TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I - 2º Sem. 2019/20

FICHA 3

Sucessões: limite; sucessões por recorrência. Limite por enquadramento. Subsucessões.

AULA PRÁTICA

1. Considere as sucessões reais (u_n) e (v_n) definidas por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \dfrac{(n+2)u_n}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 2\sqrt{2}, \\ v_{n+1} = \sqrt{3v_n^2 + 2}. \end{cases}$$

   Mostre, usando indução matemática, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

   a) $u_n = \dfrac{(n+1)!}{2^n}$;

   b) $v_n = \sqrt{3^{n+1} - 1}$.

2. Baseando-se directamente na definição de limite de sucessão mostre que:

   a) $\dfrac{2n-1}{n+1} \to 2$.

   b) $1 + (-1)^n \not\to 0$.

3. Indique, justificando abreviadamente a resposta, o conjunto dos valores reais de a para os quais a sucessão de termo geral $x_n = \dfrac{a^n}{2^{1+2n}}$ é

   a) convergente;

   b) divergente, mas limitada.

4. Calcule o limite em $\mathbb{R}$, ou justifique a sua não existência, para cada uma das sucessões de termo geral

   a) $\dfrac{(n+1)^2 + 2n^4}{(n+1)^4 + 2n^2}$,

   b) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{4n^2+1}}$,

   c) $\dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+1}}$,

   d) $\dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

   e) $\dfrac{1 + 2^{-n} + 3^{-n}}{2 + 3^{-n} + 4^{-n}}$

   f) $\dfrac{(-2)^n}{1+3^n}$,

5. Estude quanto à convergência as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \cos(n!\pi), \quad v_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}, \quad w_n = \frac{1+a^n}{1+a^{2n}} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

6. Calcule o limite em $\mathbb{R}$, ou justifique a sua não existência, para cada uma das sucessões de termo geral

   a) $\dfrac{1}{(-1)^n n^2 + 2}$

   b) $\dfrac{n(1+(-1)^n)}{2}$

   c) $\dfrac{(-1)^n}{n^{1+(-1)^n}}$

   d) $\dfrac{\sqrt[3]{(-1)^n n^2 + 2}}{n+3}$

   e) $\dfrac{n^2 + \cos(n^2 + \sqrt{n})}{(2n+1)^2}$

   f) $\dfrac{\operatorname{sen}(n!)}{(2n)!}$.

7. Considere $A = \left[-1+\sqrt{2}, 3\right]$. Indique, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

(i) Toda a sucessão monótona de termos em A é convergente.

(ii) Toda a sucessão (a_n) estritamente crescente de termos em A é tal que $\lim a_n = 3$.

(iii) Existem sucessões (a_n) de termos em $\mathbb{R} \setminus A$ convergentes e tais que $a_{n+1}a_n < 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

8. Justifique que, se as condições

$$u_n > 0 \quad \text{e} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

são verificadas qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, então u_n é convergente.

9. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2}, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2}{3} \end{cases} .$$

a) Mostre usando indução que $1 < u_n < 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (u_n) é convergente e determine $\lim u_n$.

10. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 2$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

a) Prove por indução que $1 < u_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) Prove por indução que (u_n) é decrescente.

c) Justifique que (u_n) é convergente e determine o limite de (u_n).

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Indique quais são limitadas/majoradas/minoradas e monótonas (crescentes ou decrescentes) de entre as sucessões definidas do modo seguinte, $n \in \mathbb{N}$:

a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + 1}$.

b) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n}$.

c) $u_n = (-1)^n n^2$.

d) $u_n = n^{(-1)^n}$.

e) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$. [6]

2. Considere as sucessões reais (u_n) e (w_n) definidas por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 4, \\ u_{n+1} = -2u_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 = \sqrt[3]{5}, \\ w_{n+1} = \sqrt[3]{4w_n^3 - 3}. \end{cases}$$

Mostre, usando indução matemática, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

[6] Pode ser útil usar a fórmula da soma dos termos de uma progressã o geométrica (ver Ex. 4 - Ficha 2).

a) $u_n = (-2)^{n+1}$; b) $w_n = \sqrt[3]{2^{2n}+1}$.

3. Para cada $\varepsilon > 0$, determine os valores de $n \in \mathbb{N}$ tais que $|u_n - a| < \varepsilon$ e decida se $u_n \to a$ em cada um dos seguintes casos:

   a) $u_n = \dfrac{2n}{n+1}, \quad a = 2$;

   b) $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}, \quad a = -1$;

   c) $u_n = \begin{cases} \dfrac{2n}{n+1}, & \text{se } n \leq 1000, \\ 3, & \text{se } n > 1000, \end{cases} \quad a = 2.$

4. Baseando-se directamente na definição de limite de sucessão mostre que:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0.$ b) $\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n} \to 1.$

5. Calcule o limite em $\mathbb{R}$, ou justifique a sua não existência, para cada uma das sucessões de termo geral

   a) $\dfrac{1}{n}\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$,

   b) $\dfrac{1}{n}\left(2n + \sqrt{n}\right)$,

   c) $\dfrac{(2n+1)^3 + n}{n^3+1}$

   d) $\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n-1}}$,

   e) $\dfrac{n+1}{n!}$,

   f) $\dfrac{n^n}{n^n+1}$,

   g) $\dfrac{4^n}{1+4^{n^2}}$,

   h) $\dfrac{(-1)^n}{a^n}$, com $a > 1$,

   i) $\dfrac{(a^n)^2}{a^{n^2}}$, com $a > 1$.

6. Das sucessões de termos gerais

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad v_n = \frac{n^{n+1}}{n^n+1}, \quad w_n = u_n v_n$$

   indique, justificando abreviadamente as respostas, quais as que são limitadas e as que são convergentes.

7. Calcule o limite em $\mathbb{R}$, ou justifique a sua não existência, para cada uma das sucessões de termo geral

   a) $(1 + (-1)^n)\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

   b) $\dfrac{2n^2 + (-1)^n}{n^2 - 1}$

   c) $\dfrac{(-1)^n}{n!}$

   d) $\dfrac{n^3 + \cos(n!+1)}{(2n-1)^3}$

   e) $\dfrac{n^2\cos(n\pi)}{2n^2+n+1}$

   f) $\dfrac{\sqrt[4]{4n^4+1}}{n+2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$

8. Mostre que se (u_n) é uma sucessão convergente tal que $u_{2n} \in]0,1[$ e $u_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus]0,1[$ então $\lim u_n \in \{0,1\}$.

9. Dê exemplos de sucessões (u_n) tais que:

   a) (u_n) tem termos em $]-\infty, 1[$ e é crescente.[7]

[7] Recorde que u_n tem (todos os) termos em A se e só se $u_n \in A$, para *qualquer* $n \in \mathbb{N}$.

b) (u_n) não é monótona e é convergente.

c) (u_n) é divergente e $(|u_n|)$ é convergente.

d) (u_n) é limitada e divergente.

e) (u_n) tem termos em $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ e é divergente.

f) (u_n) tem termos em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e converge para um elemento de $\mathbb{Q}$.

10. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$u_1 = 2, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$$

a) Mostre que $u_n \in \mathbb{Q}^+$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (Sug. Use indução).

b) Assumindo que (u_n) é convergente, mostre que $\lim u_n = \sqrt{2}$.

11. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{4} \end{cases}.$$

a) Mostre usando indução que $u_n < \frac{3}{2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e determine $\lim u_n$.

12. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} - \frac{1}{n} \end{cases}.$$

a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

*13. Sendo (x_n) o termo geral de uma sucessão monótona, (y_n) o termo geral de uma sucessão limitada e supondo verificada a condição

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

prove que (x_n) é limitada e que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.