Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2015/2016

Exame

17 de Junho de 2015, 15h00 horas – salas V1.08, V1.09, V1.10

Duração 3 horas

Não é permitida consulta nem uso de calculadoras programáveis

Quotação: P1 1/alínea=4 P2 1/alínea=6 P3 1/alínea=3 P4-3 P5 a)1 b)1 c)1 d)1.

P1. Considere o sistema com entrada u e saída y, com função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

a) Obtenha uma realização de estado do sistema usando variáveis de fase (a saída e as suas derivadas).

b) Calcule os valores próprios e os vectores próprios correspondentes do modelo de estado que obteve.

c) Usando a decomposição modal, escreva a solução $x(t)$ da equação de estado quando a condição inicial do estado é $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

d) Usando apenas blocos básicos **escalares** (integradores, somadores e ganhos), desenhe um diagrama de blocos que permita simular o modelo de estado.

P2. A figura 2.1 mostra o esquema simplificado de um braço robot flexível. Pretende-se projectar um controlador que calcule a entrada manipulada u por forma a que a saída y tenha o comportamento desejado.

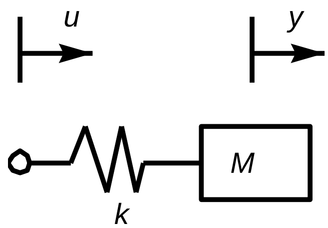

Figura 2.1 – Esquema simplificado de um braço robot flexível.

Aqui, $\frac{k}{M} = 900\ \mathrm{m/s^2}$, y é a saída (dada pela posição da massa do braço) e u é a entrada manipulada (dada pela posição da ponta livre da mola).

a) Escreva as equações do movimento na forma de um modelo de estado matricial, tomando como variáveis de estado a posição e a velocidade da massa.
b) Diga se é ou não possível estimar ambos os estados a partir de observações feitas com um sensor nas duas situações seguintes:
    a. O sensor mede a posição da massa, y
    b. O sensor mede a velocidade massa, $\dot{y}$
c) Para a situação em que a saída é y, projecte um estimador de estado (observador) com pólos em $s = -100 \pm 100j$
d) Para a mesma situação da alínea anterior, projecte um controlador por realimentação de variáveis de estado com pólos em $s = -20 \pm 20j$
e) Supondo que se realimenta a estimativa do estado, seria razoável projector uma lei de controlo de realimentação do estado com pólos em $s = -200 \pm 200j$? Justifique a sua resposta.
f) Escreva um modelo de estado de um controlador que englobe o estimador de estado que projectou e a realimentação das estimativas do estado, e que permita seguir uma referência, amplificando o erro de seguimento $e = r - y$, em que r é a referência a seguir.

P3. Considere o Sistema não linear autónomo (sem entrada) descrito pelas equações de estado

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -0{,}6x_2 - 3x_1 - x_1^2$$

a) Obtenha todos os pontos de equilíbrio do sistema

b) Obtenha as equações do sistema linearizado em torno do ponto $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) A partir da linearização, o que pode dizer sobre a estabilidade deste ponto de equilíbrio.

P4. A quantitade total de petróleo extraído de um poço até ao instante t, dada pela variável escalar $x(t)$ depende do esforço empregue na extracção através da equação de estado

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad x(0) = 0$$

em que u é a taxa de esforço dispêndido na extracção por unidade de tempo. Neste problema pretende-se operar o poço durante um intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = T$, por forma a extrair uma quantidade de petróleo especificada P e tal que o esforço dispendido seja mínimo. Resolva o seguinte problema:

Utilizando o Princípio de Pontryagin, determine a função $u(t), 0 \leq t \leq T$, que minimiza

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$$

sujeita à restrição no estado terminal $x(T) = P$.

Ajuda:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda,x,u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} & \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

P5. Considere o sistema de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = -ax + u$$

em que u é a variável manipulada, x é o estado (escalar) e a é um parâmetro desconhecido. Neste problema queremos projectar um controlador adaptativo que garanta que o sistema fica assimptoticamente estável.

a) Comece por supor que a é conhecido e determine o ganho K em função de a, tal que o sistema controlado se comporte como $\frac{dx}{dt} = -x$.

b) Suponha agora que na lei de controlo que obteve em a) o parâmetro a é desconhecido, pelo que é substituído por uma estimativa designada por $\hat{a}$. Defina o erro $\tilde{a}$ na estimativa do parâmetro por $\tilde{a} = a - \hat{a}$. Obtenha uma equação diferencial para o sistema controlado nestas condições.

c) Usando a candidata a função de Lyapunov $V(x, \tilde{a}) = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{\gamma}\tilde{a}^2)$, obtenha uma lei de ajuste para a estimativa do parâmetro.

d) Utilizando o Teorema do Conjunto Invariante, mostre que o estado tende para zero quando o tempo aumenta.