MEEC

Controlo em Espaço de Estados

2018/2019

Exame Época Especial – 23 Julho 2019, 14h00-17h00, sala E2

Duração 3 horas

Quotação: P1 a-e)1 P2 a)1 b)2 c)1 P3 a)2 b)1 P4 a)3 b)1 P5 a-d) 1

P1. Na ilha de Tonga-Bonga existem coelhos e raposas e uma quantidade ilimitada de alimento para os coelhos. Depois de intermináveis estudos da maior complexidade, os destemidos biólogos tonga-bongenses chegaram à conclusão de que, sendo $x_1(t)$ o número de coelhos no instante de tempo t e $x_2(t)$ o número de raposas, estas variáveis (que constituem o estado do sistema) satisfazem as equações de estado lineares (sem entrada externa):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

a) Escreva a equação de estado na forma matricial. Escreva a matriz A (a matriz da dinâmica do sistema).

b) Calcule os valores próprios e os vectores próprios de A.

c) Escreva a decomposição modal do sistema para condições iniciais arbitrárias (ou seja, considerando genéricos os ganhos k_1 e k_2 de cada um dos modos).

d) Suponha que o número inicial de coelhos é 100 (ou seja, $x_1(0) = 100$). Determine o número inicial de raposas, $x_2(0)$, tal que o número de raposas e o número de coelhos se mantenha constante no tempo, quer dizer, tal que $x_1(t) = x_1(0)$ e $x_2(t) = x_2(0)$ para todo o t.

e) Suponha que o número inicial de coelhos é 100, e o número inicial de raposas é 45. Escreva as funções do tempo que permitem calcular $x_1(t)$ e $x_2(t)$ ao longo do tempo, e determine o tempo t_f ao fim do qual as raposas se extinguem.

P2. Considere o circuito eléctrico da figura P3-1.

a) Escreva as equações de estado para as variáveis de estado indicadas. Não tem de escrever a equação de saída.

b) Dê uma condição em R_1, R_2, L e C para que a realização de estado que obteve não seja controlável.

c) Interprete a condição de perda de controlabilidade que obteve na alínea b) em termos das constantes de tempo do circuito (inverso dos valores próprios da matriz da dinâmica). Indique os cálculos que permitem esta interpretação.

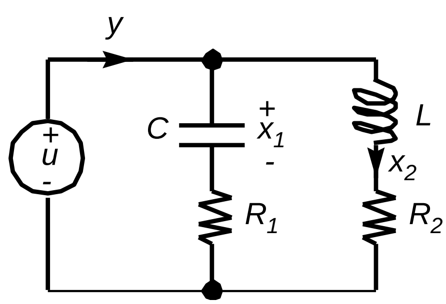

Figura P3-1

P3. Considere o sistema descrito por

$$\dot{y} = -y + bKr$$

em que b é um parâmetro constante desconhecido, mas que se sabe que é positivo, r é uma referência constante e K um, ganho ajustável.

a) Recorrendo a uma função de Lyapunov adequada, obtenha uma lei de ajuste de K que garanta que $e = y - y_m$ tende para zero quando o tempo aumenta, sendo

$$\dot{y}_m = -y_m + r$$

b) Recorrendo ao teorema do conjunto invariante, mostre que a lei de ajuste de K que obteve garante que $e = y - y_m$ tende para zero quando o tempo aumenta.

P4. Considere o sistema definido pelo modelo de estado escalar

$$\frac{dx}{dt} = x + u$$

a) Por aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin, obtenha uma lei de controlo por realimentação que minimiza o custo definido num horizonte infinito, em que r é uma referência constante a seguir

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty ((x(t) - r)^2 + (u(t) + r)^2)dt$$

Assuma que, em cada instante de tempo t, o estado $x(t)$ e o co-estado $\lambda(t)$ estão relacionados por

$$\lambda(t) = -px(t) + g,$$

em que p e g são constantes que deve determinar.

b) Mostre que $x(t) \to r$.

P5. Considere a equação diferencial escalar

$$\dot{x} = ax + b \qquad \text{(P5-1)}$$

em que $x \in R$ para cada instante, a e b são constantes conhecidas, e a condição inicial é $x(0) = 0$. Pretende-se resolver esta equação diferencial.

Para tal, substitui-se a equação (P5-1) por

$$\dot{x} = ax + by \qquad \text{(P5-2)}$$

em que $y = 1$.

a) Escreva uma equação diferencial verificada por y e diga qual a respectiva condição inicial.

b) Escreva o sistema de equações diferenciais formado por (P5-2) e pela equação que obteve na alínea a) na forma de um modelo de estado linear na forma matricial. Chame A à matriz da dinâmica do sistema.

c) Calcule a exponencial e^{At} da matriz que obteve na alínea b).

d) Use o resultado da alínea c) para resolver a equação (P5-1).

Ajudas:

$$e^{-at} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$