**Mestrado Integrado em**

**Engenharia Electrotécnica e de Computadores**

# Controlo Em Espaço de Estados

## 2012/2013 – Segundo Teste

21 de Maio de 2013, 20 horas - salas F2,F3,F4 **Duração 2 horas**

**Não é permitida consulta nem calculadoras programáveis**

**Quotação:** P1-a)1 b)4 P2-a)2 b)2 c)2 P3-a)4 b)1 c)1 P4) 3

**P1.** Considere o seguinte sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

a) Mostre que a origem é um ponto de equiíbrio.

b) Recorrendo ao 2º método de Lyapunov, com uma função de Lyapunov tentativa da forma

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

diga o que pode concluir sobre a estabilidade local do ponto de equilíbrio referido na alínea a).

**P2.** Considere o diagrama de blocos do servomecanismo realimentado que se mostra na fig. P2-1. Neste sistema de controlo de posição, o sinal de entrada $u$ de um motor de corrente contínua é aplicado por um actuador cuja característica é descrita por uma função não linear $f$ (conhecida) aplicada ao erro de seguimento.

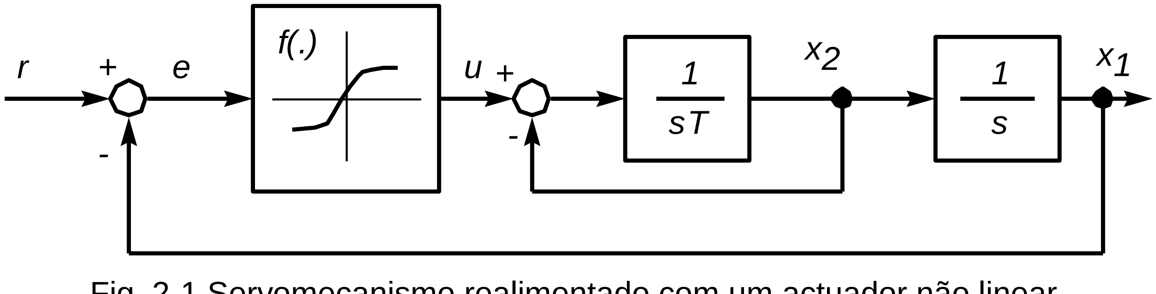


Fig. 2-1 Servomecanismo realimentado com um actuador não linear.

Sabe-se que esta função é tal que

$$f(e) > 0 \text{ para } e > 0; \quad f(e) = 0 \text{ para } e = 0; \quad f(e) < 0 \text{ para } e < 0$$

Isto significa que:

$$\int_0^e f(\sigma)\,d\sigma > 0 \quad \text{para} \quad e \neq 0$$

A referência $r$ é constante no tempo.

As variáveis $x_1$ e $x_2$ são, respectivamente, a posição angular e a velocidade angular do veio do motor. O parâmetro $T > 0$ é a constante de tempo do motor.

Responda às seguintes perguntas:

a) Considere o estado definido pelo erro de seguimento $e$ e pela velocidade angular $x_2$. Escreva as equações de estado (não-lineares) correspondentes. Estas equações dependem da função $f$.

b) Mostre que

$$V(e, x_2) = \frac{T}{2}x_2^2 + \int_0^e f(\sigma)\,d\sigma$$

é uma função de Lyapunov para a origem do sistema descrito na alínea a). Diga que conclusões pode tirar sobre a estabilidade para este ponto de equilíbrio.

c) Diga que conclusões pode tirar pela aplicação do Teorema do Conjunto Invariante para o mesmo problema relativamente ao erro em regime estacionário.

**P3.** Uma empresa imobiliária tem um conjunto de apartamentos que pode explorar, durante o intervalo de tempo de $T$ anos. A empresa pode vender os apartamentos, situação em que recebe uma dada quantidade de dinheiro no momento da venda, mas não receberá mais nenhum lucro no futuro, após a venda. Pode ainda alugar os apartamentos. Para simplificar admite-se que os apartamentos podem ser vendidos com uma área arbitrária, e que a renda recebida pelos apartamentos não vendidos é proporcional ao tempo em que são detidos.

Seja $A$ a área total inicial dos apartamentos. Desta área, uma área $x$ é a área dos apartamentos vendidos, sendo a área remanescente, $A-x$, ocupada pelos apartamentos alugados para rendimento. Por forma a poder usar um modelo na forma de uma equação diferencial, admitimos que $x$ é uma variável real que pode tomar qualquer valor entre $0$ e $A$, e que o ritmo $u$ com que a empresa vende os apartamentos pode também tomar qualquer valor entre $0$ e u valor máximo $u_{max}$. Tem-se assim que

$$\frac{dx}{dt} = u \tag{5-1}$$

No instante em que a empresa inicia a sua actividade, não há apartamentos vendidos, pelo que se tem a condição inicial:

$$x(0) = 0 \tag{5-2}$$

A empresa desenvolve a sua actividade durante um intervalo de tempo de $T$ anos (fixo à partida). Admite-se que ao fim deste tempo não foram vendidos todos os apartamentos. O problema consiste em saber como é que deve ser o ritmo de vendas $u$ por forma a maximizar

$$J = \int_0^T \left(A - x(t) + \rho\, u(t)\right) dt \tag{5-3}$$

em que $\rho > 0$ é um parâmetro fixo, satisfazendo a restrição

$$0 \le u \le u_{max}$$

Responda às seguintes questões:

a) Determine a função $u(t)$ no intervalo de tempo $t \in [0, T]$, que maximiza $J$ dado por (5-3).

b) Represente graficamente as funções $u(t)$ e $x(t)$ no intervalo de tempo $t \in [0, T]$ quando é utilizado o controlo óptimo.

c) Calcule o correspondente valor óptimo de $J$.

*Ajudas úteis:* As informações seguintes são úteis para resolver este problema.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x)\big|_{x=x(T)}$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

**P4.** Considere o sistema não linear

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x) \qquad x \in R^n \tag{P4-1}$$

em que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio isolado e a função $g$ verifica

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$$ e $g(0) = 0$. Por outras palavras, $$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{P4-2}$$

é a linearização de (P4-1) em torno da origem.

Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov, mostre que se $A$ tem todos os valores próprios com parte real negativa, então a origem ($x = 0$) é um ponto de equilíbrio assimptoticamente estável do sistema não linear (P4-1). *Ajudas:*

i) Desigualdade de Schwarz:

$$\left|x^T y\right| \le \|x\| \cdot \|y\| \qquad x,\ y \in R^n$$

ii) Sendo $P$ uma matriz de elementos reais e $x \in R^n$, tem-se

$$\|Px\| \le \sigma_{\max} \|x\|$$

em que $\sigma_{\max}$ é o máximo valor singular da matriz $P$. Os valores singulares de uma matriz de elementos reais $M[m \times n]$ são definidos como

$\sigma_i(M) := \sqrt{\lambda_i(M^T M)}$ em que $\lambda_i$ designa o valor próprio número $i$.

iii) Por definição de limite, se $\lim_{z \to 0} h(z) = a$ para $z \in R$, então

$$\forall_{\delta > 0}, \exists_{\varepsilon > 0} : |z| < \varepsilon \Rightarrow |h(z) - a| < \delta$$