CONTROLO EM ESPAÇO DE ESTADOS
LEEC, IST

Duração: 3horas
13 de Julho de 2004

Q.1 [9 v] Considere um sistema a controlar com entrada u e saída y, que admite a representação em espaço de estados

$$\frac{dx_1}{dt} = +x_1 + u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1$$
$$y = x_2$$

A função de transferência correspondente é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s-1)}$$

(note que o sistema a controlar é instável em malha aberta). Pretende-se projectar um sistema de controlo da saída y recorrendo a uma de duas estratégias possíveis: *controlo em malha aberta*, e *controlo em malha fechada.* As questões que se seguem focam as duas estratégias.

Controlo em Malha Aberta.

1.a [2 v] –Considere o seguinte problema simplificado: suponha que $x_1 = x_2 = 0$ no instante inicial $t=0$. Prove que, dados *um instante* $T>0$ e um *número real arbitrário* ξ, existe uma entrada $u(t)$; $t \in [0,T]$ tal que

$$[\, x_1(T), x_2(T)]' = [0,\ \xi]'$$

1.b [1 v] – De acordo com o resultado da alínea anterior, é sempre possível transitar do estado $[0,\ 0]'$ para $[0,\ \xi]'$ num intervalo arbitrário $[0,T]$. No entanto, nada se diz àcerca da função temporal de entrada $u(t)$ que efectua essa transição. Prove justificadamente se a função

$$u(t) = Ze^{+t} \sin \frac{2\pi}{T} t; t \in [0,T],$$

com Z convenientemente escolhido, permite de facto efectuar essa transição. ***Sugestão:*** calcule a matriz de transição associada à realização do sistema acima indicado e calcule explicitamente a evolução de $[\, x_1(t), x_2(t)]'$. Para o cálculo da matriz de transição, utilize a expressão que envolve a transformada inversa de Laplace.

Controlo em Malha Fechada.

Pretende-se agora desenvolver uma estratégia de controlo em malha fechada que resulte da combinação de um regulador (retroacção de estado) e um observador para o sistema.

Regulador.

1.c [0.5 v] – Dado o sistema com a realização acima indicada, mostre que é possível, com uma estratégia de retroacção de estado $u= - [K_1\ K_2]\ [x_1, x_2]'$, colocar de modo arbitrário os valores próprios do regulador resultante.

1.d [1 v] – Calcule os ganhos de retroacção $K=[K_1\ K_2]$ tais que os valores próprios do regulador sejam iguais às raízes do polinómio $\lambda^2+1.4\lambda+1$ (polos de um sistema de segunda ordem com frequência natural $w_n=1\ rad\ s^{-1}$ e grau de amortecimento $\xi=0.7$).

1.e [1 v] – Pretende-se agora projectar um observador para o sistema que, com base em medições da saída y e da entrada u, produza estimativas do estado $[x_1(t), x_2(t)]'$. Mostre que é possível colocar de modo arbitrário os valores próprios do observador por escolha adequada dos ganhos de observação $L=[L_1\ L_2]'$.

1.f [1 v] – Calcule os ganhos de observação $L=[L_1\ L_2]'$ tais que os valores próprios do observador sejam iguais às raízes do polinómio $\lambda^2+14\lambda+100$ (polos de um sistema de segunda ordem com frequência natural $w_n=10\ rad\ s^{-1}$ e grau de amortecimento $\xi=0.7$).

1.g [1.5 v] – Represente num diagrama a estrutura do sistema de controlo total que consiste no sistema a controlar, regulador, e controlar. Calcule os valores próprios do sistema total.

1.h [1 v] – Modifique o diagrama do sistema total de controlo da alínea 1.g de modo a mostrar que ele exibe a estrutura *clássica de um sistema de regulação* envolvendo o sistema a controlar e um controlador. Como parte desta questão, calcule explicitamente a função de transferência equivalente do regulador + observador. Diga como modificaria o regulador de modo a obter um servomecanismo em que a saída saída $y=x_2$ segue, com erro estático igual a zero, sinais de comando r constantes no tempo.

Q.2 [6 v] **Controlo Não Linear**. Considere um corpo rígido que roda no espaço em torno de um eixo vertical sob a acção de um binário aplicado u. Sejam ω e θ respectivamente a velocidade de rotação do corpo e a sua posição angular. Pretende-se controlar a posição angular do corpo recorrendo ao sistema de controlo simples representado na Figura 1, onde $G(s)=\Theta(s)/U(s)=1/s^2$ denota a função de transferência do corpo rígido com entrada u e saída θ. Devido a constrições tecnológicas, o binário u só pode assumir três valores de acordo com a seguinte função (repare na existência de uma zona morta):

$$u = \begin{cases} +1, & e \geq +1 \\ 0, & -1 < e < +1 \\ -1, & e \leq -1 \end{cases}$$

2.a [3 v] – Faça r=o, isto é, suponha que se pretende levar a coordenada posição do corpo para zero. Mostre *justificadamente* que o sistema de controlo proposto não permite estabilizar assimptóticamente o sistema em torno do ponto de equilíbrio $\omega=\theta=0$. Para isso, trace explicitamente as trajectórias do sistema no plano de fase adequado utilizando o método das isoclínicas. Mostre que existem: i) um *número infinito de ciclos limite* com amplitudes que nunca se aproximam de zero; ii) um *número infinito de pontos de equilíbrio. Sugestão:* particione convenientemente o espaço de estados em três regiões e determine de modo aproximado a evolução das trajectórias do sistema de controlo em cada uma dessas regiões.

2.b [3 v] – Confirme o verificado na alínea 2.a recorrendo ao método da função descritiva. Sugestão: para o cálculo da função descritiva do elemento não linear, analise cuidadosamente os casos em que a amplitude da função de teste sinusoidal *e(t)* é: i) superior a +1, e ii) menor ou igual a +1.

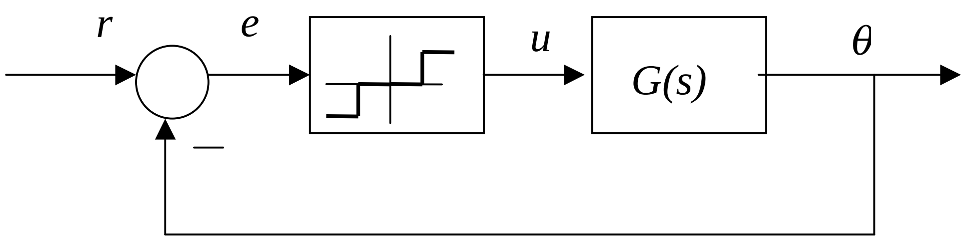

Fig. 1. Controlo "on-off" com zona morta; $G(s)=\Theta(s)/U(s)=1/s^2$

Q.3 [5 v] Controlo Óptimo. Considere o modelo do sistema a controlar introduzido em Q.1. Pretende projectar-se um sistema de regulação para conduzir o estado para zero. No entanto, e ao contrário da situação explicitada em Q.1, tem-se agora acesso ao estado completo. Opta-se por isso pelo projecto de um sistema de controlo com base na teoria do ***regulador óptimo*** por retroacção de estado. Para isso, considere o critério de custo quadrático

$$J(u) = \int_0^\infty y^2(t) + \rho u^2(t)dt$$

onde $y=x_1+x_2$ capta a "penalização" dos desvios de x_1 e x_2 em relação a zero, e $\rho>0$ é um factor de penalização da energia dispendida.

Mostre que o problema de minimização do critério de custo adoptado admite uma solução única por retroacção de estado que estabiliza o sistema em malha fechada. Discuta o padrão de evolução dos valores próprios do regulador resultante em função de ρ>0. *Sugestão:* utilize o método de Chang-Letov para traçado dos valores próprios do regulador e analise as situações *m=0.1* e *m=10.*