FICHA 7 - SOLUÇÕES

AULA PRÁTICA

1. a) $\left((e^{2x} + \operatorname{arcsen}(2x))^8\right)' = 16(e^{2x} + \operatorname{arcsen}(2x))^7(e^{2x} + \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}})$.

   b) $\left(\operatorname{arctg}(x^4) - (\operatorname{arctg} x)^4\right)' = \frac{4x^3}{1+x^8} - \frac{4\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}$.

   c) $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$, para $x \in \mathbb{R}^+$.

   d) $\left(\arccos\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, para $x > 1$ ou $x < -1$.

   e) $(\cos(\operatorname{arcsen} x))' = \frac{-\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

   f) $(\ln(\arccos(1/\sqrt{x})))' = \dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos(1/\sqrt{x})}$,

2. a) A função g é diferenciável em $\mathbb{R}$ e f é diferenciável em $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. Logo, pelo teorema de derivação da função composta, h é diferenciável em $\mathbb{R}$, em particular no ponto $x = 1$, e $h'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(4).3 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ (calcule $f'(x)$!).

   b) h é injectiva em $\mathbb{R}$ porque é a composta de duas funções injectivas. Pelo teorema da derivação da função inversa, $(h^{-1})'(\ln 3) = \frac{1}{h'(1)} = 4$.

3. Do Teo. Valor Intermédio: p tem pelo menos 2 zeros em $\mathbb{R}^+$, já que $p(0) > 0$, $p(1) < 0$, $p(2) > 0$ e p contínua. Como é par, tem pelo menos 4 zeros em $\mathbb{R}$.

   Como p é diferenciável e $p'(x) = 6x^5 - 16x^3 = 2x^3(3x^2 - 4)$ tem 3 zeros, do Teo. Rolle p poderá ter, no máximo, 4 zeros. Logo p tem exactamente 4 zeros.

4. Note-se primeiro que o gráfico de f cruza a recta $y = x$ em três pontos $\Leftrightarrow$ a equação $f(x) = x$ tem três soluções. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Então, g tem três zeros. Logo, do Teorema de Rolle, g' tem pelo menos dois zeros e g'' tem pelo menos um zero. Mas observando que $g''(x) = f''(x)$. conclui-se que f'' tem pelo menos um zero.

5. Teorema de Lagrange a $\operatorname{sen} x$ e a $\operatorname{tg} x$ em $[0, x]$.

6. a) $|x^2 - 5x + 6|$: crescente em $\left[2, \frac{5}{2}\right]$ e em $[3, +\infty[$, decrescente em $]-\infty, 2]$ e em $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$, pontos de mínimo em 2, 3, absolutos uma vez que $|x^2 - 5x + 6| > 0$, para $x \neq 2, 3$, e ponto de máximo em $\frac{5}{2}$, local uma vez que $\lim_{x\to\pm\infty} |x^2 - 5x + 6| = +\infty$. (Nota: $|x^2 - 5x + 6|$ não é diferenciável em 2 e 3.)

   b) $\frac{e^x}{x}$: crescente em $[1, +\infty[$, decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 1]$, ponto de mínimo em 1, relativo uma vez que $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$.

   c) $\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$: crescente em $]-\infty, 1]$, decrescente em $[1, +\infty[$, ponto de máximo em 1, que é absoluto.

7. a) Teorema de Lagrange em $[n, n+1]$ e definição de limite com sucessões.

   b) Será $L = 0$: Teorema de Lagrange em $[n, n+1]$, como acima. Neste caso, como existe limite, será $L = \lim f'(c_n) = 0$.

8. a) Aplicando o Teorema de Lagrange a f no intervalo $[x, x+1]$, temos $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$, em que $x < c_x < x+1$. Fazendo $x \to +\infty$, temos $c_x \to +\infty$, logo dado que $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ existe,
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(c_x) = \lim_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = b - b = 0.$$
   b) Aplicar a) à função $f(x) = h(x) - mx$.

9. a) $\ln 2$; b) $+\infty$; c) 0; d) $-\infty$; e)0; f) 0; g) a^2/b^2; h) 0; i) 0; j) 1/2; k) 1.

10. a) $1/e$; b) 1; c) 1; d) e^3; e) 1; f) -1.

11. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = e^0 = 1$ (é uma indeterminação do tipo 0^0 - transforme numa exponencial e use a Regra de Cauchy). Pela definição de limite segundo Heine, como $\frac{1}{n} \to 0$, temos agora
$$\lim \sqrt[n]{\operatorname{sen}\frac{1}{n}} = \lim\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = 1.$$

SUPLEMENTARES

1. a) $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$, para $x \in \mathbb{R}^+$.

   b) $\left(\arccos\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, para $x > 1$ ou $x < -1$.

   c) $((\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x})' = (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x}\left(\frac{\ln \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)}\right)$.

2. Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e arctg também, $(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))' = \frac{1}{1+f^2(x)} f'(x) + f'(\operatorname{arctg} x)\frac{1}{1+x^2}$.

3. a) arcsen é diferenciável em $]-1,1[$ e g é diferenciável em $\mathbb{R}$, logo em $]-1,1[$, f é dada pela composição de funções diferenciáveis e é assim diferenciável e $f'(x) = g'(\operatorname{arcsen} x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = g'(0)\cdot 1 = \frac{1}{2}$.

   b) Como g é estritamente monótona e arcsen é injectiva, temos que f também será injectiva. Pelo Teorema de derivação da função inversa, $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(0)} = 2$.

4. b) Da Ficha 5, $\operatorname{argsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ e $\operatorname{argch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$: derive e compare.

5. Não contraria o Teorema de Rolle dado que f não é diferenciável em todos os pontos de $]-1,1[$ (não é diferenciável em 0).

6. Seja $f(x) = 3x^2 - e^x$. Então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Para concluir que f tem, pelo menos três zeros, aplique três vezes o Teorema do Valor Intermédio (ou de Bolzano) depois de observar que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 3-e > 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Para deduzir que não pode ter mais do que três, calculamos $f'''(x) = 6 - e^x$, cuja injectividade permite-nos concluir que f'' não tem mais do que um zero e, por conseguinte, pelo Teorema de Rolle f terá no máximo três zeros.

7. Sendo $a < 0$, 0, $b > 0$ as três soluções da equação $f(x) = x^2$, por aplicação do Teorema de Lagrange a $f(x)$ nos intervalos $[a, 0]$ e $[0, b]$, conclui-se da existência de $c_1 < 0$ e $c_2 > 0$ tais que $f'(c_1) = f(a)/a = a < 0$ e $f'(c_2) = f(b)/b = b > 0$. Como por hipótese, f' é contínua, usando o Teorema do Valor Intermédio, conclui-se que existe $d \in]c_1, c_2[$, tal que $f'(d) = 0$.

8. a) Teorema de Lagrange a $\ln x$ em $[1, x]$.

   b) Teorema de Lagrange a e^x em $[0, x]$, se $x > 0$, ou $[x, 0]$, se $x < 0$.

9. a) $\frac{x}{x^2+1}$: (estritamente) crescente[20] em $[-1, 1]$, (estritamente) decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$, ponto de mínimo em -1, ponto de máximo em 1, que são absolutos uma vez que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$, $f(-1) = -1/2$ e $f(1) = 1/2$;

   b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$: crescente em $[-2, 0[$, decrescente em $]-\infty, -2]$ e em $]0, +\infty[$, ponto de mínimo em -2, que é absoluto, uma vez que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ e $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$.

   c) $x \ln x$: crescente em $[e^{-1}, +\infty[$, decrescente $]0, e^{-1}]$, ponto de mínimo em e^{-1}, absoluto.

   d) e^{-x^2}: crescente em $]-\infty, 0]$, decrescente em $[0, +\infty[$, ponto de máximo em 0, absoluto.

   e) xe^{-x}: crescente em $]-\infty, 1]$, decrescente em $[1, +\infty[$, ponto de máximo em 1 que é absoluto.

10. a) Teorema de Lagrange em $[x, x + 2]$ e definição de limite.

    b) Não, por exemplo $f(x) = \ln x$ (o T. Lagrange só garante que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$).

11. Note que $g'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow xf'(x) \geq f(x)$; aplique o Teorema de Lagrange a f em $[0, x]$

12. a) 0; b) $\ln 2$; c) 1; d) 1; e) 0; f) $\dfrac{1}{3}$; g) $+\infty$; h) 0; i) 0 ; j) $1/2$; k) -1; l) 0; m) $+\infty$; n) 0; o) 1.

13. a) Aplicar a Regra de Cauchy para $p = 1$, e para calcular
    $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(p + 1)x^p}{e^x} = (p + 1) \cdot 0 = 0$, por hipótese de indução.

    b) como a)

    c) como a), notando que $\lim_{x\to 0^+} x (\ln x)^p = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)^p}{x^{-1}}$.

14. a) 1; b) 1; c) 1; d) 1; e) $\sqrt{e}$; f) e^{-1}; g) e; h) 1; i) 1; j) e^2; k) 1; l) 1; m) 1; n) e^2; o) 1.

[20] Neste e noutros esboços de solução dos exercícios aplica-se, geralmente sem explicações adicionais, o seguinte raciocínio muito útil: se f é uma função diferenciável num intervalo aberto, com derivada positiva (resp. negativa), e contínua no respectivo intervalo fechado então f é estritamente crescente (resp. decrescente) no intervalo fechado. Além disso o advérbio *estritamente* será omitido pois do contexto tal é geralmente óbvio.