

FICHA 4

Indeterminações. Escala de sucessões. Revisão: funções elementares em \mathbb{R} .

AULA PRÁTICA

1. Determine, se existir, o limite em $\overline{\mathbb{R}}$, de cada uma das sucessões que têm por termo geral:

a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

d) $\frac{2^{2n} + 2^{-n}}{\sqrt{n} + 3^n}$

g) $\frac{4^n + n^4}{(2n+1)^4 + 2^{2n+1}}$

b) $4^n - n! - n^4$

e) $\frac{n^n}{n! + n^4 + 2}$

h) $\frac{2n^2 \cdot n! + n + 1}{(n+2)! + n^2}$

c) $\frac{(2n)!}{n!}$

f) $\frac{n^3 + (-3)^n}{n^6 + 2}$

i) $\left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$

2. Decida sobre a existência dos seguintes limites em \mathbb{R} e $\overline{\mathbb{R}}$, calculando os seus valores nos casos de existência:

a) $\lim \frac{(2n)!}{(2n)^n}$,

b) $\lim \frac{2^n n!}{n^n}$,

(Sugestão: para calcular $\lim u_n$, comece por estudar a convergência de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.)

3. Considere as funções

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad p(x) = x^2, \quad q(x) = 2x + 1.$$

Escreva cada uma das seguintes funções como composição de f , g , p e q :

a) $\sqrt[3]{x^2}$,

d) $2x^2 + 1$,

g) $\sqrt{2\sqrt{x} + 1}$,

b) $\sqrt{2x + 1}$,

e) $\sqrt[4]{x}$,

h) $|x|$,

c) $\sqrt[6]{x}$,

f) $2\sqrt[3]{x} + 1$,

i) $(2\sqrt[3]{x} + 1)^2$.

4. Determine o domínio⁸ das funções definidas pelas seguintes expressões:

a) $f(x) = \sqrt[4]{1 + \sqrt{x+1}}$,

c) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$,

e) $f(x) = \sqrt{3 \operatorname{arctg}(2x) - \pi}$.

b) $f(x) = \ln(\ln x)$,

d) $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x)$,

5. Identifique: $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$, $\operatorname{arcsen}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

6. Exprima as soluções da equação $\sin x = a$ em termos de $\operatorname{arcsen} a$. Faça o mesmo para a equação $\cos x = a$ em termos de $\arcsin a$ e para $\operatorname{tg} x = a$ em termos de $\operatorname{arctg} a$.

⁸definido aqui como o maior subconjunto de \mathbb{R} onde a expressão que define f faz sentido, ou seja, designa um número real.

7. Deduza as seguintes identidades, para $x \in [-1, 1]$,

$$\text{a) } \operatorname{sen}(\operatorname{arcos} x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{b) } \operatorname{tg}(\operatorname{arcos} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \text{ para } x \neq 0.$$

8. As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico definem-se da forma seguinte:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Deduza as igualdades (comparando-as com as correspondentes para as funções trigonométricas):

$$\text{a) } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \text{b) } \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

9. Mostre que se (u_n) é uma sucessão monótona, então $(\operatorname{arctg} u_n)$ é uma sucessão convergente (em \mathbb{R}).

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Prove, recorrendo à definição de limite em $\overline{\mathbb{R}}$ que

$$\text{a) } \sqrt[3]{1 - n} \rightarrow -\infty, \quad \text{b) } \sqrt[4]{4 + n^2} \rightarrow +\infty, \quad \text{c) } \frac{n^2 + 1}{n} \rightarrow +\infty.$$

2. Determine, se existir, o limite em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite da cada uma das sucessões que têm por termo geral:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } n - \frac{n^3 + 2}{n^2 + 3n} & \text{f) } \frac{n^n}{1000^n + n^{1000}} & \text{k) } \frac{2^{(n^2)}}{15^n} \\ \text{b) } n^{n+1} - n^n & \text{g) } \frac{4^n + n^4}{2^n + n!} & \text{l) } \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n} \\ \text{c) } 3^n - (2n)! & \text{h) } \frac{(2n)! + 2}{(3n)! + 3} & \text{m) } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \\ \text{d) } \frac{n^{1000}}{1.0001^n} & \text{i) } (n! - n^{1000})^n & \text{n) } \left(-1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ \text{e) } \frac{n!}{n^{1000}} & \text{j) } \left(\frac{1}{n}\right)^n & \end{array}$$

3. Decida sobre a existência dos seguintes limites em \mathbb{R} e $\overline{\mathbb{R}}$, calculando os seus valores nos casos de existência:

$$\text{a) } \lim \frac{(n!)^2}{(2n)! + 2}, \quad \text{b) } \lim \frac{3^n n!}{n^n}.$$

(Sugestão: para calcular $\lim u_n$, comece por estudar a convergência de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.)

4. Determine se as seguintes funções são limitadas/majoradas/minoradas, e monótonas (crescentes ou decrescentes), indicando, se for o caso, se são pares ou ímpares nos domínios dados, e esboce os seus gráficos:

- a) $\frac{1}{x} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$,
 b) $\frac{1}{1+|x|} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 c) $2^{-x} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$,
 d) $a^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$,
 e) $\sqrt[3]{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

5. Determine o domínio⁹ das funções definidas pelas seguintes expressões:

- a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$,
 b) $f(x) = \ln(1-x^{\frac{3}{2}})$,
 c) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$,
 d) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$,
 e) $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$,
 f) $f(x) = \ln(1 - \arccos x)$,

6. Determine funções inversas das seguintes funções, especificando os respectivos domínios e contradomínios:

- a) $f(x) = e^{x^2-2}$, $x > 0$,
 b) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
 c) $f(x) = \operatorname{tg}(x-1)$, $x \in \left]1 + \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{3\pi}{2}\right[$,
 d) $f(x) = \cos(2x)$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

7. Identifique: $\arccos 0$, $\arccos 1$, $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{arctg} 1$, $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{6}))$.

8. Resolva em \mathbb{R} as equações seguintes

- a) $\arccos(3x+1) = \frac{2\pi}{3}$,
 b) $1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(x^2-1) = \frac{1}{2}$,
 c) $\frac{\pi}{\operatorname{arcsen}(x^2 + \frac{1}{4})} = 6$.

9. Deduza as seguintes identidades:

- a) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$,
 b) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \neq \pm 1$,

10. As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico definem-se da forma seguinte:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

As funções inversas de sh em \mathbb{R} , e ch restrito a \mathbb{R}_0^+ , designam-se, respectivamente por $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\operatorname{argch} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Deduza

$$\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

⁹definido aqui como o maior subconjunto de \mathbb{R} onde a expressão que define f faz sentido.