$,
g) $x(1+x^2)\operatorname{arctg} x$,
h) $\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$,
i) $x^2\ln^2 x$,
j) $\ln^3 x$,
k) $\dfrac{1}{x^3}\cos\dfrac{1}{x}$,
l) $\operatorname{sen} x\ln(1+\operatorname{sen} x)$,
m) $3x\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$,
n) $\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$,
o) $3^x\cos x$,
p) $\sqrt{x}\operatorname{arctg}(1/\sqrt{x})$,
q) $x^n\ln x,\ n\in\mathbb{N}$,

3. Mostre que, para $n\in\mathbb{N}$, é válida a seguinte fórmula de recorrência:

$$P(\ln^n|x|)=x\ln^n|x|-nP(\ln^{n-1}|x|),\ \ x\neq 0.$$

Aproveite o resultado anterior para calcular todas as funções $F(x)$ tais que $F'(x)=\ln^2|x|$, e que verificam a condição $F(1)+F(-1)=0$.

4. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais (todas imediatamente primitiváveis):

a) $\dfrac{1}{1-x}$,
b) $\dfrac{1}{(x-3)^3}$,
c) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$,
d) $\dfrac{2x+1}{x^2+4}$,
e) $\dfrac{x+1}{a^2+x^2}$,
f) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

5. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais, utlizando uma decomposição em fracções simples adequada:

a) $\dfrac{1}{x^2+x}$,
b) $\dfrac{x+1}{x(x-1)^2}$,
c) $\dfrac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}$,
d) $\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$,
e) $\dfrac{x^5}{x^2-1}$,
f) $\dfrac{x^3+2x^2+2x}{(x+1)^2}$,
g) $\dfrac{x^4}{x^4-1}$,
h) $\dfrac{x^3+4x^2-4x}{x^4-16}$,
i) $\dfrac{2x^2+x-5}{(x+1)^2(x-3)}$,
j) $\dfrac{2x}{(x^2-1)(x+1)}$,
k) $\dfrac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x-3)}$,
l) $\dfrac{2x^2+4x+3}{(1+x)(x^2+2x+2)}$,
m) $\dfrac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}$

6. Determine *todas* as primitivas de cada uma das funções do exercício anterior (nos respectivos domínios).

7. Determine

a) Uma expressão geral das primitivas da função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = (x+1)e^{x^2+2x}.$$

b) A primitiva G, da função

$$g(x) = \frac{x+3}{x^4-x^2}$$

definida no intervalo $]1,+\infty[$ e que verifica a condição $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 3$.

8. a) Usando o método de primitivação por partes, mostre que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, tem-se:

$$P\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^k}\right) = \frac{1}{2(1-k)}\left(\frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} - P\left(\frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}\right)\right).$$

b) Justifique que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$,

$$P\left(\frac{1}{(1+x^2)^k}\right) = -\frac{1}{2(1-k)}\frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} + \left(1+\frac{1}{2(1-k)}\right)P\left(\frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}\right).$$

(Sugestão: $\frac{1}{(1+x^2)^k} = \frac{1}{(1+x^2)^{k-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$).

c) Utilize a alinea anterior para calcular

$$P\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right), \qquad P\left(\frac{1}{(1+x^2)^3}\right).$$

9. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}$ c) $\dfrac{1}{1+e^{2x}}$, e) $\dfrac{\ln x}{x(\ln x-1)^2}$,

b) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$, d) $\dfrac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}$,

10. Usando a substituição indicada num domínio apropriado, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{5}{2(x+1)(\sqrt{x}+2)}$, $x=t^2$ b) $\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$, $1-x=t^2$

c) $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}$, $1+x=t^4$ d) $\dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{1-e^x}}$, $t=\sqrt{1-e^x}$

e) $\dfrac{1}{x(4-\ln^2(x))}$, $t=\ln x$ f) $\dfrac{1}{x\ln x(1-\ln x)}$, $t=\ln x$

g) $\sec x$, $t=\operatorname{sen} x$, h) $\sec^3 x$, $t=\operatorname{sen} x$,

i) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos^2 x}$, $t=\operatorname{sen} x$, j) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2(x)+3(\cos x-1)}$, $t=\cos x$

k) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)}$, $t=\cos(x)$ l) $\dfrac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}$, $t=\operatorname{sen}(x)$

11. a) Mostre que fazendo a substituição $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $x\in]-\pi,\pi[$, temos

$$\cos x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\qquad \operatorname{sen} x=\frac{2t}{t^2+1}.$$

b) Justifique que esta substituição transforma qualquer função racional de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ numa função racional de t e aproveite para calcular uma primitiva das funções seguintes:

$$\frac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x},\qquad \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}.$$