MEEC

Controlo em Espaço de Estados

2017/2018

Exame – 22 de Junho de 2018, 11h30 horas – sala Ea1, Ea2, E3, E8, E4

Duração 3 horas

Quotação: P1 a)2 b)2 c)2 P2 a)1 b)0,5 c)0,5 d)1 e)1 f)0,5 g)1 P3 a)1 b)1 c)0,5 d)1 e)0,5 P4 a)0, 5 b)0,5 c) 0,5 P5 3

P1. Considere o sistema com entrada u e saída y, com função de transferência

$$G(s) = \frac{s+5}{s^2+3s+2}$$

a) Obtenha uma realização de estado do sistema usando variáveis de fase.
b) Calcule os valores próprios e os vectores próprios correspondentes do modelo de estado que obteve.
c) Usando a decomposição modal, escreva a solução $x(t)$ da equação de estado quando a condição inicial do estado é $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

P2. Considere um motor de corrente contínua em que x_1 é a posição angular do veio do motor cujo modelo de estado é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

em que u é o sinal de entrada e y o sinal de saída, ambos escalares.

a) Diga qual o significado físico da variável de estado x_2. Justifique com base nas equações de estado.
b) Mostre que a realização de estado é controlável.
c) Obtenha a função de transferência do sistema que tem grau mínimo.
d) Suponha que tem acesso ao estado. Determine o vector de ganhos K da lei de retroacção do estado da forma $u(t) = -Kx(t)$ tal que os valores próprios do sistema controlado estejam em -2 e -3.

e) Suponha que pretende estimar o estado a partir do conhecimento da entrada e das observações do sinal de saída. Determine o vector de ganhos $L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$ tal que o erro de estimação tenda para zero com valores próprios -10 e -10.

f) Considere o controlador que leva o estado para zero e em que o controlo é dado pela retroacção das estimativas do estado obtidas com o observador que dimensionou na alínea e), $u(t) = -K\hat{x}(t)$, e em que o vector de ganhos K é o dimensionado na alínea e). Diga quais os pólos do sistema controlado

g) Considere agora que pretende que a saída do sistema siga uma referência constante r. Para tal, usa-se o controlador descrito pelas equações

$$\hat{x} = (A - bK - \dot{L}C)\hat{x} - L(r - y), \qquad u = -K\hat{x}$$

Mostre que o sistema controlado é tal que y tende para a referência r.

P3. Considere duas espécies animais que competem entre si pelo mesmo alimento. Designando por x_1 e x_2 o número de efectivos de cada uma das espécies, a interacção entre ambas é representada pelo modelo de estado

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - \beta x_2),$$
$$\dot{x}_2 = x_2(1 - x_2 - \beta x_1),$$

em que $\beta > 0$ é um parâmetro que traduz a interacção entre as duas espécies.

a) Calcule, em função de β, o ponto de equilíbrio em que ambas as populações são diferentes de zero.

b) Calcule em função de β a dinâmica do sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio referido na alínea a).

c) Considere a situação em que $\beta = 0{,}5$. Com base no estudo dos valores próprios do sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio referido, diga se as espécies podem coexistir ao longo do tempo.

d) Considere as situações mais gerais em que $\beta < 1$ e em que $\beta > 1$. O que pode dizer em ambos os casos sobre a coexistência das populações?

e) Diga qual das afirmações é verdadeira:

A. As espécies podem coexistir se a interacção entre eles estiver abaixo de um dado limiar.

B. As espécies podem coexistir se a interacção entre elas estiver acima de um dado limiar.

P4. Considere o diagrama de blocos do servomecanismo realimentado que se mostra na figura 4-1. Neste sistema de controlo de posição, o sinal de entrada u de um motor de corrente contínua é aplicado por um actuador cuja característica é descrita por uma função não linear f aplicada ao erro de seguimento.

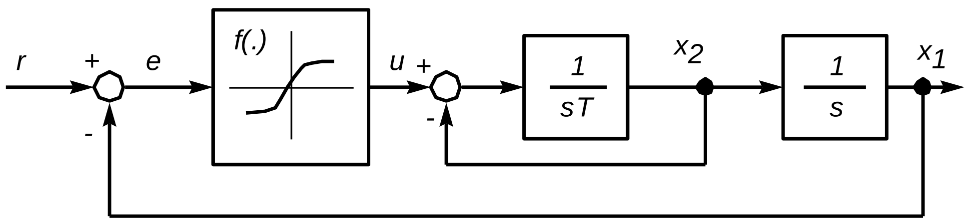

Fig. 4-1. Problema P4. Servomecanismo com um actuador não linear.

Sabe-se que esta função é tal que

$$f(e) > 0 \text{ para } e > 0; \quad f(e) = 0 \text{ para } e = 0; \quad f(e) < 0 \text{ para } e < 0$$

Isto significa que:

$$\int_0^e f(\sigma)\, d\sigma > 0 \quad \text{para} \quad e \neq 0$$

A referência r é constante no tempo.

As variáveis x_1 e x_2 são, respectivamente, a posição angular e a velocidade angular do veio do motor. O parâmetro $T > 0$ é a constante de tempo do motor.

Responda às seguintes perguntas:

a) Para o estado definido pelo erro de seguimento e e pela velocidade angular x_2, escreva as equações de estado correspondentes.

b) Mostre que $V(e, x_2) = \dfrac{T}{2} x_2^2 + \int_0^e f(\sigma)\, d\sigma$ é uma função de Lyapunov para a origem do sistema descrito na alínea a). Diga que conclusões pode tirar sobre a estabilidade para este ponto de equilíbrio.

c) Diga que conclusões pode tirar pela aplicação do Teorema do Conjunto Invariante para o mesmo problema.

P5. Num motor eléctrico de corrente contínua, a relação entre a tensão aplicada *u* (variável manipilada) e a velocidade x é dada (num certo sistema de unidades normalisadas) por

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 2u$$

Pretende-se executar uma manobra que leva o motor da velocidade $x = 10$ à velocidade $x = 20$ em $T = 1$ unidades de tempo, minimizando

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$$

Admite-se que não há restrições na variável manipilada.

Recorrendo ao Princípio de Pontryagin, determine a evolução no tempo óptima da tensão a aplicar ao motor para executar a manobra.

Ajudas: Dois pares de Transformadas de Laplace úteis:

$$e^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad\qquad e^{-at} - e^{-bt} \leftrightarrow \frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t)\, f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda'\, f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$