1. a) $X_1 = \frac{\alpha}{s+1} U \rightarrow \dot{x}_1 = -x_1 + \alpha u$

$X_2 = \frac{1}{s+2} U \rightarrow \dot{x}_2 = -2x_2 + u$

$X_3 = \frac{5}{s}(X_1 + X_2) \rightarrow \dot{x}_3 = 5x_1 + 5x_2$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

---

1. b) $H(s) = \left(\frac{\alpha}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right)\frac{5}{s} =$

$$= 5(\alpha+1)\frac{s + \frac{2\alpha+1}{\alpha+1}}{s(s+1)(s+2)}$$

Há perda de controlabilidade e/ou observabilidade se existir um cancelamento de pólos e zeros. Isto sucede nos seguintes casos

(*) $\frac{2\alpha+1}{\alpha+1} = 0$ (***) $\frac{2\alpha+1}{\alpha+1} = 2$

(**) $\frac{2\alpha+1}{\alpha+1} = 1$

Analisam-se a seguir estes casos: c)

(*) $2\alpha+1=0 \wedge \alpha \neq -1$

$\alpha=-\frac{1}{2}$

(**) $\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}=1$

$2\alpha+\cancel{1}=\alpha+\cancel{1} \rightarrow \alpha=0$

~~(***)~~ $2\cancel{\alpha}+1=2\cancel{\alpha}+2$

$\Longleftrightarrow$

$1=2$

Logo, não há nenhum valor de α que transforme (***) numa igualdade verdadeira.

Conclusão: Apenas para $\alpha=0$ e $\alpha=-\frac{1}{2}$ pode haver perda de controlabilidade e/ou observabilidade (uma destas coisas tem de ser certeza).

1.c) $\mathcal{O}=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$

$CA=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$ ✓

$$CA^2 = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ -5 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{O} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = -50 + 25 = -25 \neq 0$$

Logo é observável $\forall \alpha$.

P2. a) A_1: $\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2$

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$$

A_2: $\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2$

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$$

No caso das matrizes A_1 e A_2 os valores próprios são imaginários puros, pelo que a origem é um centro, sendo as trajectórias de estado curvas fechadas (com D).

No caso de A_1:

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -x_1$

Tomando um ponto sobre o eixo $x_1 > 0$ é $x_2 = 0$ e $\dot{x}_1 = 0$ (a trajectória cruza x_1 perpendicularmente) e $\dot{x}_2 < 0$ (sentido: para baixo).

Assim, $A_1 \to D$ e $A_2 \to C$

A_3: $\begin{vmatrix} \lambda & -1.5 \\ -1.5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.5^2$

$\lambda_1 = 1.5 \qquad \lambda_2 = -1.5$

Sendo os valores próprios reais e de sinais contrários trata-se de um ponto de sela.

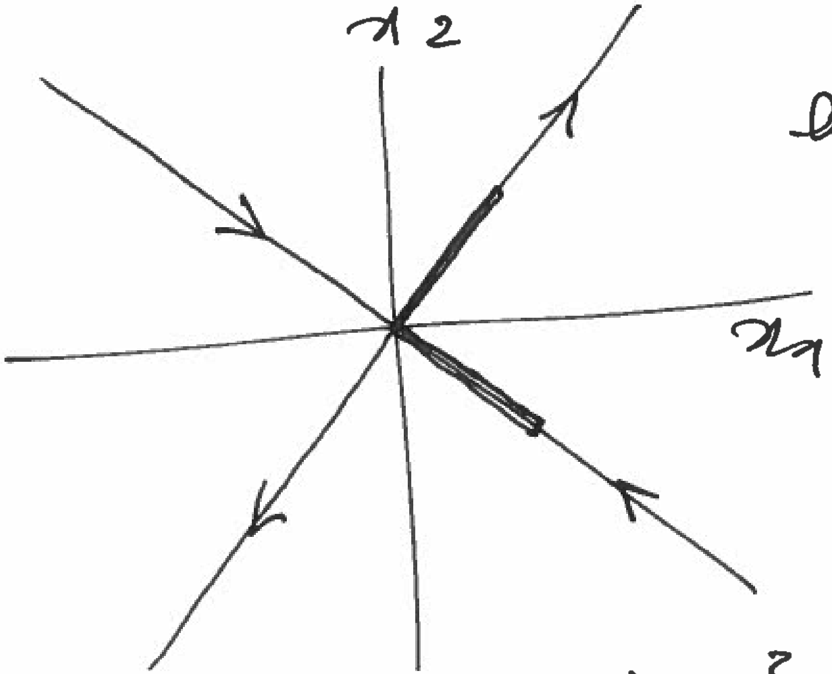
Vectores próprios:

$\lambda_i v_1^i - 1.5\, v_2^i = 0$

$v_1^i = 1 \qquad v_2^i = \dfrac{\lambda_i}{1.5}$

$\lambda_1 = 1.5 \qquad \lambda_2 = -1.5$

$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



logo $A_3 : \to A$

$$A4: \begin{vmatrix} \lambda+\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \lambda-\frac{5}{3} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{5^2}{3^2} + \frac{4^2}{3^2} = \lambda^2 - 1$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-1)$$

$$\lambda_i + \frac{5}{3} + \frac{4}{3} v_2^i = 0$$

$$v_2^i = -\frac{3}{4}\lambda_i - \frac{5}{4}$$

$$\lambda_1 = +1$$

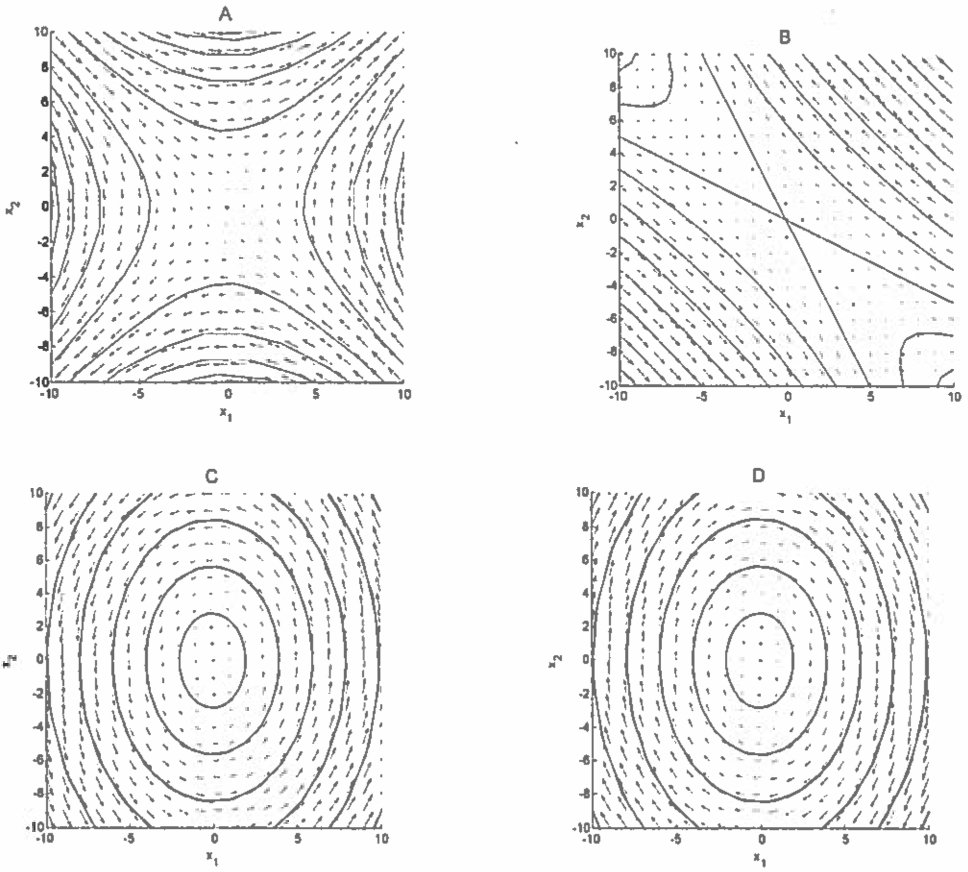
$$v_2^1 = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1$$

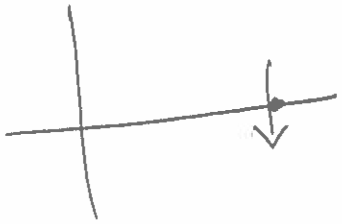
$$v_2^2 = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2} \qquad v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Correcção da fig. P2-1.



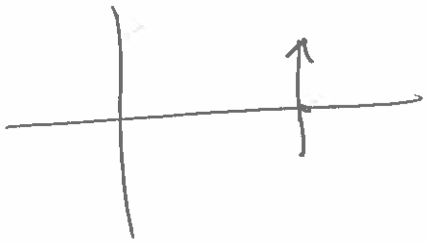
A) A3
B) A4
C) A2
D) A1

$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 \end{array}$

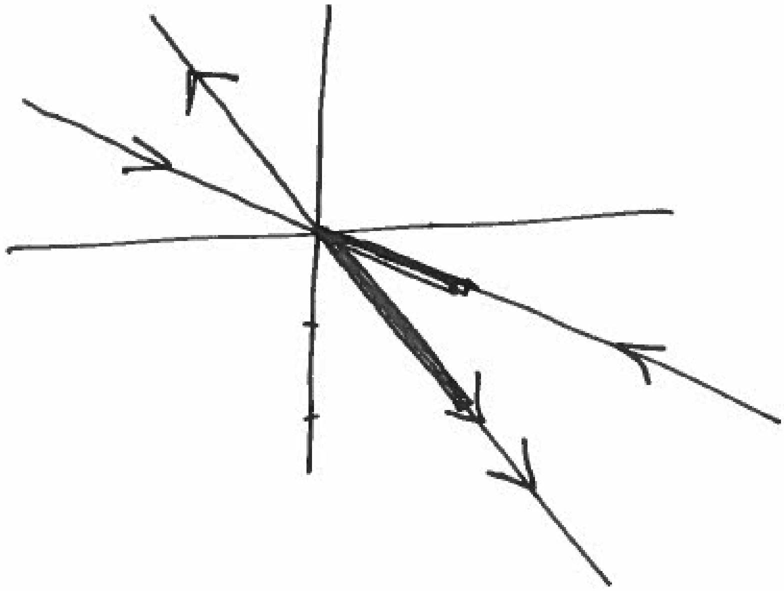


D

$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \end{array}$



C



logo $A_4 \to B$

Conclusão:

A — A_3

B — A_4

C — A_2

D — A_1

P2 b)

$$x(t) = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1.5t} + K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-1.5t}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = 1 \\ K_1 - K_2 = 0 \end{cases}$$

$2K_1 = 1 \qquad K_1 = \frac{1}{2} \qquad K_2 = \frac{1}{2}$

$$x^1(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1,5t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-1.5t}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = 0 \\ K_1 - K_2 = 1 \end{cases}$$

$2K_1 = 1$ $\qquad$ $K_1 = \frac{1}{2}$

$$K_2 = K_1 - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$x^2(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1,5t} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-1.5t}$$

P2 - c)

$$e^{A_3 t} = \left[x^1(t) \,\vdots\, x^2(t) \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,5\,e^{1,5t} + 0,5\,e^{-1,5t} & 0,5\,e^{1,5t} - 0,5\,e^{-1,5t} \\ 0,5\,e^{1,5t} - 0,5\,e^{-1,5t} & 0,5\,e^{1,5t} + 0,5\,e^{-1,5t} \end{bmatrix}$$

P3-a) $\alpha_c(s) = (s+4)^2 + 16 = s^2 + 8s + 32$ 8/

$$A - bK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 - 25 & -K_2 \end{bmatrix}$$

$\alpha_K(s) = \det(sI - A + bK) =$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 \\ K_1 + 25 & s + K_2 \end{vmatrix} = s^2 + K_2 s + K_1 + 25$$

$$\begin{cases} K_2 = 8 \\ 25 + K_1 = 32 \end{cases} \quad \begin{cases} K_1 = 7 \\ K_2 = 8 \end{cases}$$

P3-b) $\alpha_o(s) = (s+10)^2 + 100 = s^2 + 20s + 200$

$$A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 - L_1 \\ -25 & -L_2 \end{bmatrix}$$

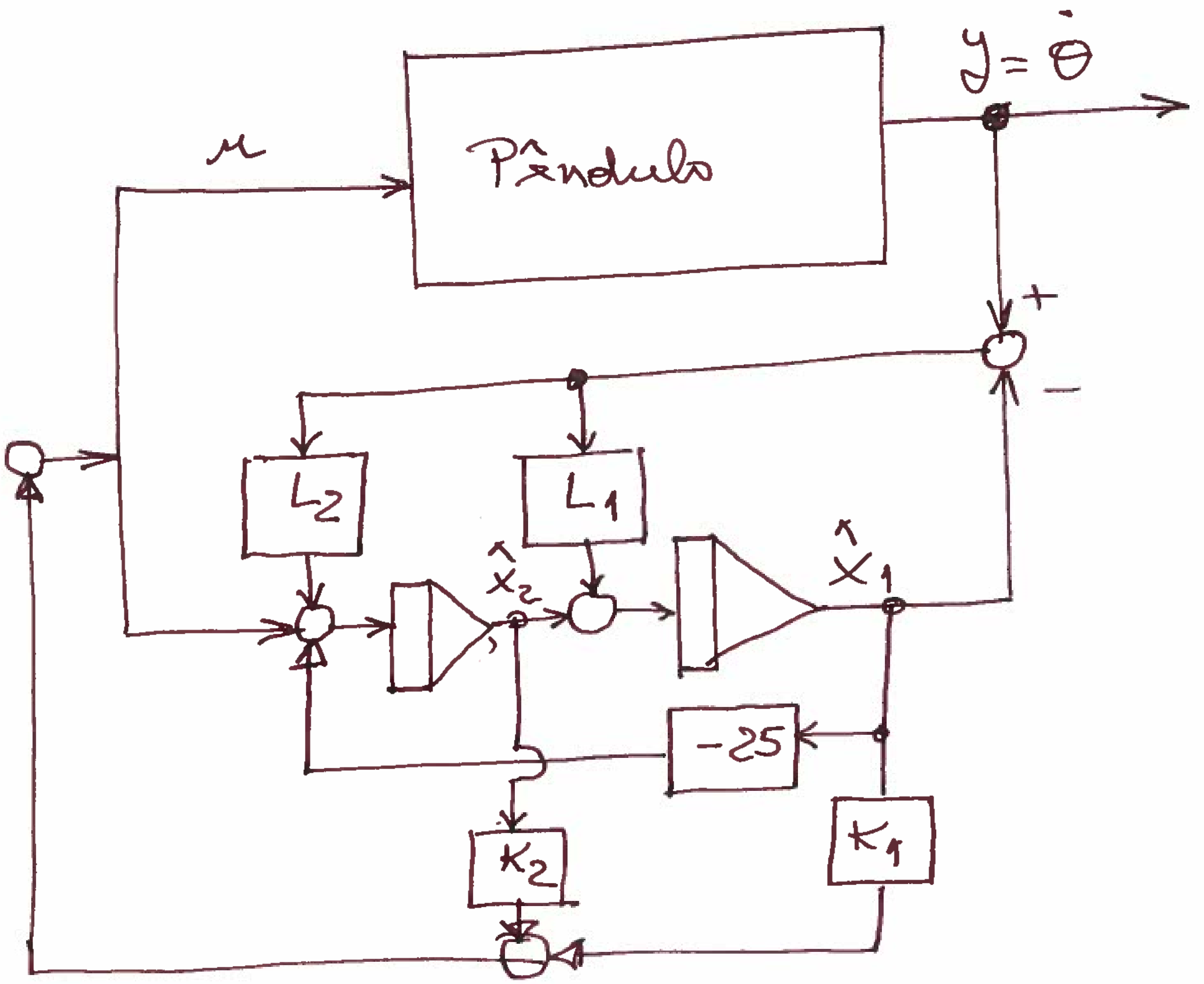
$\alpha_L(s) = \det(sI - A + LC) =$

$$= \begin{vmatrix} s & L_1 - 1 \\ 25 & s + L_2 \end{vmatrix} = s^2 + L_2 s - (L_1 - 1)25$$

$L_2 = 20 \qquad -(L_1 - 1)25 = 200$

$L_1 = -7 \qquad L_2 = 20$

P3 - c)



P4 a) $\dot{y} = 0 \quad y(0) = 1$

b) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

c) $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} s-a & -b \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1}=$$

$$=\frac{1}{s(s-a)}\begin{bmatrix} s & 0 \\ b & s-a \end{bmatrix}^{T}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{s-a} & \frac{b}{s(s-a)} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\frac{b}{s(s-a)}=\frac{-\frac{b}{a}}{s}+\frac{\frac{b}{a}}{s-a}=\frac{b}{a}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s}\right)$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{at} & \frac{b}{a}\left(e^{at}-1\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=e^{At}\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{at} & \frac{b}{a}\left(e^{at}-1\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$y(t)=1$ (tal como esperado!)

$$x(t)=e^{at}x(0)+\frac{b}{a}\left(e^{at}-1\right)$$

e^{At} também pode ser facilmente calculado a partir dos valores próprios e vectores próprios de A.