Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica

e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2011/2012

Exame

2 de Junho de 2012, 15 horas – Sala C01

Duração 3 horas

Não é permitida consulta nem calculadoras programáveis

Quotação: P1-4, P2-5, P3-3, P4-4, P5-4

P1. Considere o sistema linear e invariante de 2ª ordem, descrito pela equação

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Responda sucessivamente às seguintes perguntas:

a) Calcule os valores próprios e os vectores próprios da matriz A.

b) Com base nos valores próprios e nos vectores próprios escreva a solução da equação diferencial quando a condição inicial é $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

c) Recorrendo a um método à sua escolha, calcule a matriz exponencial e^{At}.

d) Suponha que $x(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ determine $x(4)$.

P2. Considere o sistema cujo diagrama de blocos se mostra na figura P2-1.

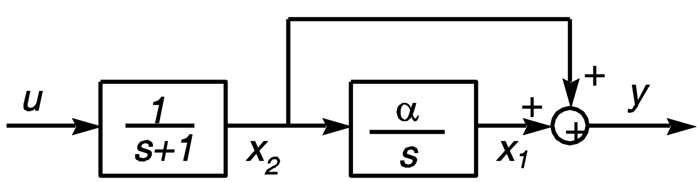

Fig. P2-1: Problema P2.

a) Obtenha uma representação de estado de 2ª ordem do sistema. Tome como variáveis de estado x_1 e x_2, indicadas na figura.

b) Diga para que valores do parâmetro α, tomando como variáveis de estado x_1 e x_2, é possível dimensionar os ganhos de uma realimentação linear de todas as variáveis de estado (RLVE) por forma a posicionar arbitrariamente os pólos do sistema em cadeia fechada. Use a noção de controlabilidade. Não calcule explicitamente o polinómio característico da cadeia fechada.

c) Para $\alpha = 2$, dimensione os ganhos da RLVE por forma a que os pólos da cadeia fechada se situem em $-4 \pm j$. Suponha, nesta alínea, que tem acesso à medida directa de x_1 e x_2.

d) Suponha agora que não tem acesso à medida directa de x_1 e x_2. Diga para que valores de α é que o sistema é tal que satisfaz a condição de ser possível dimensionar um observador do estado por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero tão depressa quanto se queira.

e) Para $\alpha = 2$ escreva as equações e projecte os ganhos de um observador por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero, com valores próprios da equação de erro em $-10 \pm j$.

P3. Atenção: *Neste problema tem dois enunciados alternativos. A primeira alternativa corresponde à quotação completa (3 valores). A segunda corresponde a uma quotação máxima de 1 valor nesta pergunta. Indique claramente na sua resposta qual a alternativa que escolhe. Se responder às duas alternativas, mesmo que parcialmente, apenas será classificada a primeira.*

Alternativa P3A) (3 valores) Considere o sistema da fig. P3-1 que representa um controlador de caudal com uma válvula não linear, em que y é a medida de caudal que atravessa a válvula (saída do sistema) e u é o comando do posicionador de válvula (variável manipulada).

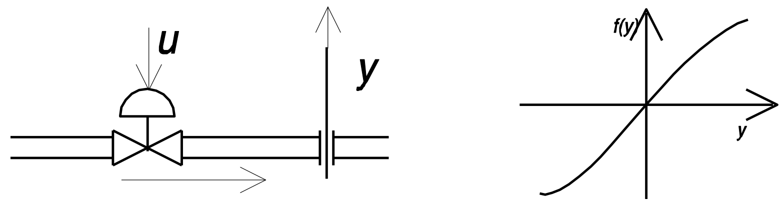

Fig. P3-1: Problema 3.

A válvula é descrita pelo modelo não linear de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dt} = u - \theta\ f(y)$$

em que a função não linear $f(.)$ é conhecida, estando representada na fig. P3-1 (à cdireita), e o parâmetro θ é desconhecido.

Pretende-se:

a) Determine uma retroacção estática da saída tal que, admitindo um conhecimento perfeito de θ, o sistema (válvula+realimentação) se comporte como um integrador.

b) Determine uma lei de controlo linear a aplicar ao integrador assim resultante, que leve a que, supondo conhecimento perfeito de θ, o erro de seguimento $e(t) = r - y(t)$ do sistema controlado tenda para zero com uma constante de tempo de 1 segundo. Admite-se que a referência r é constante.

c) Recorrendo ao Segundo Método de Lyapunov, obtenha uma lei de ajuste do parâmetro θ que garanta que o sistema global é estável.

d) Diga justificadamente se pode ou não garantir que o erro de seguimento $e(t)$ tende para zero quando t tende para infinito.

Alternativa P3B) (1 valor)

Considere o sistema autónomo (isto é, sem entrada), de 2ª ordem, descrito pelo sistema de equações não lineares

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

a) Mostre que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema. Obtenha as equações do sistema linearizado em torno da origem. Classifique a origem em termos dos valores próprios do sistema linearizado. Diga o que pode concluir daqui sobre o comportamento em torno da origem do sistema não linear.
b) Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov, e tomando como candidata a função de Lyapunov a função $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$, o que pode dizer sobre a origem do sistema não linear?

P4.. Considere o sistema definido pelo modelo de estado escalar

$$\frac{dx}{dt} = x + u$$

Por aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin, obtenha uma lei de controlo por realimentação que minimiza o custo definido num horizonte infinito

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(x^2(t) + u^2(t)\right)dt$$

Assuma que, em cada instante de tempo t, o estado $x(t)$ e o co-estado $\lambda(t)$ estão relacionados por

$$\lambda(t) = -p\,x(t)$$

em que p é uma constante que deve determinar.

Ajudas úteis: As informações seguintes são úteis para resolver este problema.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t)\, f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t))$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda'\, f(x,u) + L(x,u)$$

P5. A velocidade v de um veículo está relacionada, num sistema de unidades normalizadas, com a taxa de consumo de combustível u através da equação diferencial de 1ª ordem

$$\frac{dv}{dt} = -v + u$$

Recorrendo ao Princípio do Máximo de Pontryagin, determine o perfil óptimo da função $u(t)$ no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 10$ que transfere a velocidade do valor $v(0) = 0$ (veículo parado) para o valor $v(10) = 70$, minimizando

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{10} u^2(t)dt$$

Ajudas: As ajudas do problema P5 e ainda as seguintes propriedades da transformada de Laplace (L representa a transformada de Laplace e a um parâmetro):

$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \qquad\qquad L\left(\frac{dv}{dt}\right) = sV(s) - v(0)$$