TÉCNICO LISBOA

MEEC

Controlo em Espaço de Estados

2017/2018

Exame Época Especial – 17 Julho 2018

Duração 3 horas

Quotação: P1

P1. Considere o sistema linear e invariante de 2ª ordem, descrito pela equação de estado

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 1.1333 & -0.5333 \\ 0.5333 & -1.1333 \end{bmatrix}$$

Responda sucessivamente às seguintes perguntas:

a) Calcule os valores próprios e os vectores próprios da matriz A.

b) Esboce qualitativamente o retrato de fase deste sistema (conjunto de trajectórias do estado partindo de várias condições iniciais) com base na informação que obteve na alínea a).

c) Com base nos valores próprios e nos vectores próprios escreva as soluções da equação diferencial quando a condição inicial é, respectivamente, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e (outra situação) $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d) Recorrendo a um método à sua escolha calcule a matriz exponencial e^{At}.

e) Suponha que $x(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine $x(4)$.

P2. Considere um sistema linear e invariante no tem,po modelado pela função de transferência

$$H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

a) Escreva as equações do modelo de estado na forma matricial, usando variáveis de fase.
b) Aumente o sistema com um integrador em paralelo, tal como estudado. Suponha que tem acesso à medida do estado. Projecte um controlador de realimentação de variáveis de estado que coloque os pólos da cadeia fechada em -3, -4 e -5 e por forma a que a saída y siga a referência constante r.
c) Desenhe o diagrama de blocos do ontrolador.
d) Mostre que o controlador projectado em b) leva a que, em regime estacionário, a saída é igual à referência.

P3. Considere o sistema da fig. P3-1 que representa um controlador de caudal com uma válvula não linear, em que y é a medida de caudal que atravessa a válvula (saída do sistema) e u é o comando do posicionador de válvula (variável manipulada).

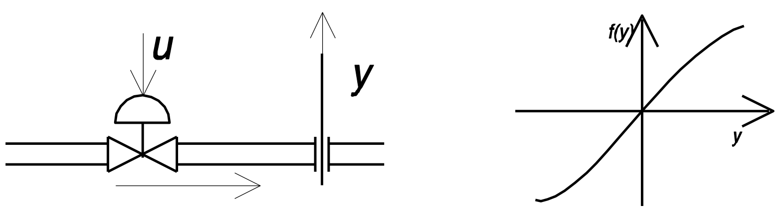

Fig. P3-1: Problema 3.

A válvula é descrita pelo modelo não linear de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dt} = u - \theta\ f(y)$$

em que a função não linear $f(.)$ é conhecida, estando representada na fig. P3-1 (à cdireita), e o parâmetro θ é desconhecido.

Pretende-se:

a) Determine uma retroacção estática da saída tal que, admitindo um conhecimento perfeito de θ , o sistema (válvula+realimentação) se comporte como um integrador.
b) Determine uma lei de controlo linear a aplicar ao integrador assim resultante, que leve a que, supondo conhecimento perfeito de θ , o erro de seguimento

$e(t) = r - y(t)$ do sistema controlado tenda para zero com uma constante de tempo de 0,5 segundo. Admite-se que a referência r é constante.

c) Recorrendo ao Segundo Método de Lyapunov, obtenha uma lei de ajuste do parâmetro θ que garanta que o sistema global é estável.

d) Diga justificadamente se pode ou não garantir que o erro de seguimento $e(t)$ tende para zero quando t tende para infinito.

P4. Considere o sistema definido pelo modelo de estado escalar

$$\frac{dx}{dt} = x + u$$

a) Por aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin, obtenha uma lei de controlo por realimentação que minimiza o custo definido num horizonte infinito, em que r é uma referência constante a seguir

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty ((x(t) - r)^2 + (u(t) + r)^2)dt$$

Assuma que, em cada instante de tempo t, o estado $x(t)$ e o co-estado $\lambda(t)$ estão relacionados por

$$\lambda(t) = -px(t) + g,$$

em que p e g são constantes que deve determinar.

b) Mostre que $x(t) \to r$.

P5. Considere o sistema descrito pelas equações de estado

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

Determine o controlo óptimo que permite transferir o estado no instante 0,

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

para o estado no instante 2 dado por

$$x(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

minimizando

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt.$$

Ajudas:

$$e^{-at} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda,x,u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$