TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I - 2º Sem. 2019/20

FICHA 5

Limite de funções em $\mathbb{R}$. Continuidade. Prolongamento por continuidade.

AULA PRÁTICA

1. Determine, ou justifique que não existem, os limites quando $x \to 0$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das funções definidas por:

   a) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, b) $x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

   Verifique se cada uma das funções acima é par ou ímpar e esboce o seu gráfico.

2. Calcule os limites quando $x \to 0^+$, $x \to 0^-$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das seguintes funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

   a) $\operatorname{sh}(1/x)$, b) $\operatorname{ch}(1/x^2)$.

3. Suponha que para todo o $n \in \mathbb{N}$, a função f verifica a condição

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{n}\right).$$

   Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$ quanto valerá a sua soma? Se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$ qual será o seu valor? Justifique abreviadamente as respostas.

4. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite.

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$,

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$, e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{2x}$, h) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1+\arccos x)}{\arccos x}$,

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x}-1}{\operatorname{sen} x}$, i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(1+\sqrt{x})}{e^{x-\sqrt{x}}}$.

5. Para cada uma das funções definidas pelas expressões seguintes, determine o seu domínio e analise a sua continuidade:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$; b) $\operatorname{sen}\left(\cos\sqrt{1-x^2}\right)$; c) $\dfrac{|x^2-1|}{x^2-1}$;

6. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 1, em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$? Justifique.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \le -1, \\ \operatorname{arcsen} x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ K \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right), & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

a) Determine K.

b) Estude f do ponto de vista da continuidade.

c) Indique o contradomínio de f e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.

d) Quais são os limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, caso existam?

8. Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{|x+1|}.$$

Verique que g é prolongável por continuidade ao ponto -1. Sendo $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, determine o contradomínio de G.

9. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right), & \text{se } x > 0, \\ (k-x)(x+1), & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determine a constante $k \in \mathbb{R}$ tal que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c) Sendo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, determine justificando, o contradomínio de F.

10. Sendo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que se existir uma sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$, convergente, tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então existe $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$.

11. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = xd(x),$$

em que $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função de Dirichlet (i.e, $d(x) = 1$, se $x \in \mathbb{Q}$ e $d(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) é contínua em $x = 0$ e é descontínua em todos os outros pontos.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Mostre, recorrendo à definição de limite segundo Cauchy, que para as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 4x - 1$ e $g(x) = x^2 + 1$ se tem $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$. [12]

2. Use a definição de limite de função em $\overline{\mathbb{R}}$ segundo Cauchy para mostrar que

[12] Ou seja, f e g são contínuas em qualquer $a \in \mathbb{R}$.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, b) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, c) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$.

3. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}$,

b) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$, d) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$. f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$,

4. Calcule os limites quando $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$ das funções definidas pelas seguintes expressões.

a) $e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$, c) $e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$, e) $\ln\left(\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)$,

b) $e^{\frac{1-x}{\sqrt{x}}}$, d) $\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$, f) $\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\right)$.

5. Calcule os limites quando $x \to 0^+$, $x \to 0^-$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das seguintes funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) $e^{1/x}$, c) $\operatorname{ch}(1/x)$, d) e^{1/x^2}, e) $\operatorname{sh}(1/x^2)$.

6. Calcule os limites quando $x \to 0$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das funções definidas pelas seguintes expressões.

a) $\cos\left(\frac{x-\pi}{x^2+2}\right)$, b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4x-1}\right)$, c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$, d) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$.

7. Determine, ou justifique que não existem, os limites quando $x \to 0$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das funções definidas por:

a) $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, b) $x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

8. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(2x+1)}$,

b) $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)+\ln(x)}{x-1}$,

c) $\lim_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{\sqrt{x}}$,

d) $\lim_{x\to 0} \left[x^2(1-\cos\frac{1}{x})\right]$,

e) $\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$,

f) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$,

g) $\lim_{x\to 1} \frac{e^{(x-1)^5}-1}{(x-1)^7}$,

h) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{cotg} x)}{\cos x}$,

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x \arccos x}$,

j) $\lim_{x\to+\infty} e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right)$.

*9. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica, não constante, de período $T > 0$, então não existem $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(Sug. considere $x, y \in \mathbb{R}$ com $f(x) \neq f(y)$ e sucessões $x_n = x + nT$ e $y_n = y + nT$.)

10. Para cada uma das funções definidas pelas expressões seguintes, determine o seu domínio e analise a sua continuidade:

a) $\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2 + x}$; b) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$; c) $\sqrt{\ln x}$.

11. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0, \\ 1 + e^{1-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Mostre que φ é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Calcule os limites laterais de φ no ponto 0, e indique, justificando, se φ é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda nesse ponto [13].

c) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$.

d) Indique, justificando, o contradomínio de φ.

12. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left((x-1)^2\right)}{k(x-1)^2} & \text{se } x < 1, \\ \dfrac{\ln x}{x^2 - 1} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

em que $k \in \mathbb{R}$. Determine k por forma a que f seja prolongável por continuidade ao ponto 1. Sendo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, indique $F(1)$.

13. Considere as funções f e g definidas em $]0, +\infty[$ pelas expressões

$$f(x) = \ln\left(\ln(1 + x)\right), \qquad g(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}.$$

a) Estude f e g quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Indique, justificando, se cada uma das funções é prolongável por continuidade ao ponto 0.

d) Indique, justificando, o contradomínio de f.

14. a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pelas fórmulas:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad \psi(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

[13] Por definição, uma função é contínua à esquerda (direita) num ponto a do seu domínio D, sse a sua restrição a $]-\infty, a] \cap D$ ($[a, +\infty[\cap D$) é contínua em a.

b) Indique, justificando, se cada uma das funções φ e ψ é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c) Mostre que φ e ψ são funções limitadas.

* 15. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}\, d(x)$, onde $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ designa a função de Dirichlet ($d(x) = 1$, $x \in \mathbb{Q}$ e $d(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

a) Indique o contradomínio de f. A função é majorada? E minorada?

b) Estude $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Para cada $a \in \mathbb{R}$, determine, ou justifique que não existe, $\lim_{x\to a} f(x)$. Em que pontos é f contínua?