CEE 2012|2013 - 2º Teste.

P 1.

a) Na origem

$$\dot{x}_1 = -0^3 + 0 \times 0^2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = -2 \times 0^2 \times 0 - 0^2 = 0$$

Dado que as derivadas se anulam neste ponto, a origem é um ponto de equilíbrio.

b) $V(x_1, x_2) > 0 \quad \forall x \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$V(0,0) = 0$$

V é contínua e com primeiras derivadas.

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 =$$

$$= -x_1^4 + x_1^2 x_2^2 - 2 x_1^2 x_2^2 - x_2^4 =$$

$$= -\left(x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4\right) < 0$$

Logo a origem é um ponto de equilíbrio assimptoticamente estável no sentido de Lyapunov.

P2.

a) $e = r - x_1$

$\dot{e} = -\dot{x}_1 = -x_2$

$$\boxed{\dot{e} = -x_2}$$

$$\boxed{\dot{x}_2 = \frac{1}{T}\left(f(e) - x_2\right)}$$

b) $V(0,0) = \frac{T}{2} 0^2 + \int_0^0 f(\sigma)\, d\sigma = 0$

Dada a propriedade de f,

$\int_0^e f(\sigma)\, d\sigma > 0 \quad \forall_e \neq 0$

pelo que, para $[e, x_2] \neq [0, 0]$

é $V(e, x_2) > 0$.

$\dot{V} = T x_2 \dot{x}_2 + f(e)\dot{e}$

$= \cancel{x_2 f(e)} - x_2^2 - \cancel{f(e) x_2}$

$= -x_2^2 \leq 0$

Logo, pelo teorema de Lyapunov a origem é pelo menos estável no sentido de Lyapunov.

c) Pelo teorema do Conjunto Invariante, todas as trajectórias tendem para o maior conjunto invariante contido no conjunto $\{x : \dot{V} = 0\}$.

Neste conjunto $x_2 = 0$ pelo que $\dot{x}_2 = 0$. Da equação de estado para x_2 vem assim neste conjunto:

$$0 = \frac{1}{J}\left(f(e) - 0 \right)$$

pelo que $f(e) = 0$. Pelas propriedades de $f(e)$, isto implica que $e = 0$.

Assim, todas as trajectórias tendem para um estado em que $e = 0$, ou seja, $x_1 \to r$.

P3.

a) $f = u \quad f_x = 0$

$\psi(x(T)) = 0 \quad \psi_x \big|_{x = x(T)} = 0$

$L = A - x + \rho u$

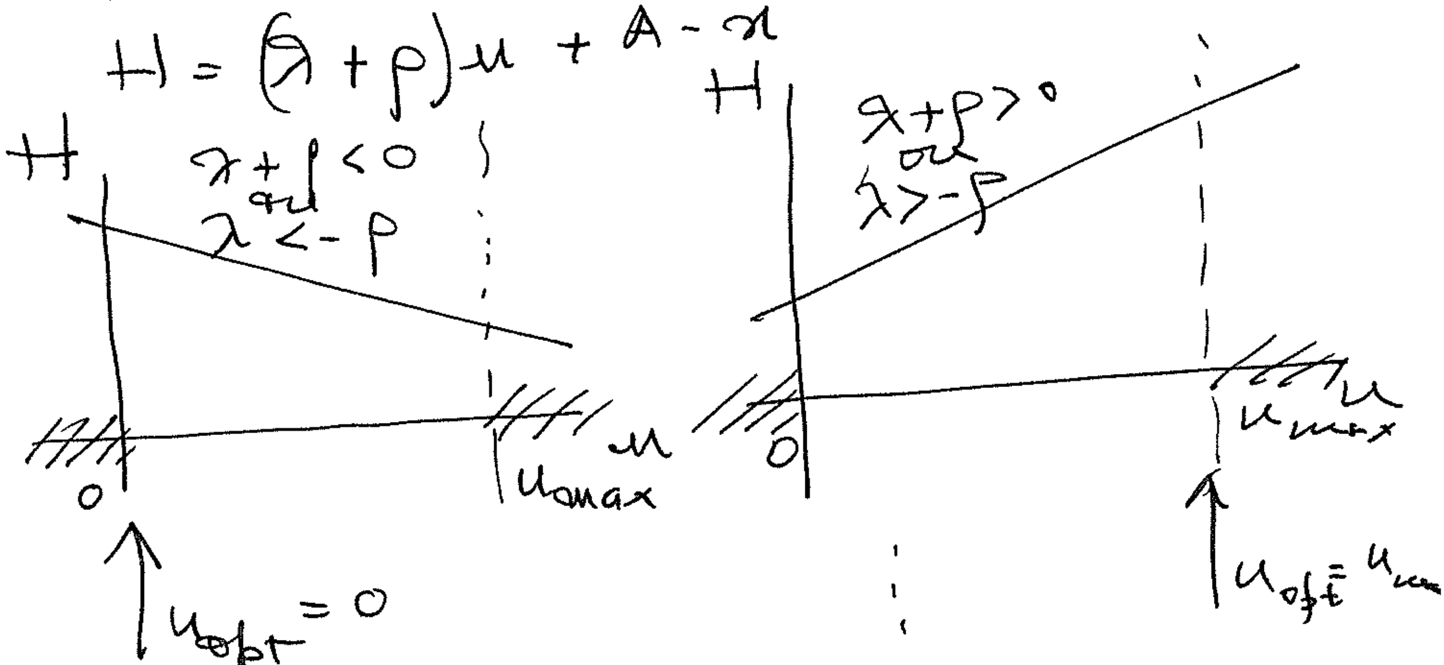
$L_x = -1$

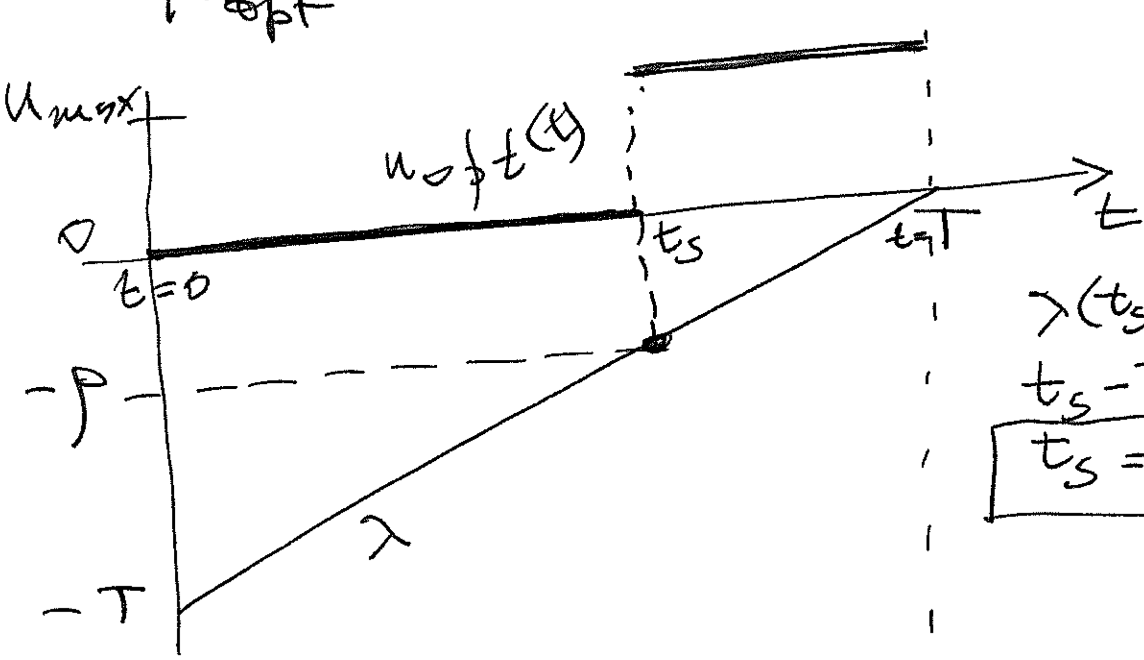
$\dot{\lambda} = 1 \quad \lambda(T) = 0$

$\lambda(t) = t - T$

$H = \lambda u + A - x + \rho u$

$H = (\lambda + \rho) u + A - x$



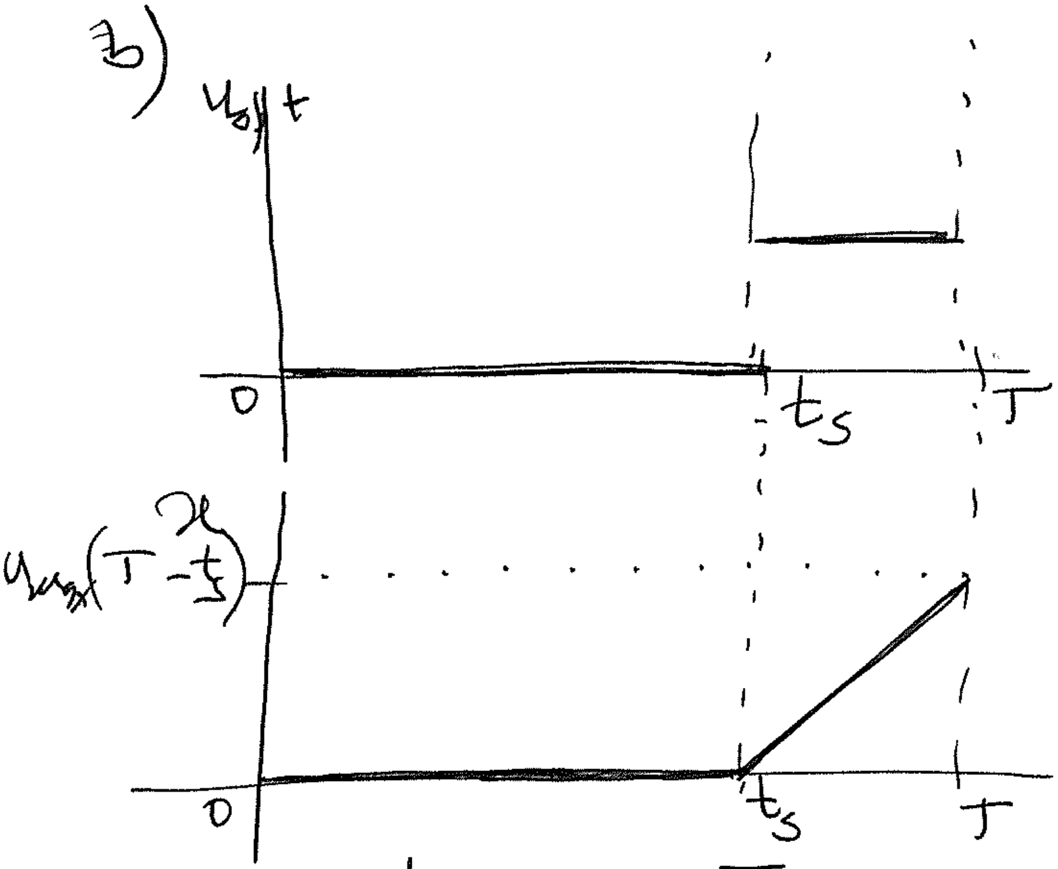


$\lambda(t_s) + \rho = 0$

$t_s - T + \rho = 0$

$$\boxed{t_s = T - \rho}$$

b)



c) $$J = \int_0^{t_s} A\, dt + \int_{t_s}^{T} (A - x + \rho u)\, dt =$$

$$= A t_s + A(T - t_s) - \frac{1}{2}(T - t_s)^2 u_{max} + \rho\, u_{max}(T - t_s)$$

$$= AT - \frac{1}{2}\rho^2 u_{max} + \rho^2 u_{max}$$

$$= AT + \frac{1}{2}\rho^2 u_{max}$$

P4 -

Dado que A tem todos os valores próprios com parte real negativa, existe $P = P^T > 0$ que satisfaz a equação de Lyapunov

$$A^T P + P A = -I$$

Considere-se a candidata a função de Lyapunov

$$V(x) = x^T P x .$$

Tem-se

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$= \left(x^T A^T + g^T(x)\right) P x + x^T P \left(A x + g(x)\right) =$$

$$= x^T \left(A^T P + P A\right) x + 2 x^T P g(x) =$$

$$= - x^T x + 2 x^T P g(x)$$

$$= -\|x\|^2 + 2 x^T P g(x) \qquad (1)$$

Pela desigualdade de Schwartz,

$$\left| x^T P g(x) \right| \leq \|x^T P\| \cdot \|g(x)\| =$$

$$= \|P x\| \cdot \|g(x)\| \leq \sigma_{max} \|x\| \cdot \|g(x)\| \qquad (2)$$

Como

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$$

vem

$$\forall \delta>0 \ \exists \varepsilon>0 : \|x\|<\varepsilon \Rightarrow \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} < \delta$$

Seja ε escolhido tal que

$$\delta = \frac{2}{\sigma_{max}}$$

Na região definida por $\|x\|<\varepsilon$, com ε correspondente a este δ,

Tem-se $\|g(x)\| < \frac{2}{\sigma_{max}} \|x\|$

Assim, por (2)

$$|\cancel{2} x^T P g(x)| < \cancel{\sigma_{max}} \|x\| \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sigma_{max}}} \|x\|$$

ou seja

$$|x^T P g(x)| < \|x\|^2$$

Por (1) conclui-se que

$$\dot{V} < 0$$

pelo que a origem do sistema não linear é assimptoticamente estável.

$\square$