Licenciatura em Engenharia Electrotécnica

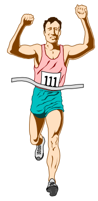
e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2001/02

Primeiro Exame

28 de Junho de 2002, 17 horas - sala Q3



Quotação: P1-5, P2-5, P3-2, P4-3, P5-2, P6-3.

P1. Considere o modelo de estado homogéneo (sem entrada), dado por

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1$$

a) Calcule a matriz de transição e^{At} em que A é a matriz da dinâmica do sistema. Utilize a transformada de Laplace.

b) Calcule os valores próprios da matriz da dinâmica. Diga se o sistema é estável.

c) Se existir, dê uma condição inicial tal que o estado tenda para zero.

P2. Considere o sistema cujo diagrama de blocos se mostra na figura 1.

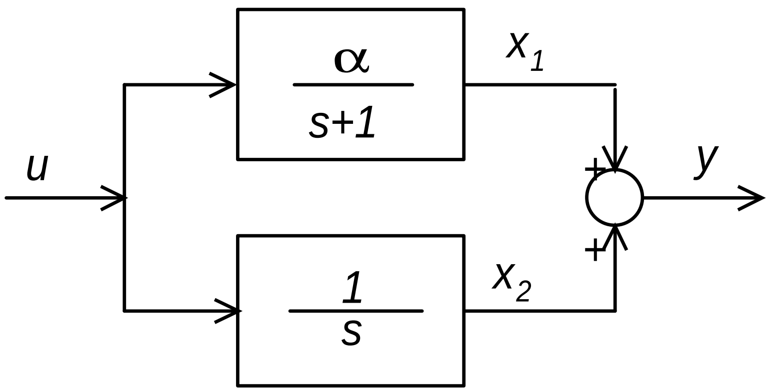


Fig. 1: Problema P2.

a) Obtenha uma representação de estado de 2ª ordem do sistema. Tome como variáveis de estado x_1 e x_2, indicadas na figura.

b) Diga para que valores do parâmetro α, tomando como variáveis de estado x_1 e x_2, é possível dimensionar os ganhos de uma realimentação linear de todas as variáveis de estado (RLVE) por forma a posicionar arbitrariamente os pólos do sistema em cadeia fechada. Não calcule explicitamente o polinómio característico da cadeia fechada.

c) Para $\alpha = 2$, dimensione os ganhos da RLVE por forma a que os pólos da cadeia fechada se situem em $-4 \pm j$. Suponha, nesta alínea, que tem acesso à medida directa de x_1 e x_2.

d) Suponha agora que não tem acesso à medida directa de x_1 e x_2. Diga para que valores de α é que o sistema é tal que satisfaz a condição de ser possível dimensionar um observador assimptótico do estado por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero tão depressa quanto se queira.

e) Para $\alpha = 2$ escreva as equações e projecte os ganhos de um observador por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero, com valores próprios em $-10 \pm j$ da equação de erro.

P3. O PLL (malha de captura de fase) é um dispositivo não linear usado quer para resolver problemas de Telecomunicações (desmodulação de fase, etc.) quer de Controlo (controlo de velocidade de precisão). A figura 2 mostra um diagrama de blocos genérico de um PLL. O PLL gera no ponto B um sinal em fase com o sinal de entrada em A, cuja fase se pretende determinar.

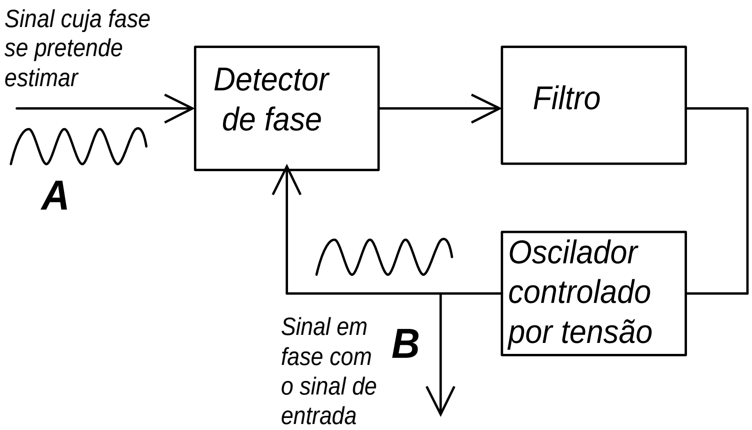


Fig. 2 – Problem P3. Diagrama de blocos de um PLL.

O sistema de equações diferenciais não linear seguinte

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \sin(\theta_i - x_1) - x_2$$

representa o modelo de um PLL. Admite-se que a fase do sinal de entrada é constante. A constante θ_i representa a fase da sinusóide de entrada que se pretende estimar. A variável de estado x_1 representa a estimativa dessa fase. Pretende-se:

a) Mostre que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um ponto de equilíbrio do sistema.

b) Calcule o sistema linearizado em torno deste ponto de equilíbrio.

c) Diga, justificando, se o sistema não linear é assimptoticamente estável em torno do ponto de equilíbrio acima referido.

P4. A equação seguinte é um modelo aproximado de um colector solar

$$\frac{dx}{dt} = x\,u + \theta\,R(t)$$

A variável x representa a temperatura de um óleo a aquecer pela radiação solar $R(t)$, e a variável manipulada $u(t)$ é o caudal de óleo. A radiação solar $R(t)$ é medida em cada instante. Admite-se que a função R é contínua, com primeira derivada contínua. O parâmetro θ é desconhecido mas constante, traduzindo a eficiência do colector solar.

Pretende-se:

a) Determine uma mudança de variávelo de entrada manipulada $u(t)$ tal que, admitindo um conhecimento perfeito do valor de θ e tendo em conta a medida de $R(t)$, o sistema (colector solar + realimentação) se comporte como um integrador entre a nova variável de entrada e a temperatura x. A resposta deve ser expressa em função do parâmetro θ.

b) Determine uma lei de controlo linear (baseada num controlador proporcional) a aplicar ao integrador assim resultante, que leve a que, supondo conhecimento perfeito de θ, o erro de seguimento $e(t) = h(t) - r$ do sistema controlado tenda para zero com uma constante de tempo de 1 segundo.

c) Recorrendo ao Segundo Método de Lyapunov, obtenha uma lei de ajuste do parâmetro θ que garanta que o sistema global é estável.

d) Diga justificadamente se pode ou não garantir que o erro de seguimento $e(t) = h(t) - r$ tende para zero quando t tende para infinito.

P5. Considere o sistema representado na figura 3 que visa equilibrar a bola numa calha, actuando na tensão aplicada a um motor.

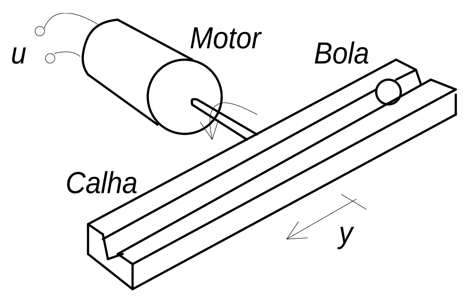


Fig. 3 – Problem P5. Equilíbrio da bola numa calha.

Fazendo hipóteses simplificativas, o modelo deste sistema pode ser aproximado pela função de transferência com dois pólos na origem:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Recorrendo ao Teorema de Chang-Letov, determine a posição dos pólos do sistema em cadeia fechada que optimiza

$$J = \int_0^\infty \left[y^2(t) + \frac{1}{16} u^2(t) \right] dt$$

P6. Considere o modelo de estado descrito pelas equações

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu$$
$$y = Cx$$

em que o par (A, C) é observável. Seja

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n+1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n$$

o polinómio característico da matriz A.

Demonstre o correspondente à fórmula de Bass-Gura para o dimensionamento dos ganhos de um observador assimptótico que coloque os valores próprios da matriz da dinâmica do erro nas raízes de um polinómio especificado

$$\alpha(s) = s^n + \alpha_1 s^{n+1} + \alpha_2 s^{n-2} + \ldots + \alpha_n$$

Ajudas: A transformação de coordenadas que leva o modelo de estado genérico nas coordenadas x à forma canónica do observador é

$$x_o = Tx$$

em que x_o é o vector de estado na forma canónica do observador e

$$T = M\,\mathcal{O}(A,c)$$

sendo $O(A,C)$ a matrz de observabilidade associada ao par (A,C) e

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

em que os a_i são os coeficientes do polinómio característico do sistema em cadeia aberta. A forma canónica do observador de uma função de transferência

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_n}$$

é tal como se mostra na figura 4.

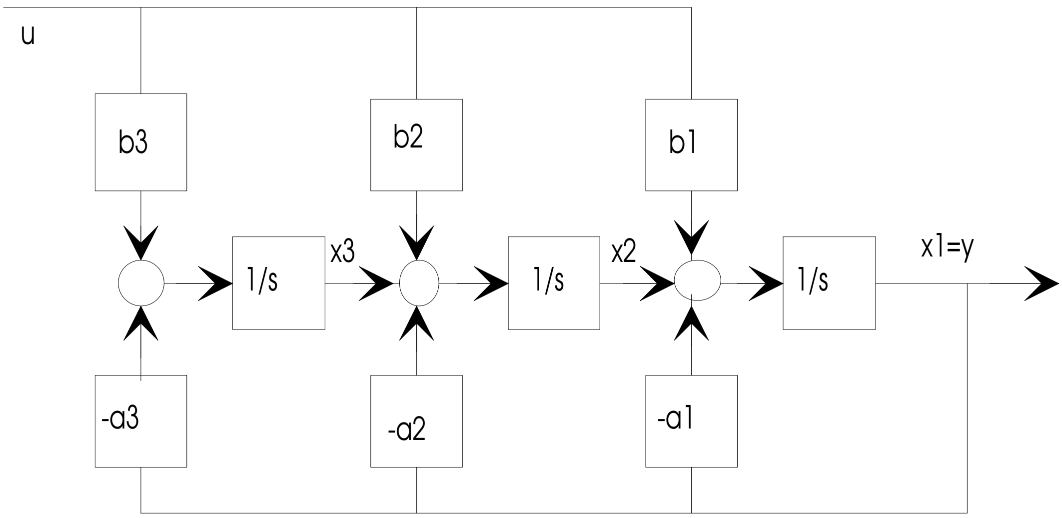


Fig. 4 – Problem P6.

P7 (Opcional). *Qual é o principal músculo látero-flexor do pescoço?*