Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2011/2012

Segundo Teste

20 de Maio de 2012, 20 horas

Duração 2 horas

Não é permitida consulta nem calculadoras programáveis

Quotação: P1a) 3 b)3 c)2; P2-4; P3-4; P4-4.

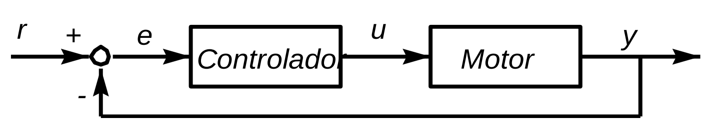
P1. Pretende-se controlar a posição angular do veio de um motor de corrente contínua que é modelado pelo seguinte modelo de estado de 2ª ordem

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \qquad y = Cx \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Suponha que tem acesso à medida estado. Projecte o vector de ganhos K de um controlador de realimentação de variáveis de estado, $u = -Kx$, tal que o sistema realimentado tenha pólos em $-2 \pm j$.

b) Projecte o vector de ganhos L de um observador tal que o erro de estimação do estado tenda para zero com uma dinâmica com valores próprios em -10 e -12.

c) Suponha que pretende resolver o problema de seguimento de um sinal de referência r usando um controlador que combina o controlador e o observador que dimensionou nas alíneas anteriores e que filtra o erro de seguimento $e = r - y$ (tal como feito no 2º trabalho de laboratório e na figura). Determine as matrizes A_C, B_C e C_C do modelo de estado do controlador com entrada e e saída u que corresponde aos ganhos que obteve nas alíneas a) e b).



P2. Considere o sistema autónomo (sem entrada) não linear, descrito por

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1^3 - 2x_1x_2^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2^3 \end{cases}$$

Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov, mostre que a origem (0, 0) é um ponto de equilíbrio assimptoticamente estável.

P3. Uma empresa de gestão de explorações agrícolas possui uma linda propriedade com passarinhos e flores que tem uma área total de 1000 ha. Por forma a rentabilizar esta propriedade, os gestores do fundo podem cultivá-la ou vender parcelas. Quando é vendida uma parcela, a empresa recebe uma detrerminada soma de dinheiro, mas não pode mais usá-la para cultura. O objectivo é obter o rendimento máximo num período de 20 anos.

Admite-se assim que é vendida uma área $x(t)$ até ao instante t, sendo a área remanescente, $1000 - x$, ocupada por uma plantação de deliciosas cebolas que rendem por ano em média 1€/ha. Por forma a podermos usar um modelo na forma de uma equação diferencial, admitimos que para cada t, x é uma variável real que pode tomar qualquer valor entre 0 e 1000, e que o ritmo de venda u de parcelas da propriedade pode também tomar qualquer valor entre 0 e $u_{\max} = 10$ ha/ano. Assim,

$$\frac{dx}{dt} = u. \tag{P3-1}$$

No instante em que a empresa inicia a sua actividade, a propriedade é completamente sua, pelo que se tem a condição inicial

$$x(0) = 0 \tag{P3-2}$$

A empresa desenvolve a sua actividade durante um intervalo de tempo de $T = 20$ anos. O problema consiste em saber como é que deve ser o ritmo de vendas u por forma a maximizar

$$J = \int_0^{20} \big(1000 - x(t) + p\,u(t)\big)dt \tag{P3-3}$$

em que $p=10$ k€/ha é o preço de 1ha de terreno, satisfazendo a restrição

$$0 \le u \le u_{\max} \text{ com } u_{\max} = 10. \qquad \text{(P3-4)}$$

Responda às seguintes questões:

a) Determine a função $u(t)$ no intervalo de tempo $t \in [0, 20]$, que maximiza J dado por (P3-3).

b) Represente graficamente as funções $u(t)$ e $x(t)$ no intervalo de tempo $t \in [0, T]$ quando é utilizado o controlo óptimo.

c) Calcule o correspondente valor óptimo de J.

Ajuda:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x)\Big|_{x=x(T)}$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

P4. Considere o modelo de estado observável

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx .$$

Demonstre o correspondente à fórmula de Bass-Gura para o dimensionamento dos ganhos do observador.

Ajuda: Seja a função de transferência do sistema escrita como

$$G(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s + a_2 s + a_3} \text{ (exemplo para 3ª ordem)}$$

A transformação de coordenadas T que leva à forma canónica do observador, definida pelas matrizes A_o, B_o e C_o e pelo estado x_o

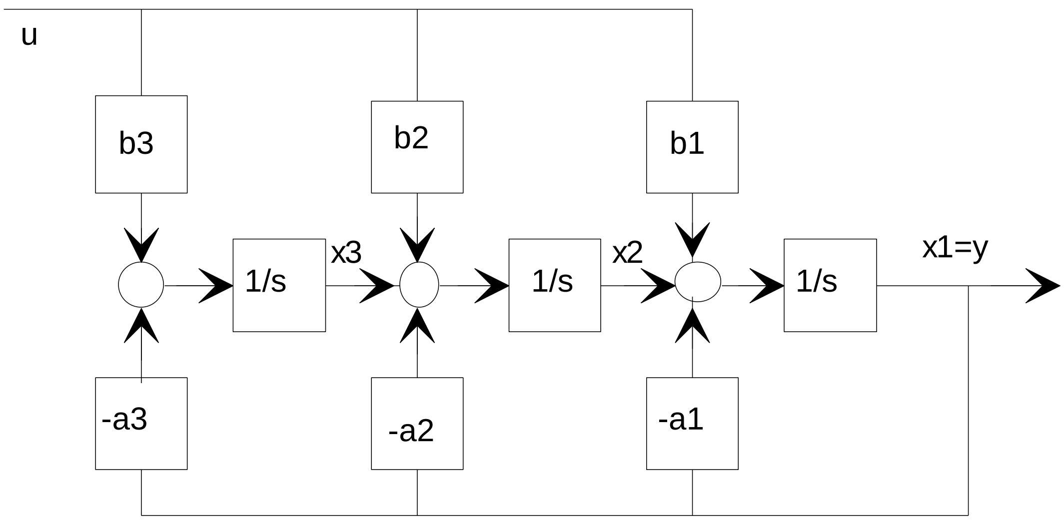
$$\dot{x}_o = A_o x_o + B_o u \qquad y = C_o x_o$$

é

$$x_o = Tx \qquad T = MO(A,C) \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Em que $O(A,C)$ é a matriz de observabilidade associada ao par (A,C) e os a_i são os coeficientes do polinómio característico da matriz A.

A forma canónica do observador é tal como se mostra na figura seguinte (exemplo de 3ª ordem):



Os estados indicados são os estados da forma canónica do observador.