

FICHA 7

Derivada da função Inversa. Teoremas de Rolle e Lagrange. Regra de Cauchy.

AULA PRÁTICA

1. Determine a derivada das funções seguintes, sempre que exista¹⁶:

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| a) $(e^{2x} + \arcsen(2x))^8$, | c) $\cos(\arcsen x)$, |
| b) $\arctg(x^4) - (\arctg x)^4$, | d) $\ln(\arccos(1/\sqrt{x}))$. |

2. Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(1 + \sqrt{x})$, e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função injectiva, diferenciável, com $g(1) = 4$, $g'(1) = 3$. Considere $h(x) = f(g(x))$.

- Justifique que h é diferenciável em 1 e calcule $h'(1)$.
- Justifique que h é injectiva e que a sua função inversa h^{-1} é diferenciável em $\ln 3 = h(1)$. Calcule $(h^{-1})'(\ln 3)$.

3. Mostre que o polinómio $p(x) = x^6 - 4x^4 + 2$ tem exactamente quatro zeros.

4. Prove que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.

5. Use o Teorema de Lagrange num intervalo adequado para provar a seguinte relação:

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x, \quad \text{para } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

6. Determine intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (se existentes) para as funções¹⁷:

- | | | |
|-----------------------|----------------------|--------------------------------------|
| a) $ x^2 - 5x + 6 $, | b) $\frac{e^x}{x}$, | c) $\arctg x - \ln \sqrt{1 + x^2}$. |
|-----------------------|----------------------|--------------------------------------|

7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

- Prove que se $f(n) = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.
- Assuma agora que $f(n) = (-1)^n/n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Suponha que existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$. O que pode dizer sobre o seu valor?

8. a) Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Mostre que se existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L$ então $L = 0$.

b) Seja $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, tal que h tem uma assíntota à direita em $y = mx + b$. Mostre que se existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = L$ então $L = m$.

9. Calcule cada um dos limites seguintes, se existir em $\overline{\mathbb{R}}$:

¹⁶assuma que x é um ponto interior do domínio.

¹⁷definidas no maior conjunto em que a expressão dada designa um número real.

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 5^x}{x}$, | e) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(\ln x)$, | i) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)$, |
| b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctg(\sqrt{x})}{x}$, | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, | j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$, | g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$, | |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x}$, | h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$, | k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \operatorname{arcsen} \frac{1}{x}$, |

10. Calcule cada um dos limites seguintes, se existir em $\overline{\mathbb{R}}$:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^x)^x$, | e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{sen}(1/x))^{1/x}$, |
| b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg(x)\right)^{1/x}$, | d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + x^3)^{1/\ln x}$, | f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x)} - 1$, |

11. Calcule $\lim \sqrt[n]{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ (Sugestão: determine primeiro $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$).

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Determine a derivada das funções seguintes, sempre que exista:

- | | | |
|------------------------|--|---|
| a) $\arctg \sqrt{x}$, | b) $\operatorname{arccos} \frac{1}{x}$, | c) $(\arctg x)^{\operatorname{arcsen} x}$. |
|------------------------|--|---|

2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável. Calcule $(\arctg f(x) + f(\arctg x))'$.

3. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e estritamente monótona, com $g(0) = 2$ e $g'(0) = \frac{1}{2}$. Considere $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(\operatorname{arcsen} x)$.

- Justifique que f é diferenciável em $] - 1, 1[$ e calcule $f'(0)$.
- Justifique que f é injectiva e, sendo f^{-1} a sua inversa, calcule $(f^{-1})'(2)$.

4. As funções inversas das funções hiperbólicas sh e ch designam-se, respectivamente por $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\operatorname{argch} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.¹⁸ Mostre que

$$(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (\operatorname{argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

de duas formas distintas:

- usando o teorema de derivação da função inversa;
- derivando as expressões obtidas para $\operatorname{argsh} x$ e $\operatorname{argch} x$ na Ficha 5.

(Para a), veja que $\operatorname{ch}^2(y) - \operatorname{sh}^2(y) = 1 \Rightarrow \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1+x^2}$ e $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2-1}$.)

¹⁸Ou seja, $x = \operatorname{sh} y$ sse $y = \operatorname{argsh} x$, $y \in \mathbb{R}$, e $x = \operatorname{ch} y$ sse $y = \operatorname{argch} x$, $y \geq 1$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$, mas a derivada de f não se anula em $[-1, 1]$. Justique que este facto não contraria o Teorema de Rolle.
6. Mostre que a equação $3x^2 = e^x$ tem exactamente três soluções.
7. Prove que se f é de classe C^1 em \mathbb{R} e a equação $f(x) = x^2$ tem três soluções, sendo uma negativa, uma nula e outra positiva, então f' tem pelo menos um zero.
8. Use o Teorema de Lagrange em intervalos adequados para provar as seguintes relações:
- a) $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$, para $x > 1$.
- b) $e^x \geq 1+x$, para $x \in \mathbb{R}$.
9. Determine intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (se existentes) para as funções¹⁹:
- a) $\frac{x}{x^2+1}$, b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, c) $x \ln x$, d) e^{-x^2} , e) xe^{-x} .
10. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
- a) Mostre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+2) - f(x)] = 0$.
- b) Será que se pode garantir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(2x) - f(x)] = 0$? Justifique.
- *11. Seja f uma função diferenciável em \mathbb{R} tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

é crescente em \mathbb{R}^+ . (Sugestão: Aplique o Teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) \geq 0$.)

12. Calcule cada um dos limites seguintes, se existir em $\overline{\mathbb{R}}$:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$,	f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$,	k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x}{x+1} \right)$,
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2^x)}{x}$,	g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 \ln x}$,	l) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \ln(1-x)$,
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x^2)}{x^2}$,	h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{x^2 \ln(1-x)}$,	m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$,
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x^2}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}}$,	i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \operatorname{sen} \sqrt{x}$,	n) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$,
e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.	j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2(x+2)}$,	o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(2x) - 2 \arcsen(x)}{x^3}$.

13. Prove por indução matemática que, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, se tem:

¹⁹definidas no maior conjunto em que a expressão dada designa um número real.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^p}{x} = 0; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^p = 0.$$

14. Calcule cada um dos limites seguintes, se existir em $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\ln \ln x}, & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}, & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^x, \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}, & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}, & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x)^{\operatorname{sen} x}, \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}, & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x)^{x-1}, & \text{m) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos(1/x))^x, \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}, & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(e^x-1)}, & \text{n) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x)^{1/\ln x}, \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + x^2)^{1/\ln x}, & \text{o) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x-1)}. \end{array}$$