

FICHA 3 - SOLUÇÕES**AULA PRÁTICA**

2. a) Dado $\varepsilon > 0$, para $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$, tem-se $\left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$.
 b) Dado $0 < \varepsilon < 2$, temos $|1 + (-1)^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow n$ é ímpar. Em particular, para n par arbitrariamente grande $|1 + (-1)^n - 0| = 2 \geq \varepsilon$.
3. a) $-4 < a \leq 4$; b) $a = -4$.
4. a) 2, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) 1, d) 3, e) 1/2, f) 0.
5. $\lim u_n = 1$; v_n não é convergente, tem sublimites $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$; $\lim w_n = 1$ se $|a| < 1$ ou $a = 1$, não tem limite se $a = -1$, $\lim w_n = 0$ se $|a| > 1$.
6. a) 0; b) não existe, a sucessão não é majorada; c) não existe, a sucessão tem dois sublimites diferentes $-1, 0$; d) 0; e) $\frac{1}{4}$; f) 0.
7. (i) Verdadeiro, porque A é limitado, logo qualquer sucessão de termos em A será limitada. Se for monótona é convergente.
 (ii) Falso, basta tomar por exemplo, $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.
 (iii) Verdadeiro, basta tomar $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.
8. Veja que é decrescente e minorada, logo é convergente.
9. b) Ver que $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{3} = \frac{(u_n - 2)(u_n - 1)}{3}$ e usar a).
 c) $\lim u_n = 1$ (aplicando limite a ambos os lados da expressão de recorrência e notando que u_n é decrescente).
10. b) Ver que $u_2 \leq u_1$ e que se $u_{n+1} \leq u_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então $u_{n+2} \leq u_{n+1}$, ou seja $\sqrt{2u_{n+1} - 1} \leq \sqrt{2u_n - 1}$.
 c) $\lim u_n = 1$ (aplicando limite a ambos os lados da expressão de recorrência).

SOLUÇÕES: SUPLEMENTARES

1. a) Limitada. Decrescente. b) Limitada. Não monótona. c) Não majorada, não minorada. Não monótona. d) Minorada, não majorada. Não monótona. e) Limitada. Crescente (estritamente).
3. a) $|u_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Sim, $u_n \rightarrow 2$: tomando $N \in \mathbb{N}$ com $N \geq \frac{2}{\varepsilon} - 1$ temos $|u_n - 2| < \varepsilon$, para qualquer $n > N$.
 b) $|u_n + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow (2 - \varepsilon)n < \varepsilon$ verifica-se sempre se $\varepsilon \geq 2$, mas se $0 < \varepsilon < 2$, $|u_n + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow n < \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon}$, logo $u_n \not\rightarrow -1$ (aliás se $\varepsilon < 1$ é impossível).

- c) $|u_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \wedge n \leq 1000 \vee 1 < \varepsilon \wedge n > 1000$, logo para $\varepsilon \leq 1$, $|u_n - 2| < \varepsilon$ verifica-se no máximo para número finito de valores de n logo $u_n \not\rightarrow 2$ (se $\varepsilon < 2/999$ é impossível).
4. a) Dado $\varepsilon > 0$, para $n > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$, tem-se $|\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0| < \varepsilon$.
- b) Dado $1 > \varepsilon > 0$, para $n > \frac{1}{\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}}$, tem-se $|\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - 1| < \varepsilon$. (Se $\varepsilon > 1$, $|\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - 1| < \varepsilon$ verifica-se para qualquer $n \in \mathbb{N}$.)
5. a) 0, b) 2, c) 8, d) 1, e) 0, f) 1, g) 0, h) 0, i) 0.
6. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ limitada, $-\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$; convergente $\lim \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$.
 $v_n = \frac{n^{n+1}}{n^n+1}$ não majorada, não convergente.
 $w_n = u_n v_n$ limitada, não convergente, $u_n v_n = \frac{(-1)^{n+1} n^{n+1}}{n(n^n+1)} = \frac{(-1)^{n+1} n^n}{n^n+1}$ tem dois sublimites diferentes, 1, -1.
7. a) não existe, a sucessão tem dois sublimites diferentes, 0 e 2; b) 2; c) 0; d) $\frac{1}{8}$;
e) não existe, a sucessão tem dois sublimites diferentes, 1/2 e -1/2; f) não existe, a sucessão tem sublimites diferentes 0, ± 1 , $\pm\sqrt{2}$;
8. $\lim u_n = a \Rightarrow \lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = a$. Ver que neste caso $a \in [0, 1]$ e $a \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, logo $a = 0 \vee a = 1$.
9. (É óbvio que os exemplos dados abaixo não são únicos ...)
- a) $u_n = -\frac{1}{n}$;
b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$;
c) $u_n = (-1)^n$;
d) $u_n = 1 + (-1)^n$;
e) $u_n = \frac{1}{(-1)^{n+2}}$;
f) $u_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$ (ver também Ex. 10).
10. b) Com $L = \lim u_n$, verifique que $L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L}$. Como $u_n > 0$, $L = \sqrt{2}$.
11. b) Ver que $u_{n+1} - u_n = \frac{3-2u_n}{4}$ e usar a).
c) $\lim u_n = 3/2$ (aplicando limite a ambos os lados da expressão de recorrência).
12. c) $\lim u_n = 2$.