FICHA 4 - SOLUÇÕES

AULA PRÁTICA

1. a) 0; b) $-\infty$; c) $\frac{(2n)!}{n!} = (n+1)(n+2)\dots(n+n) > n^n$. Como $\lim n^n = +\infty$, então $\lim \frac{(2n)!}{n!} = +\infty$; d) $+\infty$; e) $+\infty$; f) não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, sublimites $\pm\infty$; g) $1/2$; h) 2; i) $+\infty$.

2. a) $\lim \frac{(2n)!}{(2n)^n} = +\infty$, porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty > 1$, com $u_n = \frac{(2n)!}{(2n)^n}$ (verifique).

   b) $\lim \frac{2^n n!}{n^n} = 0$, porque porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1$, com $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ (verifique).

3. a) $g(p(x))$; b) $f(q(x))$; c) $f(g(x))$; d) $q(p(x))$; e) $f(f(x))$; f) $q(g(x))$; g) $f(q(f(x)))$; h) $f(p(x))$; i) $p(q(g(x)))$.

4. a) $[-1,+\infty[$; b) $]1,+\infty[$; c) $\mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$; d) $]-\infty,0]$; e) $[\sqrt{3}/2;+\infty[$.

5. [10] $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(3\pi/4)) = -\pi/4$.

6. $\operatorname{sen} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsen} a + 2k\pi \vee x = -\operatorname{arcsen} a + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

   $\cos x = a \Leftrightarrow x = \arccos a + 2k\pi \vee x = -\arccos a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

   $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. a) $\arccos x = \alpha$ se e só se $\cos\alpha = x$ e $\alpha \in [0,\pi]$. O resultado é obtido usando a igualdade $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$.

   b) Sai da anterior e da definição (ou directamente).

9. Note que arctg é uma função limitada.

SOLUÇÕES FICHA 4: SUPLEMENTARES

1. a) Dado $R > 0$ qualquer, se $n > 1 + R^3$ então $\sqrt[3]{1-n} < -R$;

   b) Dado $R > 0$ qualquer, se $R > \sqrt{2}$ então se $n > \sqrt{r^4 - 4}$ então $\sqrt[4]{4+n^2} > R$, se $R \le \sqrt{2}$, então $\sqrt[4]{4+n^2} > R$ verifica-se para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

2. a) 3; b) $\lim n^{n+1} - n^n = \lim n^n(n-1) = +\infty$; c) $\lim 3^n - (2n)! = \lim (2n)!\left(\frac{3^n}{(2n)!} - 1\right) = -\infty$; d) 0, já que $n^\alpha << a^n$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $a > 1$; e) $+\infty$, já que, para $p \in \mathbb{N}$, $n^p << n!$; f) $+\infty$, g) 0 já que pela escala de sucessões $a^n << n!$ e $n^p << a^n$, $a > 1$, $p \in \mathbb{N}$; h) 0; i) $\lim(n! - n^{1000})^n = \lim\left(\frac{n!}{n^{1000}} - 1\right)^n n^{1000n} = +\infty$; j) 0; k) $\lim \frac{2^{(n^2)}}{15^n} = \lim\left(\frac{2^n}{15}\right)^n = +\infty$. l) $e^{-1/2}$; m) $+\infty$.; n) não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, sublimites $\pm e$.

3. a) $\lim \frac{(n!)^2}{(2n)!+2} = 0$, porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1$, com $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!+2}$ (verifique).

   b) $\lim \frac{3^n n!}{n^n} = +\infty$, porque porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{e} > 1$, com $u_n = \frac{3^n n!}{n^n}$ (verifique).

4. a) $\dfrac{1}{x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$: é (estritamente) decrescente e minorada por 0, não é majorada;

[10] Note que por definição, $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

b) $\dfrac{1}{1+|x|}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: é limitada $0 < \frac{1}{1+|x|} \leq 1$, par, não monótona (estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$ e estritamente crescente em $\mathbb{R}^-$);

c) 2^{-x} : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$: estritamente decrescente, $0 < 2^{-x} < 1$ em $\mathbb{R}^+$;

d) a^x : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a > 0$: se $a \neq 1$ não majorada, minorada por 0, se $a > 1$ estritamente crescente, e se $a < 1$, estritamente decrescente, se $a = 1$ é constante (logo é crescente e decrescente);

e) $\sqrt[3]{x}$: estritamente crescente, ímpar, não majorada, não minorada.

5. a) $]-2,2[$; b) $[0,1[$; c) $\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, d) $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$; e) $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$; f) $]\cos 1, 1]$;

6. a) $f^{-1} : \left]e^{-2},+\infty\right[\to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \sqrt{\ln y + 2}$, com $CD_{f^{-1}} = D_f =]0,+\infty[$.
   b) $f^{-1} : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} \frac{y}{2}$, com $CD_{f^{-1}} = D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   c) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = 1 + \pi + \operatorname{arctg} y$, com $CD_{f^{-1}} = D_f = \left]1+\frac{\pi}{2}, 1+\frac{3\pi}{2}\right[$.
   d) $f^{-1} : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \pi - \frac{1}{2} \arccos y$, com $CD_{f^{-1}} = D_f = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

7. [11] $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos 1 = 0$, $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\arccos(\cos((-\frac{\pi}{6})) = \frac{\pi}{6}$.

8. a) $x = -\frac{1}{2}$; b) $x = \pm\sqrt{2}$; c) $x = \pm\frac{1}{2}$.

9. a) $\alpha = \operatorname{arcsen} x$ se e só se $\operatorname{sen} \alpha = x$ e $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. O resultado é obtido usando a igualdade $\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$.
   b) Sai da anterior e da definição (ou directamente).

10. Temos $\operatorname{argsh} x = y \Leftrightarrow e^y - e^{-y} - 2x = 0 \Leftrightarrow e^{2y} - 1 - 2xe^y = 0 \Leftrightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2}$. Como $e^y > 0$, o resultado sai. Para argch, é semelhante.

[11] Note que por definição, $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.