FICHA 6 - SOLUÇÕES

AULA PRÁTICA

1. a) Sendo $f(x) = \operatorname{sen} x - x^2 + 1$, temos: f é contínua em $\mathbb{R}$ e $f(0) = 1$, $f(\pi) = f(-\pi) = -\pi^2 + 1 < 0$, logo, do Teorema de Bolzano, existem $c_1 \in]-\pi, 0[$ e $c_2 \in]0, \pi[$ com $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

   b) Seja $p \in \mathbb{N}$ ímpar e $f(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} \cdots + a_1 x + a_0$, contínua em $\mathbb{R}$. Podemos assumir que $a_p > 0$ (senão consideramos $-f$). Temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_p x^p \left(1 + a_{p-1}\frac{1}{x} \cdots + a_1 \frac{1}{x^{p-1}} + a_0 \frac{1}{x^p}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_p x^p = \pm\infty.$$

   Tem-se então que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, existem a, b com $f(a) < \alpha < f(b)$ (justifique) logo do Teorema de Bolzano, segue-se que existe c tal que $f(c) = \alpha$.

2. Note-se que os pontos fixos de f correspondem aos zeros de $h(x) = f(x) - x$. Se $h(0) = 0$ ou $h(1) = 0$m então 0, resp., 1 são pontos fixos. Caso contrário: temos h contínua e $h(0) = f(0) => 0$, $h(1) = f(1) - 1 < 0$, logo do Teorema de Bolzano, h tem um zero em $]0, 1[$.

3. Se existisse, g não seria limitada, o que contraria o Teorema de Weierstrass.

4. Do Teorema de Weierstrass, como f é contínua, f tem mínimo M em $[0, b]$, e $M \le f(b)$. Como $f(x) > f(b)$ para $x \in]b, +\infty[$, temos $M = \min f$.

5. a) Ver que $D_\varphi = [-1, 1]$ e o resultado segue do Teorema de Weierstrass e da continuidade da função composta.

   b) Não.

6. Do Teorema de Weierstrass, como f é contínua, tem máximo M em qualquer intervalo $[0, b]$, $b > 0$, e $M \ge f(0) > 0$. Tomando b tal que para $x > b$, $f(x) \le f(0)$ (pela definição de limite - justifique), temos que $M = \max f$.

7. a) $f(x) = x|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, com derivada $f'(x) = 2x$, se $x > 0$, $f'(0) = 0$, $f'(x) = -2x$, se $x < 0$ (ou seja $f'(x) = 2|x|$).

   b) $f(x) = e^{x-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, com derivada $f'(x) = 0$, $x > 0$, $f'(x) = 2e^{2x}$, $x < 0$, não é diferenciável em 0 ($f'_e(0) = 2 \neq f'_d(0) = 0$).

8. f é contínua em 0 se e só se $a = 1$.

   f é diferenciável em 0 se e só se $b = 2$ (e $a = 1$).

   Neste caso, $f'(0) = 2$ e a tangente ao gráfico em $(0, f(0))$ é dada por $y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + 2x$.

   Se $a < 0$, f é diferenciável em a (função polinomial) e $f'(a) = 2$; tangente ao gráfico em $(a, f(a))$: $y = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + 2a + 2(x - a) = 1 + 2x$ (ou seja, é a própria recta).

   Se $a > 0$, f diferenciável em a (dada por soma e produtos de funções diferenciáveis) e $f'(a) = -\frac{2}{a^2}\operatorname{sen}^2 a + \frac{2}{a} 2 \operatorname{sen} a \cos a = \frac{2 \operatorname{sen} a}{a}\left(-\frac{\operatorname{sen} a}{a} + 2\cos a\right)$.

9. Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e sen também, temos $g'(x) = f'(\operatorname{sen} x)\cos x + \cos(f(x))f'(x)$ - substitua x por 0 e por π.

10. a) $(\ln \operatorname{sen} x)' = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x$,

    b) $\left(e^{\sqrt{x^2-1}}\right)' = e^{\sqrt{x^2-1}}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

    c) $\left(\operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)\right)' = 4\operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x) - 3\operatorname{sen}^5(x)\cos^2(x)$.

    d) $\left((1+\operatorname{tg}\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1+\operatorname{tg}\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}$,

    e) $(\operatorname{ch}(\cos x))' = -\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sh}\cos x$,

    f) $((\operatorname{sen} x)^x)' = (e^{x\ln\operatorname{sen} x})' = (\ln\operatorname{sen} x + \frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x})e^{x\ln\operatorname{sen} x} = (\ln\operatorname{sen} x + \frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x})(\operatorname{sen} x)^x$.

11. a) $f'(x)f'(f(x))$; b) $\operatorname{sen}(2x)(f'(\operatorname{sen}^2(x)) - f'(\cos^2(x))$;

SUPLEMENTARES

1. a) Sendo $f(x) = e^x + \cos^3(\pi x)$, temos que f é contínua em $\mathbb{R}$ e $f(-1) < 0$, $f(1) > 0$, logo f tem um zero em $]-1,1[$, do Teorema de Bolzano.

   b) Sendo $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x - \dfrac{1}{2}$, temos que f é contínua e $f(0) < 0$, $f(\pi/2) > 0$, logo, do Teorema de Bolzano, existe $c \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ tal que $f(c) = 0$. Como f é periódica, terá infinitos zeros em $\mathbb{R}$.

2. Aplicar o teorema do Valor Intermédio num intervalo $[a,b]$, com a,b tais que $\alpha - \epsilon < f(a) < \alpha + \epsilon < \beta - \epsilon < f(b) < \beta + \epsilon$ (existem para qualquer $\varepsilon > 0$, pela definição de limite - justificar). Temos $]\alpha+\epsilon, \beta-\epsilon[\subset CD_f$, para qualquer $\epsilon > 0$, logo $]\alpha,\beta[\subset CD_f$.

3. Sendo $h(x) = f(x) - x$, temos também $\lim_{x\to -1^+} h(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 1^-} h(x) = +\infty$. Logo, da definição de limite (justificar) podemos tomar $a < b$ tal que $h(a) < 0$ e $h(b) > 0$. Do Teorema de Bolzano, h tem um zero em $]a,b[$, que é ponto fixo de f.

4. a) Do Teorema de Weierstrass, como f é contínua, f tem máximo M em $[0,a]$, e $M \geq f(a)$. Como $f(x) < f(a)$ para $x \in]-\infty, a[$, temos $M = \max f$.

   b) Se existe $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, podemos tomar $R > 0$ tal que $L - 1 < f(x) < L + 1$, para $x > R$ (da definição de limite), e f é limitada em $]R, +\infty[$. Do Teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo em $[0,R]$, logo é limitada também em $[0,R]$, e assim em $\mathbb{R}$.

5. a) Teorema de Bolzano em $[a,0]$, em que $a < 0$ tal que $f(a) > 0$ (existe porque o limite em $-\infty$ é positivo), e em $[0,b]$, em que $f(b) > 0$ (existe porque o limite em $+\infty$ é positivo).

   b) Teorema de Weierstrass em $[a,b]$ tais que $a < 0$ e $b > 0$ e se $x \leq a$ ou $x \geq b$, então $f(x) \geq R > 0$. O mínimo em $[a,b]$ será mínimo em $\mathbb{R}$ (justifique).

6. Aplicar Teorema de Weierstrass em $[a,b]$ tal que $-1 < a < 0 < b < 1$ e $f(x) > f(0)$, para $x \in]-1,a[$ e em $]b,1[$. O mínimo de f em $[a,b]$ será mínimo em $]-1,1[$ (justifique).

7. a) $\left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$,

   b) $\left(\frac{2x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{2(x+1)^2-4x(x+1)}{(x+1)^4}$, $x \neq -1$,

   c) $\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$, $x \in \mathbb{R}^+$,

   d) $\left(x^{\frac{3}{2}}e^x\right)' = x^{\frac{1}{2}}e^x(\frac{3}{2}+x)$, $x \in \mathbb{R}_0^+$,

   e) $(x^2 2^x)' = x2^x(2+(\ln 2)x)$, $x \in \mathbb{R}$,

   f) $(\operatorname{tg} x - x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

   g) $\left(\frac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right)' = 1 + \frac{\cos x(x+\cos x)}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

   h) $(\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x)' = (\operatorname{sen}^2 x)' = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,

   i) $\left(\frac{1}{1+\operatorname{cotg}(x)}\right)' = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x(1+\operatorname{cotg}(x))^2}$, $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq k\pi$,

   j) $\left(x^2(1+\ln x)\right)' = 3x + 2x\ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$,

   k) $(\operatorname{senh}(x)\cosh(x))' = \cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

8. a) $f(x) = e^{-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, com derivada $f'(x) = -e^{-x}$, $x > 0$, $f'(x) = e^x$, $x < 0$, não é diferenciável em 0 ($f_e'(0) = 1 \neq f_d'(0) = -1$).

   b) $f(x) = \ln|x|$ é diferenciável no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com derivada $f'(x) = 1/|x|$.

9. $f_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0$;

   $f_e'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1$.

   (Nota: Logo f é contínua mas não diferenciável em 0.)

10. a) f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (produto de duas funções diferenciáveis, uma polinomial, outra dada pela composição de funções diferenciáveis). Para $x \neq 0$: $f'(x) = 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

    b) $y = f(\frac{2}{\pi}) + f'(\frac{2}{\pi})(x - \frac{2}{\pi}) = \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{\pi}(x - \frac{2}{\pi})$.

    c) $f'(0) = 0$, pelo cálculo directo do limite que define a derivada de f em 0.
    Não existe $\lim_{x\to 0} f'(x)$ porque não existe $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (e uma vez que $\lim_{x\to 0} 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (justifique)).

11. a) $\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)' = x^2(1+x^3)^{-\frac{2}{3}}$,

    b) $$\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

    c) $$(\ln\ln x)' = \frac{1}{x\ln x}.$$

    d) $$\left(\ln(1+e^{x^2})\right)' = \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}},$$

e) $\left(e^{\ln^2 x}\right)' = \dfrac{2e^{\ln^2 x}}{x}\ln x$, para $x > 0$,

f) $\left(x2^{x^2}\right)' = 2^{x^2}(1 + 2x^2)$.

g) $\left(\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}\right)' = \dfrac{\cos(\operatorname{sen} x)\cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

h) $\left(\cos^2(\sqrt{x})\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}(2\sqrt{x})$,

i) $(\operatorname{tg}(e^{\operatorname{sen} x}))' = (1 + \operatorname{tg}^2(e^{\operatorname{sen} x}))(e^{\operatorname{sen} x})' = (1 + \operatorname{tg}^2(e^{\operatorname{sen} x}))(e^{\operatorname{sen} x})\cos x$.

j) $\left(\sqrt{1 + \operatorname{sh}^4 x}\right)' = \dfrac{2\operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^4 x}}$.

k) $((\ln x)^x)' = \left(e^{\ln((\ln x)^x)}\right)' = \left(e^{x\ln(\ln x)}\right)' = (\ln x)^x\left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)$,

l) $\left(x^{\operatorname{sen} 2x}\right)' = \left(e^{\operatorname{sen} 2x \ln x}\right)' = x^{\operatorname{sen} 2x}\left(2\cos 2x \ln x + \frac{sen2x}{x}\right)$.

12. a) $2xf'(x^2)$; b) $f'(x)f'(f(x))\, f'(f \circ f)(x)$.