Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2016/2017

Primeiro Teste

19 de Abril de 2017, 20 horas – Salas: Ea2, Ea1, E4, E3, E2

Duração 2 horas

Não é permitida consulta nem uso de calculadoras programáveis

Quotação: P1 a) 1 b) 2 c) 3 d) 1 e) 1 **P2** a) 1 b) 4 c) 1 d) 1 **P3** a) 1 b) 0,5 c) 0,5 **P4** a) 1,5 b)0,5 c)1. P3A a) 0,2 b) 0,3 c) 0,2 d) 0,3

P1. Na ilha de Tonga-Bonga existem coelhos e raposas e uma quantidade ilimitada de alimento para os coelhos (as deliciosas ervas *fenus deliciosus de Lineu*). Depois de intermináveis estudos da maior complexidade, os destemidos biólogos tonga-bongenses chegaram à conclusão de que, sendo $x_1(t)$ o número de coelhos no instante de tempo t e $x_2(t)$ o número de raposas, estas variáveis (que constituem o estado do sistema) satisfazem as equações de estado lineares (sem entrada externa):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

a) Escreva a equação de estado na forma matricial. Escreva a matriz A (a matriz da dinâmica do sistema). Repare que não há entrada externa.
b) Calcule os valores próprios e os vectores próprios de A.
c) Escreva a decomposição modal do sistema para condições iniciais arbitrárias (ou seja, considerando genéricos os ganhos k_1 e k_2 de cada um dos modos).

d) Suponha que o número inicial de coelhos é 100 (ou seja, $x_1(0) = 100$). Determine o número inicial de raposas, $x_2(0)$, tal que o número de raposas e o número de coelhos se mantenha constante no tempo, quer dizer, tal que $x_1(t) = x_1(0)$ e $x_2(t) = x_2(0)$ para todo o t.

e) Suponha que o número inicial de coelhos é 100, e o número inicial de raposas é 45. Escreva as funções do tempo que permitem calcular $x_1(t)$ e $x_2(t)$ ao longo do tempo, e determine o tempo t_f ao fim do qual as raposas se extinguem.

P2. A função de transferência de um motor de corrente contínua de íman permanente que acciona a junta de um braço robot é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s(s+1)}$$

em que U é a transformada de Laplace da tensão aplicada ao motor, correspondente ao sinal de entrada u, e Y é a transformada de Laplace do ângulo da junta, correspondente ao sinal de saída y.

a) Tome como variáveis de estado $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$ e escreva as equações de estado correspondentes, na forma matricial.

b) Determine os ganhos K_1 e K_2 de modo a que $u = -K_1 x_1 - K_2 x_2$ coloque os pólos do sistema controlado nas raízes de $\alpha_c(s) = s^2 + 3s + 9$.

c) Projecte um estimador de estado tal que os erros de estimação tenham pólos nas raízes de $\alpha_o(s) = s^2 + 15s + 225$.

d) Determine a função de transferência do controlador obtido pela combinação das duas alíneas anteriores. Indique valores numéricos dos coeficientes do numerador e denominador.

P3. Considere o circuito eléctrico da figura P3-1.

a) Escreva as equações de estado para as variáveis de estado indicadas. Não tem de escrever a equação de saída.

b) Dê uma condição em R_1, R_2, L e C para que a realização de estado que obteve não seja controlável.

c) Interprete a condição de perda de controlabilidade que obteve na alínea b) em termos das constantes de tempo do circuito (inverso dos valores próprios da matriz da dinâmica). Indique os cálculos que permitem esta interpretação.

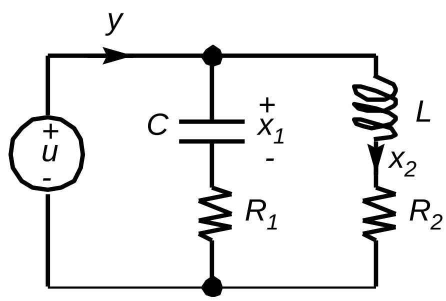

Figura P3-1

Em alternativa ao problema P3 pode resolver o problema P3A. O problema P3A vale no entanto menos 1 valor. Deve indicar claramente na sua folha de resolução qual das versões resolve (P3 ou P3A). **Se apresentar soluções das duas opções, apenas será classificada a solução de P3**.

P3A. Considere o sistema cujo diagrama de blocos se mostra na figura P3-2, em que α é um parâmetro (um número suposto conhecido).

a) Escreva as equações de estado (equação da dinâmica e equação de saída) para as variáveis de estado e saída indicadas.
b) Diga se há valores de α para os quais há perda de controlabilidade.
c) Diga se há valores de α para os quais há perda de observabilidade
d) Dê uma interpretação da perda de controlabilidade e/ou observabilidade em termos da função de transferência.

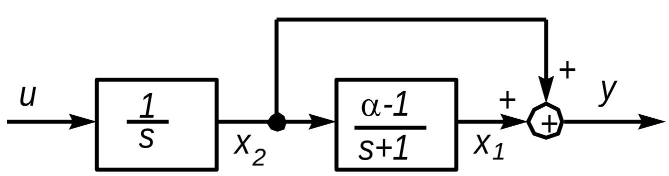

Figura P3-2.

P4. O controlo preditivo baseado em modelos (MPC, do Inglês *Model Based Predictive control*) é uma técnica muito poderosa para projectar controladores, que tem as suas origens na indústria petro-química, ainda nos 60 do século XX, mas que sobretudo a partir dos anos 80 se generalizou e se impôs como ferramenta de controlo não só na indústria, mas também noutros campos como a robótica, o controlo de veículos automóveis, ou mesmo o Marketing para a optimização do esforço em campanhas de publicidade. Este problema visa obter uma lei de controlo preditivo numa situação simples (modelo linear, sem restrições, sem integração forçada).

Considere o sistema descrito pelo modelo de estado em tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

Para simplificar, supõe-se que, para além da saída y, se tem também acesso ao valor do estado x em cada instante de tempo discreto k ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

Suponha que se encontra no instante k, e que conhece $x(k)$. Pretende-se obter uma sequência de valores da variável manipulada $u(k)$, $u(k+1)$, ..., $u(k+H-1)$, em que H é um inteiro fixado à partida (chamado "horizonte de controlo"). A escolha destas amostras da variável manipulada é feita minimizando

$$J(u(k), \ldots, u(k+H-1)) = \sum_{i=1}^{H} y^2(k+i) + Ru^2(k+i-1)$$

a) Por forma a exprimir J como função apenas de $x(k)$ e $u(k), \ldots, u(k+H-1)$, exprima $y(k+i)$ como função de $x(k)$ e de $u(k), \ldots, u(k+H-1)$. *Sugestão*: use o modelo de estado para exprimir $x(k+i)$ em função de $x(k)$ e de $u(k), \ldots, u(k+H-1)$. **Faça $\boldsymbol{H} = 4$ em todas as alíneas.**

b) Defina $Y = [y(k+1) \quad \ldots \quad y(k+H)]^T$, $U = [u(k) \quad \ldots \quad u(k+H-1)]^T$. Usando o resultado da alínea a), mostre que existem matrizes W e Π tal que $Y = WU + \Pi x(k)$. Escreva os elementos destas matrizes para $H = 4$.

c) Determine em função de $x(k)$, R, W e Π qual o valor de U que optimiza J.

Nota: No MPC, de toda a sequência U apenas se aplica ao processo o primeiro elemento, $u(k)$, sendo todo este processo repetido no instante discreto $k+1$. É nisto que consiste a estratégia de controlo de horizonte recidivo.