Cálculo Diferencial e Integral I - 2º Sem. 2019/20

FICHA 2

Método de Indução Matemática. Somatórios. Axioma do Supremo.

AULA PRÁTICA

1. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. [1]

   b) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   c) $2^{2n}+2$ é divisível por 3, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

2. Seja $P(n)$ a condição "n^2+3n+1 é par", $n \in \mathbb{N}$.

   a) Mostre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   b) Pode concluir que n^2+3n+1 é par, para qualquer $n \in \mathbb{N}$?

   c) Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, n^2+3n+1 é ímpar.

3. Mostre[2] que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

   pelos seguintes dois métodos distintos:

   a) usando indução matemática.

   b) aplicando as propriedades do somatório a $(1-r)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k$.

4. Use indução matemática para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^k = n2^{n+1}$.

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!}$.

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

   d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-2)3^{k-1}}{(k+1)!} = 1-\frac{3^n}{(n+1)!}$.

5. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $3^n \geq 2n+1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   b) $n! \leq n^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$.

---

[1] Esta expressão pode ser escrita na forma de somatório como $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

[2] Esta é a vossa conhecida *fórmula da soma dos termos de uma progressã o geométrica de razão r*.

6. Prove por indução matemática que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R}$,
$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$
(Sugestão: use a Desigualdade Triangular $|a+b| \leq |a| + |b|$.)

7. Para cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$, determine, ou justifique que não existe em $\mathbb{R}$, os respectivos supremo, infimo, máximo e mínimo:

   a) $A = \{-2\} \cup \ [0,1[$;
   b) $B = [3, +\infty[$
   c) $C =]-\infty, \sqrt{2}]$
   d) $D = \{1 + 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$
   e) $A \cup D$
   f) $B \setminus \mathbb{Q}$
   g) $C \cap \mathbb{Q}$
   h) $(A \cup B) \setminus \mathbb{Q}$.

8. Considere os conjuntos
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \, : \, \frac{1}{\ln x} \geq 1\right\}, \qquad B = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} \, : \, n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Para cada um dos conjuntos A e B, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

9. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2}{|x| - 1} \leq 0\right\}, \quad B = \{2^{n/2} \, : \, n \in \mathbb{N}\}.$$

   a) Mostre que $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\, \cup \, \left]1, \sqrt{2}\right]$.
   b) Determine ou justifique que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos $A \cap \mathbb{Q}$, B e $B \cap \mathbb{Q}$.

10. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

    a) Prove que, se $\sup A < \inf B$, A e B são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$.
    b) Mostre, por meio de exemplos, que se for $\sup A > \inf B \ \wedge \ \sup B > \inf A$, A e B podem ser ou não disjuntos.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
   b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
   c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

d) $n! \geq 2^{n-1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

e) $2n-3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$.

*f) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

g) $7^n + 2$ é divisível por 3 para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Demonstre a *desigualdade de Bernoulli*: dado $a > -1$ tem-se, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

3. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:

a) usando indução matemática.

b) observando que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ e usando as propriedades do somatório.

4. Use indução matemática para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(3k-1) = n^2(n+1)$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+2) = \frac{(n-1)n(n+4)}{3}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-2)^2}{2^k} = 2 - \frac{n^2+2}{2^n}$.

5. Demonstre por indução as seguintes propriedades do somatório:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propriedade aditiva);

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (c\, a_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$ (homogeneidade);

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (propriedade telescópica).

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=p+1}^{p+n} a_{k-p}$ para qualquer $p \in \mathbb{N}$.

6. Utilizando os resultados do Exercício 1 (Aula Prática e Suplementares) e as propriedades anteriores do somatório, calcule as somas seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{18} (k+1)$; b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} (2k-1)^2$; c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} (k-3)^3$;

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$; e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\left(3^k-3^{k+2}\right)$.

7. Dados inteiros $0 \le k \le n$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ (às vezes também representado por C_k^n) é definido por
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

a) Mostre que:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{e} \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad 1 \le k \le n.$$ [3]

*b) Prove por indução matemática a *fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton*:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\,, \text{ para quaisquer } a,b \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

c) Use a fórmula anterior para estabelecer as igualdades
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0\,, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

8. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \ge \frac{x}{2} + 2\right\}, \qquad B = [-3,4], \qquad C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

a) Mostre que $A \cap B = \left[-3, -\frac{4}{3}\right] \cup \{4\}$.

b) Indique, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min(A\cap B)$, $\max(A\cap B)$, $\inf(A\cap B\cap C)$, $\sup(A\cap B\cap C)$ e $\min(A\cap B\cap C)$.

9. Considere os conjuntos A e B definidos por
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x-1}{x\ln x} > 0\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Mostre que o conjunto A é igual a $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos A e $A \cup B$.

10. Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por
$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \le x^2 - 1\}, \qquad B = [-2,2].$$

a) Determine A sob a forma de reunião de intervalos.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o máximo e o mínimo de $A \cap B$ e o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $(A \cap B) \setminus \mathbb{Q}$.

[3] Esta fórmula é a chamada *lei do triângulo de Pascal*, permitindo o cálculo rápido dos sucessivos coeficientes binomiais.

11. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| \leq 2x + 1\right\}, \qquad B = \mathbb{Q}, \qquad C = \left\{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}\right\}.$$

   a) Mostre que $A = \left[-1 + \sqrt{2}, 3\right]$.

   b) Determine, se existirem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $A \cap B$, C.

12. Sendo U e V dois subconjuntos majorados e não vazios de $\mathbb{R}$, tais que $\sup U < \sup V$, justifique as afirmações seguintes:

   a) Se $x \in U$, então $x < \sup V$.

   b) Existe pelo menos um $y \in V$ tal que $y > \sup U$.

13. Para $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, definimos $-A = \{-x : x \in A\}$. Justifique que A é minorado se e só se $-A$ é majorado e nesse caso temos $\inf A = -\sup(-A)$.

14. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto majorado e $s = \sup A$. Mostre que se existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $(V_{\varepsilon_0}(s) \setminus \{s\}) \cap A = \emptyset$, então A tem máximo.

*15. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, limitados e não-vazios, tais que $\sup A = \inf B$. Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $|a - b| < \varepsilon$.