Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2012/2013 Exame

24 de Junho de 2013, 15 horas – Sala C01

Duração 3 horas

Não é permitida consulta nem o uso de calculadoras programáveis

Quotação: P1-5, P2-5, P3-4, P4-3, P5-3

P1. Considere o sistema linear e invariante de 2ª ordem, descrito pela equação de estado

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 1.1333 & -0.5333 \\ 0.5333 & -1.1333 \end{bmatrix}$$

Responda sucessivamente às seguintes perguntas:

a) Calcule os valores próprios e os vectores próprios da matriz A.

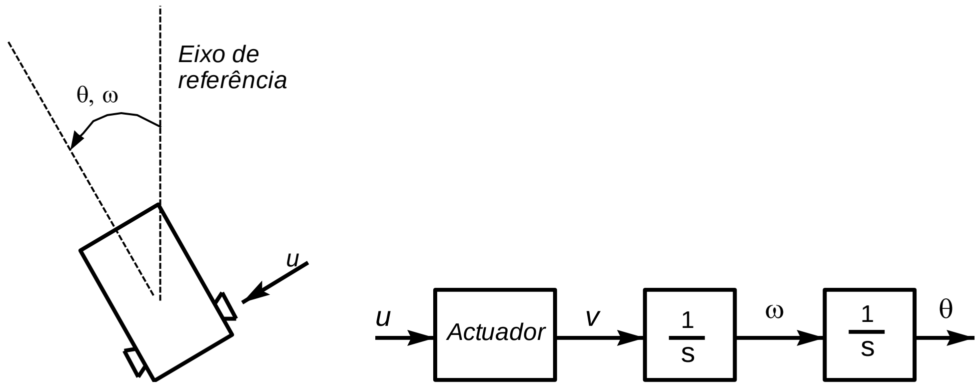
b) Esboce qualitativamente o retrato de fase deste sistema (conjunto de trajectórias do estado partindo de várias condições iniciais) com base na informação que obteve na alínea a).

c) Com base nos valores próprios e nos vectores próprios escreva as soluções da equação diferencial quando a condição inicial é, respectivamente, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e (outra situação) $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d) Recorrendo a um método à sua escolha (uma escolha cuidada poupa trabalho...), calcule a matriz exponencial e^{At}.

e) Suponha que $x(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine $x(4)$.

P2. A figura 2-1 a) representa esquematicamente um satélite cujo movimento de rotação se pretende controlar. A figura 2-1 b) representa o diagrama de blocos de um modelo do movimento de rotação do satélite.



a) b)

Figura 2-1. a) Representação esquemática do satélite com movimento num plano. b) Diagrama de blocos.

O satélite está provido de jactos num dos seus extremos que permitem criar um binário associado ao sinal u que é usado como variável manipulada para controlar o movimento de rotação. Nesta pergunta modele o actuador como um ganho unitário (ou seja, pode ignorá-lo).

a) Escreva as equações de um modelo de estado linear tomando como variáveis de estado $x_1 = \theta$ (posição angular do satélite) e $x_1 = \omega$ (velocidade angular). Tome como saída (o sinal medido directamente pelos sensores) $y = \theta$.

b) Mostre que a realização de estado que obteve em a) é controlável e observável.

c) Suponha que tem acesso à medida directa das duas variáveis de estado. Projecte um controlador de realimentação de variáveis de estado tal que os pólos do sistema em cadeia fechada estejam em $-1 \pm 0{,}2j$. Considere o problema de regulação em que a referência é zero.

d) Projecte um observador que permita estimar o estado a partir das observações da entrada e da saída, por forma que os valores próprios da equação de erro estejam ambos em -10.

e) Represente um diagrama de blocos em que mostre o sistema, o observador, e o controlador que projectou. Use apenas blocos “básicos” (integradores, multiplicação por constantes e somas algébricas).

P3. Atenção: *Neste problema tem dois enunciados alternativos. A primeira alternativa corresponde à quotação completa (4 valores). A segunda corresponde a uma cotação máxima de 2 valores nesta pergunta. Indique claramente na sua resposta qual a alternativa que escolhe. Se responder às duas alternativas, mesmo que parcialmente, apenas será classificada a primeira.*

Alternativa P3A) (4 valores) Considere de novo o satélite do problema P2, mas suponha agora que o controlo é dado pela realimentação não linear do estado definida por

$$u = -g(x_2) - h(x_1)$$

Em que as funções $g(.)$ e $h(.)$ satisfazem as propriedades

$$g(0) = 0 \ , \quad h(0) = 0 \,,$$

$$\omega g(\omega) > 0 \text{ para } \omega \neq 0$$

$$\theta h(\theta) > 0 \text{ para } \omega \neq 0 \,.$$

Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov e ao Teorema do Conjunto Invariante, mostre que a posição e a velocidade angulares tendem ambas para zero.

Alternativa P3B) (2 valores)

Considere o sistema autónomo (isto é, sem entrada), de 2ª ordem, descrito pelo sistema de equações não lineares

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

a) Mostre que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema. Obtenha as equações do sistema linearizado em torno da origem. Classifique a origem em termos dos valores próprios do sistema linearizado. Diga o que pode concluir daqui sobre o comportamento em torno da origem do sistema não linear.

b) Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov, e tomando como candidata a função de Lyapunov a função $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$, o que pode dizer sobre a origem do sistema não linear?

P4. Considere de novo o modelo do satélite do problema P2. Considere que o actuador é modelado por uma constante unitária (ou seja, ignore o actuador). Determine a função de controlo $u(t)$, definida no intervalo $0 \leq t \leq T$ que permite levar o estado da condição inicial $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ ao estado no instante T definido por $x_1(T) = \alpha$, $x_2(T) = 0$, minimizando o funcional

$$J = \int_0^T u(t)dt$$

sujeito à restrição da varivale manipulada

$$0 \leq u \leq u_M .$$

Ou seja, pretende-se rodar o satélite de uma situação em que se encontra parado e a apontar para o eixo de referência, para uma posição em que se encontra parado e a apontar para um ângulo α dado, fazendo esta manobra de modo a minimizar o consumo de combustível (supondo que este é proporcional ao binário).

Suponha que o intervalo de tempo T em que a manobra deve ser executada é suficientemente longo para satisfazer

$$T > \sqrt{\frac{2\alpha}{u_M}} .$$

Represente graficamente um esboço da evolução temporal do controlo e do estado. Represente ainda graficamente todos os elementos adequados para explicar o seu raciocínio na obtenção do controlo.

Ajudas úteis: As informações seguintes são úteis para resolver este problema.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t))$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

P5. Considere a realização de estado em tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) \qquad \dim x = n$$

$$y(k) = Cx(k).$$

Mostre que esta realização de estado é completamente observável se

$$car \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n.$$