TÉCNICO LISBOA

Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2014/2015

Exame de Época Especial

16 de Julho de 2015, 14h00 horas – sala V1.31

Duração 3 horas

Não é permitida consulta nem uso de calculadoras programáveis

Quotação: P1 a)1b)1c)1 P2a)1b)2c)1 P3-3 P4-3 P5-3 P6 a)2b)1c)1.

P1. Considere o sistema linear e invariante de 2ª ordem, descrito pela equação

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Responda sucessivamente às seguintes perguntas:

a) Recorrendo à transformada de Laplace, calcule a matriz exponencial e^{At}.

b) Sendo $x(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ determine $x(0)$.

c) Suponha que o modelo de observação é

$$y(t) = [1 \quad \alpha]$$

Diga para que valores do parâmetro α é que, por observação de y num intervalo de tempo finito consegue determinar a condição inicial $x(0)$.

P2. A figura 2.1 representa um paciente preparado para ser sujeito a uma intervenção cirúrgica, ligado a um sistema automático de controlo do nível de bloqueio neuromuscular, que constitui uma das componentes da anestesia (a componente que visa "paralizar" o paciente). São visíveis, respectivamente, os seguintes elementos do sistema de controlo:

- O sensor de actividade muscular, colocado na mão do paciente;

- O computador que recebe os sinais do sensor e calcula a dose de fármaco relaxante muscular (atracúrio) a aplicar ao doente (variável manipulada) por forma que o seu nível de actividade muscular seja o desejado;
- A seringa perfusora (aparelho verde, do lado esquerdo), que recebe o valor da variável manipulada através de uma porta série ligada ao computador de controlo e aplica ao paciente a dose de fármaco relaxante muscular.

Fig. 2-1. Problema P2. Controlo por computador do nível de actividade muscular de um paciente sujeito a cirurgia.

Neste problema pretende-se projectar um lei de controlo de realimentação de variáveis de estado, a programar no computador, tal que o nível do relaxamento muscular seja o desejado (problema de regulação). Para tal, sabe-se que a relação entre a variável manipulada u e o incremento y do nível de actividade muscular em relação a um nível de referência pode ser representado pelo diagrama de blocos da figura 2-2. Neste diagrama, α é um parâmetro que tem o valor nominal $\alpha = 1$.

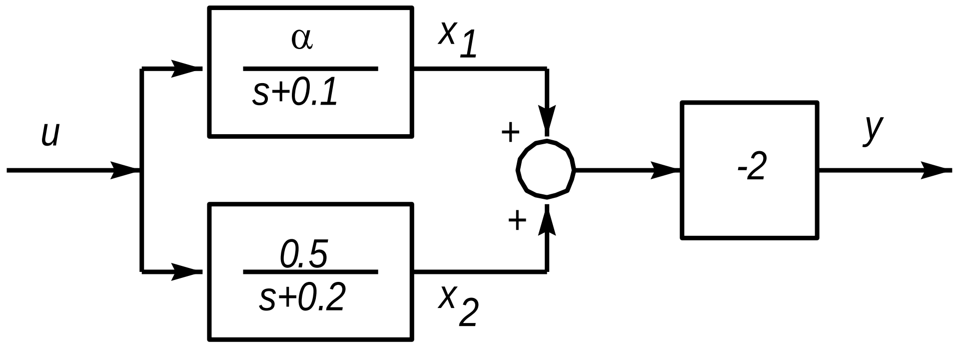

Fig. 2-2. Problema P2. Modelo da actividade muscular do paciente.

Embora o sistema implementado em computador seja discreto, neste problema apenas se considera o algoritmo baseado em equações em tempo contínuo. Responda sucessivamente às seguintes questões:

a) Obtenha uma representação de estado de 2ª ordem do sistema. Tome como entrada u, variáveis de estado x_1 e x_2 e como saída y, indicadas na figura 2-2.

b) Para o valor nominal $\alpha = 1$, dimensione os ganhos da RLVE por forma a que os pólos da cadeia fechada se situem em $-0.2 \pm 0.1j$. Suponha, nesta alínea, que tem acesso à medida directa de x_1 e x_2.

c) Suponha agora que não tem acesso à medida directa de x_1 e x_2. Para o valor nominal $\alpha = 1$ escreva as equações e projecte os ganhos de um observador por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero, com valores próprios em $-1 \pm 0.1j$ da equação de erro.

P3. Considere o sistema dinâmico linear descrito pela equação de estado

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu \text{, com condição inicial } x(0),$$

em que $x \in R^n$ (vector coluna) é o estado, $u \in R$ (escalar), é a entrada, $t \in R$ é o tempo, e $A \in R^{n \times n}$ e $b \in R^n$ são matrizes de parâmetros. Utilizando a transformação de variáveis

$$x(t) = e^{At} z(t),$$

em que $z \in R^n$ é uma nova variável de estado, obtenha uma expressão para a solução da equação, em que o estado $x(t)$ num instante genérico t é expresso em função da condição inicial, da entrada e das matrizes que definem o sistema.

Ajudas: $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$, $\frac{d}{dt}\left(M(t)N(t)\right) = \dot{M}N + M\dot{N}$

P4. Considere um satélite que pode rodar em torno do seu eixo vertical com uma posição angular θ , uma velocidade angular ω e um binário externo de actuação (variável manipulada) u. Num sistema de unidades normalizado, o movimento de rotação do satélite satisfaz as equações

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = u$$

O satélite é actuado pela seguinte lei de controlo não linear

$$u = -g(\omega) - h(\theta),$$

em que g e h são funções conhecidas e que satisfazem

$$g(0) = 0, \ h(0) = 0$$

e ainda

$$\omega g(\omega) > 0 \text{ para } \omega \neq 0$$

$$\theta h(\theta) > 0 \text{ para } \theta \neq 0$$

Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov e ao Teorema do Conjunto Invariante, mostre que a origem do sistema em cadeia fechada é um ponto de equilíbrio globalmente assimptoticamente estável.

Sugestão: Utilize uma função de Lyapunov dada pela energia total do sistema em cadeia fechada.

P5. Considere o sistema definido pelo modelo de estado escalar

$$\frac{dx}{dt} = x + u$$

Por aplicação do teorema de Chang-Letov., obtenha uma lei de controlo por realimentação que minimiza o custo definido num horizonte infinito

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^2(t) + u^2(t)\right)dt$$

Ajuda: As informações dadas no final do problema P6 são úteis para resolver este problema.

P6. Uma empresa imobiliária tem um conjunto de apartamentos que pode explorar, durante o intervalo de tempo de T anos. A empresa pode vender os apartamentos, situação em que recebe uma dada quantidade de dinheiro no momento da venda, mas não receberá mais nenhum lucro no futuro, após a venda. Pode ainda alugar os apartamentos. Para simplificar admite-se que os apartamentos podem ser vendidos com uma área arbitrária, e que a renda recebida pelos apartamentos não vendidos é proporcional ao tempo em que são detidos.

Seja A a área total inicial dos apartamentos. Desta área, uma área x é a área dos apartamentos vendidos, sendo a área remanescente, $A - x$, ocupada pelos apartamentos alugados para rendimento. Por forma a poder usar um modelo na forma de uma equação diferencial, admitimos que x é uma variável real que pode tomar qualquer valor entre 0 e A, e que o ritmo u com que a empresa vende os apartamentos pode também tomar qualquer valor entre 0 e u valor máximo $u_{\max}$. Tem-se assim que

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad (6\text{-}1)$$

No instante em que a empresa inicia a sua actividade, não há apartamentos vendidos, pelo que se tem a condição inicial:

$$x(0) = 0 \qquad (6\text{-}2)$$

A empresa desenvolve a sua actividade durante um intervalo de tempo de T anos (fixo à partida). Admite-se que ao fim deste tempo não foram vendidos todos os apartamentos. O problema consiste em saber como é que deve ser o ritmo de vendas u por forma a maximizar

$$J = \int_0^T \left(A - x(t) + \rho u(t)\right) dt \qquad (6\text{-}3)$$

em que $\rho > 0$ é um parâmetro fixo, satisfazendo a restrição

$$0 \le u \le u_{\max}$$

Responda às seguintes questões:

a) Determine a função $u(t)$ no intervalo de tempo $t \in [0, T]$, que maximiza J dado por (6-3).

b) Represente graficamente as funções $u(t)$ e $x(t)$ no intervalo de tempo $t \in [0, T]$ quando é utilizado o controlo óptimo.

c) Calcule o correspondente valor óptimo de J .

Ajuda:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$