

FICHA 9

Polinómio de Taylor. Primitivas imediatas e quase-imediatas.

AULA PRÁTICA

- Determine o polinómio de Taylor de grau 2 em $a = 0$ e $a = 1$ da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2) - x + 1$ e justifique se a função tem um extremo local em algum destes pontos.
- Seja f uma função de classe $C^4(\mathbb{R})$ tal que o seu polinómio de Taylor de grau 4 em a é dado por:

a) $p_{4,0}(x) = -1 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}, a = 0,$

b) $p_{4,1}(x) = -2 + 2x - x^2, a = 1.$

Em cada caso, determine $f^{(k)}(a), k = 0, 1, 2, 3, 4$ e decida se f tem um ponto de extremo local em a , classificando-o.

- Use o polinómio de Taylor para escrever o polinómio $p(x) = x^2 - 4x - 9$ como um polinómio em potências de $(x - 3)$.
- Use a recta tangente para estimar aproximadamente a expressão $\sqrt{99,7}$. Estime o erro cometido e indique se a aproximação é por excesso ou por defeito.
- Prove, usando a fórmula de Taylor em $a = 0$ com resto de Lagrange, que se tem

$$\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right| \leq 0.01, \quad \text{para } x \in [0, 1].$$

(Sug.: considere o polinómio de Taylor de grau 4.)

- Determine $e^{0.1}$ com erro inferior a 10^{-4} , sem usar a calculadora.
- Determine uma primitiva (imediata) de cada uma das funções:

a) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2},$

c) $\frac{3}{x+3},$

e) $e^{2x} + 2^{3x},$

h) $\frac{2}{4+x^2},$

b) $\sqrt[3]{1-x},$

d) $\frac{1}{(x-2)^2},$

f) $\operatorname{sh}(x/4)$

i) $\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}},$

g) $\operatorname{sen}(2x),$

- Determine uma primitiva de cada uma das funções (escrevendo-as na forma $f(u(x))u'(x)$):

a) $\frac{x^3}{3+x^4},$

e) $\operatorname{ch} x \sqrt{1+\operatorname{sh} x},$

i) $\cos x \operatorname{sen}^4 x,$

m) $\frac{1}{x \ln x},$

b) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}},$

f) $\frac{e^x}{(1+e^x)^2},$

j) $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)},$

n) $\sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}},$

c) $e^x \operatorname{sen}(e^x),$

g) $\operatorname{tg} x,$

k) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}},$

o) $\frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}.$

d) $x(x^2-1)^5,$

h) $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}^2 x},$

l) $\frac{3 \operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2},$

9. Determine as funções que verificam as condições impostas em cada uma das alíneas seguintes:

a) $f'(x) = \frac{1}{4 + 9x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; $f(0) = 1$.

b) $g'(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $g(0) = 0$, $g(2) = 3$.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. a) Determine o polinómio de Taylor de grau 3 em $a = 0$ da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\sin x}$.

b) Determine o polinómio de Taylor de grau 5 em $a = 0$ da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\cos x}$.

2. Use o polinómio de Taylor para escrever cada um dos seguintes polinómios como um polinómio em potências de $(x - 3)$.

a) $x^3 - 3x$,

b) x^4 .

3. Seja f uma função de classe $C^n(\mathbb{R})$ tal que o seu polinómio de Taylor de grau n em a é dado por $p_{n,a}$. Em cada um dos casos, determine $f^{(k)}(a)$, para $k = 0, 1, \dots, n$, e indique justificando se f tem ou não um extremo local no ponto a :

a) $p_{4,0}(x) = 1 + x^4$, ($n = 4, a = 0$),

b) $p_{4,-1}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + x^3$, ($n = 4, a = -1$),

c) $p_{5,0}(x) = x^3 - x^5$, ($n = 5, a = 0$)

d) $p_{5,1}(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$, ($n = 5, a = 1$).

4. Verifique que a função $f(x) = \frac{x}{2} \sin x + \cos x$ tem um ponto crítico na origem e classifique-o. Escreva o polinómio de Taylor de grau 4 de f em $a = 0$.

5. Sejam f uma função 3 vezes diferenciável e g definida por $g(x) = f(e^x)$. Dado que o polinómio de Taylor de ordem 2 de f relativo ao ponto 1 é $3 - x + 2(x - 1)^2$, determine o polinómio de Taylor de ordem 2 em $a = 0$ de g .

6. a) Determine a fórmula de Taylor de ordem 2, com resto de Lagrange, relativa aos pontos $a = 0$ e $a = 1$, das funções seguintes:

$$e^{2x}, \quad \ln(1+x), \quad \cos(\pi x), \quad \sqrt{x+1},$$

b) Para $a = 0$, determine estimativas para o erro cometido ao aproximar a função dada pelo polinómio de Taylor obtido no intervalo $]0, 1/2[$.

7. Prove, usando a fórmula de Taylor em $a = 0$ com resto de Lagrange, que se tem

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{6}, \quad \text{para } x \in [0, 1].$$

8. Prove, recorrendo à fórmula de Taylor, que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifica a condição

$$f^{(n)}(x) = 0, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}$$

então f é um polinómio em x de grau menor do que n .

9. Determine uma primitiva (imediata) de cada uma das funções:

a) $2x^2 + 3x^3$,	d) $\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}}{x}$,	g) 2^{x-1} ,	k) $\frac{2}{\sin^2 x}$,
b) $(x^2 + 1)^3$,	e) $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$,	h) e^{1-x} ,	l) $\frac{4}{1+4x^2}$,
c) $\frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}$,	f) e^{x+3} ,	i) $\frac{1}{2x+1}$,	m) $\operatorname{tg}^2 x$.
		j) $\frac{1}{\cos^2 x}$,	

10. Determine uma primitiva de cada uma das funções (escrevendo-as na forma $f(u(x))u'(x)$):

a) $\frac{e^x}{1+2e^x}$,	d) $e^x e^{e^x}$,	h) $2x\sqrt{x^2-1}$,	l) $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$,
b) $\frac{\cos x}{1+\sin x}$,	e) $\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$,	i) $\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$,	m) $\frac{\operatorname{sh} x}{2+\operatorname{ch} x}$,
c) $\frac{e^{1/x}}{x^2}$,	f) $x \cos(x^2+2)$,	j) $\frac{x^3}{(1+x^4)^2}$,	n) $\frac{x}{(1+x^2)^\alpha}$.
	g) $x^2\sqrt[3]{1+x^3}$,	k) $\cos x \sqrt{\sin x}$,	

11. Determine uma primitiva de cada uma das funções:

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{x}{2}}$,	g) $\frac{1}{(x+1)^2}$,	l) $\frac{x}{1+x^4}$,	r) $\frac{e^x}{e^{2x}+4}$,
b) $3\sin x + 2x^2$,	h) $\frac{x}{1+x^2}$,	m) $\frac{\cos(\ln x)}{x}$,	s) $\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$,
c) $\frac{x^2}{1+x^3}$,	i) $\frac{1}{2+x^2}$,	n) $\cotg x$,	
d) xe^{-x^2} ,	j) $\frac{x^3}{x^8+1}$,	o) $3^{\sin^2 x} \sin 2x$,	t) $\frac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$,
e) $x\sqrt{1+x^2}$,	k) $\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$,	p) $\frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,	u) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$.
f) $e^{2\sin x} \cos x$,		q) $\frac{1}{1+3x^2}$,	

12. Para cada uma das funções definidas pelas expressões

$$x \sin(x^2), \quad \frac{e^x}{2+e^x}, \quad \frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg}^2 x)}$$

determine se possível:

- a) uma primitiva que se anule no ponto $x = 0$;
- b) uma primitiva que tenda para 0 quando $x \rightarrow +\infty$.

13. Determine uma função F definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ que obedece às seguintes condições:

$$F'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad F(2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 10.$$