Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2018/2019

24/Maio/2019, 20h00 – 22h00

Segundo Teste

Duração 2 horas

Não é permitida consulta nem uso de funcionalidades programáveis

Quotação: P1a)2b)1,5c)1,5d)1 P2Aa)1b)1c)1d)1e)1P2B-2 P3a)3b)2 P4 a)3 b)1

P1. A mola de folhas que se mostra na figura é usada frequentemente nos sistemas de suspensão de veículos de carga, quer motorizados, quer de tração animal. Ao contrário das molas lineares, que exercem uma força proporcional ao deslocamento, estas molas exercem uma força que varia não linearmente com a amplitude da deslocação. Tomando como variáveis de estado a posição (num dado referencial), x_1, e a velocidade, x_2 ,da massa ligada à mola, considere o modelo de estado não linear para uma suspensão deste tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\beta x_2 - K_1 x_1 - K_2 x_1^3 \end{cases}$$

Tome como valores dos parâmetros $\beta = 0{,}1$, $K_1 = 1$, $K_2 = -0{,}25$.

a) Este sistema tem 3 pontos de equilíbrio. Determine-os.
b) Escreva a matriz jacobiana em cada um dos pontos de equilíbrio.
c) Calcule os valores próprios do sistema linearizado em torno de cada um dos pontos de equilíbrio. Apresente todos os cálculos.
d) Com base no modelo linearizado, o que pode dizer sobre a estabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio?

P2. *Neste problema tem duas alternativas, designadas A e B. A alternativa A é mais complicada mas tem um valor mais elevado (5 valores). A alternativa B* *vale apenas 2 valores.* ***Deverá indicar de modo inequívoco qual a alternativa que escolhe. Se responder a ambas, apenas será considerada a resposta a A****, não sendo a outra resposta classificada.*

A) O desvio da temperatura da abóbada de um forno de vidro em relação ao valor desejado, x (escalar), está relacionado com o caudal de combustível queimado, u, através do modelo linear de 1ª ordem, descrito pela equação de estado

$$\dot{x} = ax + u$$

em que a é um parâmetro que corresponde ao pólo do sistema, ou seja, ao inverso da constante de tempo. A figura mostra uma fotografia de um dos queimadores em acção no interior de um forno de vidro.

a) Comece por supor que conhece o parâmetro a. Calcule o ganho K de um controlador de realimentação de x, ou seja, em que a lei de controlo é dada por $u = -Kx$, de tal modo que o sistema controlado se comporte como se tivesse um pólo num valor especificado a_m, ou seja, verifique a equação $\dot{x} = a_m x$. Repare que se admite que x é o desvio em relação ao valor desejado para a temperatura, o que significa que pretendemos levar x para zero e simplifica um pouco o problema.

b) Suponha agora que se desconhece o valor de a, para o que se vai recorrer a uma regra de adaptação. Seja $\hat{a}$ a estimativa de a e $\tilde{a}$ o erro da estimativa. Estas grandezas estão ligadas por $\tilde{a} = \hat{a} - a$. Escreva uma equação diferencial que relaciona x e $\tilde{a}$, quando usa a lei de controlo que deduziu na alínea anterior com a substituído pela sua estimativa $\hat{a}$.

c) Considere a candidata a função de Lyapunov conjunta para o controlo e a estimação, dada por

$$V(x, \tilde{a}) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{\gamma}\tilde{a}^2\right).$$

Obtenha uma lei de ajuste da estimativa $\tilde{a}$ que garanta que esta é uma função de Lyapunov. Escreva esta lei de ajuste numa forma que envolva um integral e que torne explícita a estimativa inicial, $\hat{a}(0)$.

d) Desenhe um diagrama de blocos do sistema com a lei de controlo e a regra de adaptação.

e) O que pode dizer sobre o valor para o qual tende o desvio de temperatura x, com base no teorema do conjunto invariante?

B) Considere o sistema definido pelas equações de estado não lineares

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_1 x_2^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - x_1^2 x_2$$

Para este sistema, a origem ($x_1 = 0,\ \ x_2 = 0$) é um ponto de equilíbrio. Relativamente a este ponto de equilíbrio, tome como candidata a função de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Pergunta: O que pode dizer sobre a estabilidade deste ponto de equilíbrio para o sistema não linear? Mostre todos os cálculos e justifique a sua resposta.

P3. O reinado de Napoleão III decorreu entre 1852 e 1870 e foi um período singular da História da França. Desde logo porque Napoleão III (um sobrinho de Napoleão Bonaparte) começou por ser eleito como 1º presidente da República francesa, para depois se auto-proclamar Imperador. Depois, porque é uma época de contrastes, entre um enorme progresso económico e social (por exemplo, neste período o comprimento da via férrea em França multiplica-se por 5; há legislação muito avançada de proteção social) e uma enorme repressão cultural, em que muitos escritores, hoje famosos e respeitados, foram perseguidos judicialmente pelos temas das suas obras, quer na prosa, quer na poesia. Um desses escritores foi Guy de Maupassant, pela sua obra *Madame Bauvary*, então considerada escandalosa (mas que pelos padrões actuais poderia ser indicada como passatempo de jovens inocentes). Neste romance, descreve-se um coveiro que tinha duas formas de rendimento: Pelos funerais que realizava e por plantar batatas na parte do cemitério não ocupada por túmulos. Para um engenheiro formado pelo IST que leia esta história levanta-se imediatamente o problema: Quando o coveiro aceita um funeral, recebe uma dada quantia para pagamento deste serviço, mas reduz a área em que pode plantar batatas. Qual será então a política óptima de aceitação de funerais que maximize os lucros do coveiro num determinado período? Este problema responde a esta questão.

Seja então x a área ocupada pelos túmulos. Esta variável (escalar) satisfaz o modelo de estado

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad x(0) = 0,$$

em que u é a taxa de aceitação de funerais (variável de controlo) e se assume que o cemitério, inicialmente, estava desocupado. Admite-se ainda que a área varia continuamente. O coveiro tem uma capacidade máxima para realizar funerais, pelo que o controlo u satisfaz

$$0 \leq u \leq u_{max}.$$

Sendo T o período de tempo em que o coveiro gere o cemitério, o lucro total do coveiro é dado por

$$J(u) = \int_0^T [A - x(t) + \rho u(t)]\, dt,$$

em que A é a área total do cemitério e ρ é o quociente de preços dos funerais e das batatas (ou seja, admitindo que o valor das batatas produzidas por unidade de tempo é 1, ρ é o custo de cada funeral). Para simplificar o problema, admite-se que o cemitério não está totalmente ocupado por túmulos no instante T. Responda às seguinte perguntas:

a) Recorrendo ao Princípio do Máximo de Pontryagin, calcule o controlo óptimo, que maximiza $J(u)$. Indique todos os cálculos. Desenhe esboços da Hamiltoniana em função do controlo, e do co-estado, do controlo óptimo e do estado em função do tempo (ver ajudas no fim do teste).

b) Calcule a Hamiltoniana em função do tempo.

P4. Considere o sistema instável descrito pelo modelo de estado

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = 0,$$

em que o estado $x(t) \in \mathbb{R}$, para cada instante t, ou seja, x é escalar.

a) Recorrendo ao Princípio de Pontryagin, determine a lei de controlo que minimiza o custo

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x(t) - r)^2 + \rho(u(t) + r)^2 dt,$$

em que r é uma referência constante a seguir, e $\rho > 0$ é um parâmetro.

Sugestão: Admita que o coestado verifica

$$\lambda(t) = -px(t) + g$$

e obtenha condições para as constantes p e g.

b) Calcule o valor de equilíbrio do estado, em função de r, e mostre que, quando $t \to \infty$, o estado tende para este valor de equilíbrio.

Ajudas úteis

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda,x,u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

Em geral, para um sistema de 2ª ordem:

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$