FICHA 2 - SOLUÇÕES

AULA PRÁTICA

1. c) Escreva $2^{2n+2} = (3+1)2^{2n}$, por exemplo.

2. a) Escreva $(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 = (n^2 + 3n + 1) + 2n + 4$.
   b) Não.
   c) Indução (neste caso $P(1)$ é verdadeira).

3. b) Usar homogeneidade e propriedade telescópica [4]

6. Repare que pela desigualdade Triangular
$$\left|\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| + |a_{n+1}|.$$

7. a) $\inf A = \min A = -2$, $\sup A = 1$, $\max A$ não existe;
   b) $\inf B = \min B = 3$, $\max B, \sup B$ não existem;
   c) $\inf C, \min C$ não existem, $\max C = \sup C = \sqrt{2}$;
   d) $\sup D = \max D = \frac{3}{2}$, $\inf D = 1$, $\min D$ não existe;
   e) $\inf A \cup D = \min A \cup D = -2$, $\sup A \cup D = \max A \cup D = \frac{3}{2}$;
   f) $\inf B \setminus \mathbb{Q} = 3$, $\min B \setminus \mathbb{Q}$, $\sup B \setminus \mathbb{Q}$, $\max B \setminus \mathbb{Q}$ não existem;
   g) $\inf C \cap \mathbb{Q}$, $\min C \cap \mathbb{Q}$ não existem, $\sup C \cap \mathbb{Q} = \sqrt{2}$, $\max C \cap \mathbb{Q}$ não existe;
   h) $\inf(A \cup B) \setminus \mathbb{Q} = 0$, $\min(A \cup B) \setminus \mathbb{Q}$, $\sup(A \cup B) \setminus \mathbb{Q}$, $\max(A \cup B) \setminus \mathbb{Q}$ não existem.

8. $A =]1, e]$: Majorantes de A: $[e, +\infty[$, Minorantes de A : $]-\infty, 1]$, $\sup A = e = \max A$, $\inf A = 1$, $\min A$ não existe, porque $1 \notin A$.
   $B = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$: Majorantes de B: $[2, +\infty[$, Minorantes de B : $]-\infty, \frac{1}{2}]$, $\sup B = \max B = 2$, $\inf B = \min B = \frac{1}{2}$.

9. b) $A \cap \mathbb{Q} = \left(]-\sqrt{2}, -1[\ \cup\ ]1, \sqrt{2}[\right) \cap \mathbb{Q}$. $\sup A \cap \mathbb{Q} = \sqrt{2} \notin A \cap \mathbb{Q}$, logo $A \cap \mathbb{Q}$ não tem máximo, $\inf A \cap \mathbb{Q} = -\sqrt{2} \notin A \cap \mathbb{Q}$, logo $A \cap \mathbb{Q}$ não tem mínimo.
   $B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}\}$. $\inf B = \min B = \sqrt{2}$, $\sup B$ e $\max B$ não existem, porque B não é majorado.
   $B \cap \mathbb{Q}$: $B \cap \mathbb{Q} = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$. $\inf B \cap \mathbb{Q} = \min B \cap \mathbb{Q} = 2$, $\sup B \cap \mathbb{Q}$ e $\max B \cap \mathbb{Q}$ não existem, porque B não é majorado.

10. b) $\sup A > \inf B \wedge \sup B > \inf A$, por exemplo: $A = [0, 1]$, $B = [\frac{1}{2}, 2]$: $A \cap B \neq \emptyset$; $A = \{0, 1\}$ e $B = \{\frac{1}{2}, 2\}$: $A \cap B = \emptyset$.

[4] Ver Exercício 5. - Suplementares.

SOLUÇÕES: SUPLEMENTARES

1. c) Verifique que $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$.

   f) Sugestão: veja que $\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (por ex., multiplicando ambos os membros por $\sqrt{n+1}$).

   g) Escreva $7^{n+1} = (6+1)7^n$, por exemplo.

2. Verifique que $(1+na)(1+a) \geq 1 + (n+1)a$

3. b) Usar a propriedade telescópica.[5]

6. a) 189; b) 10660; c) 6075; d) $-20/21$; e) $12 - 4 \cdot 3^{21} = 414841412800$.

7. a) Da definição.

   b) Use a alínea a) e as propriedades do somatório.

   c) Fazer $a = b = 1$; $a = -1$, $b = 1$.

8. a) $A =]-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [4, +\infty[$, logo $A \cap B = [-3, -\frac{4}{3}] \cup \{4\}$.

   b) $\sup A$ não existe, porque A não é majorado;
   $\min(A \cap B) = -3$, $\text{máx}(A \cap B) = 4$;
   $\inf(A \cap B \cap C) = -3$, $\sup(A \cap B \cap C) = -\frac{4}{3}$, $\min(A \cap B \cap C)$ não existe, porque $-3 \notin A \cap B \cap C$.

9. $\sup(A)$ e $\text{máx}(A)$ não existem, porque A não é majorado, $\inf(A) = 0 \notin A$, $\min(A)$ não existe; $\inf(B) = \min(B) = -1$, $\sup(A \cup B)$ e $\text{máx}(A \cup B)$ não existem.

10. a) $A =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

    b) $A \cap B = \{-2\} \cup [1, 2]$: $\min A \cap B = -2$, $\text{máx}\, A \cap B = 2$.
    $A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) =]1, 2[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$: $\sup A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 2$, $\inf A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 1$, $\min A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ e $\text{máx}\, A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ não existem, porque $1, 2 \notin A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

11. b) $A \cap B = \left[-1 + \sqrt{2}, 3\right] \cap \mathbb{Q}$: $\sup A \cap B = 3$, $\text{máx}\, A \cap B = 3$, uma vez que $3 \in A \cap B$, $\inf A \cap B = -1 + \sqrt{2}$, $\min A \cap B$ não existe, porque $-1 + \sqrt{2} \notin A \cap B$.
    $C = \left\{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}\right\}$: $\sup C = \text{máx}\, C = 1$ (porque $1 \in C$ e 1 é majorante), $\inf C = 0$, $\min C$ não existe porque $0 \notin C$.

12. a) $x \in U \Rightarrow x \leq \sup U < \sup V$.

    b) Se para qualquer $y \in V$, $y \leq \sup U$, então $\sup U$ é majorante de V e seria $\sup U \geq \sup V$.

13. Das definições.

14. Use que $V_\varepsilon(s) \cap A \neq \emptyset$, para qualquer $\varepsilon > 0$.

[5] Ver Exercício 5. - Suplementares.