TÉCNICO LISBOA

Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2016/2017

Segundo Teste

31 de Maio de 2017, 18h30 horas – salas V1.23 a 26

Duração 2 horas

Não é permitida consulta nem uso de funcionalidades programáveis

Quotação: P1-a)2 b) 3 c) 2 P2-a)2 b)2 c)1 P2A-3 P3-a)3 b)2 P4-3

P1. Considere o sistema modelado pelo modelo de estado não linear sem entrada

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 x_2 - 1$$

a) Determine **todos** os pontos de equilíbrio.

b) Obtenha as matrizes da dinâmica do sistema linearizado em torno de cada um dos pontos de equilíbrio.

c) Com base nos resultados da alínea b), o que pode dizer sobre a estabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio **do sistema não linear**?

P2. Neste problema tem duas alternativas, designadas A e B. A alternativa A é mais complicada mas tem um valor mais elevado (5 valores). A alternativa B vale apenas 3 valores. **Deverá indicar de modo inequívoco qual a alternativa que escolhe. Se responder a ambas, apenas será considerada a resposta a A**, não sendo a outra resposta classificada.

A) Considere o diagrama de blocos do servomecanismo realimentado que se mostra na figura P2-1. Neste sistema de controlo de posição, o sinal de entrada u de um motor de corrente contínua é aplicado por um actuador cuja característica é descrita por uma função não linear f conhecida aplicada ao erro de seguimento.

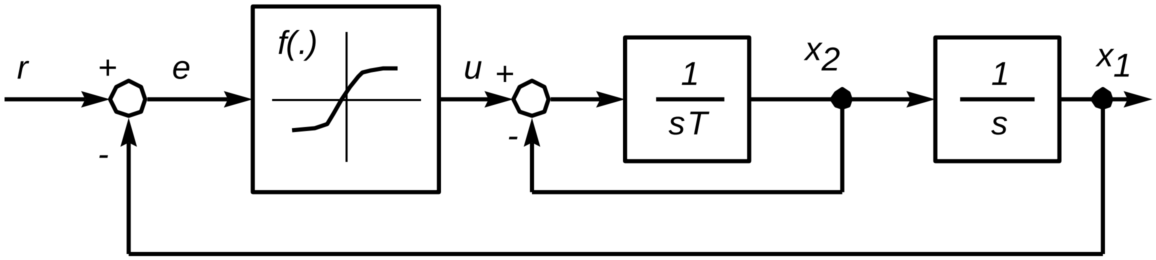


Fig. P2-1 Servomecanismo realimentado com um actuador não linear.

Sabe-se que esta função é tal que

$$f(e) > 0 \text{ para } e > 0; \quad f(e) = 0 \text{ para } e = 0; \quad f(e) < 0 \text{ para } e < 0$$

Isto significa que:

$$\int_0^e f(\sigma)\,d\sigma > 0 \quad \text{para} \quad e \neq 0$$

A referência r é constante no tempo.

As variáveis x_1 e x_2 são, respectivamente, a posição angular e a velocidade angular do veio do motor. O parâmetro $T > 0$ é a constante de tempo do motor.

Responda às seguintes perguntas:

a) Considere o estado definido pelo erro de seguimento e e pela velocidade angular x_2. Escreva as equações de estado (não-lineares) correspondentes. Estas equações dependem da função f.

b) Mostre que

$$V(e, x_2) = \frac{T}{2} x_2^2 + \int_0^e f(\sigma)\,d\sigma$$

é uma função de Lyapunov para a origem do sistema descrito na alínea a). Diga que conclusões pode tirar sobre a estabilidade para este ponto de equilíbrio usando o teorema de Lyapunov standard.

c) Diga que conclusões pode tirar pela aplicação do Teorema do Conjunto Invariante para o mesmo problema.

B) Considere o sistema definido pelas equações de estado não lineares

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_1 x_2^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - x_1^2 x_2$$

Para este sistema, a origem $(x_1 = 0, \ \ x_2 = 0)$ é um ponto de equilíbrio. Relativamente a este ponto de equilíbrio, tome como candidata a função de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Pergunta: O que pode dizer sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio para o sistema não linear? Mostre todos os cálculos.

P3. No romance *Madame de Bovary*, publicado em 1857 por Gustave Flaubert descreve-se (não é esta a história central do romance) um coveiro que plantava batatas na zona do cemitério não ocupada por sepulturas. O coveiro tinha assim um rendimento duplo: Das sepulturas que abria (pelas quais recebia um pagamento, mas que iam reduzindo o espaço disponível para a cultura de batatas), e das batatas que plantava no espaço remanescente. Para quem lê *Madame de Bovary*, põe-se o problema de saber qual deveria ser a estratégia do coveiro para aceitar ou recusar funerais, por forma a maximizar os proventos totais obtidos durante o período de tempo em que exerceu as suas funções (esta questão não é tratada no livro de Flaubert, o que não admira dado que o Princípio de Pontryagin só foi descoberto 100 anos depois). Para resolver esta questão considere a seguinte formulação matemática (esta parte não está no romance):

Seja A a área total do cemitério. Desta área, uma área x é ocupada por sepulturas, sendo a área remanescente, $A - x$, ocupada pela plantação de batatas. Por forma a poder usar um modelo na forma de uma equação diferencial, admitimos que x é uma variável real que pode tomar qualquer valor entre 0 e A, e que o ritmo u com que o coveiro abre as sepulturas pode também tomar qualquer valor entre 0 e $\bar{u}$. Tem-se assim que

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad \text{(P3-1)}$$

No instante em que o coveiro inicia a sua actividade, o cemitério não tem sepulturas, pelo que se tem a condição inicial:

$$x(0) = 0 \qquad \text{(P3-2)}$$

O coveiro desenvolve a sua actividade durante um intervalo de tempo de T anos (fixo à partida). Admite-se que ao fim deste tempo o cemitério não está esgotado (isto é, que há ainda espaço para mais sepulturas), o que significa que $x(T) > 0$. O problema consiste em saber como é que deve ser o ritmo de actividade do coveiro u por forma a maximizar

$$J = \int_0^T \left(A - x(t) + \rho\, u(t)\right) dt \qquad \text{(P3-3)}$$

em que $\rho > 0$ é um parâmetro fixo, satisfazendo a restrição

$$0 \le u \le \bar{u}$$

Responda às seguintes questões:

a) Usando o Princío de Pontryagin, determine a função $u(t)$ no intervalo de tempo $t \in [0, T]$, que maximiza J dado por (P3-3).

b) Represente graficamente, de modo aproximado, as funções $u(t)$ e $x(t)$ no intervalo de tempo $t \in [0, T]$ quando é utilizado o controlo óptimo.

P4. Após uma vida de trabalho árduo e empenhado, a D. Aulíria, zelosa e exemplar funcionária da 5ª repartição do contencioso das Finanças do Município de Vila-Cova-à-Coelheira, com uma vida dedicada à Adminstração Pública, reformou-se e pretende determinar o seu plano de poupança e gastos óptimo durante um intervalo de tempo que começa no instante actual, $t = 0$, e acaba num instante futuro $t = T$.

A D. Aulíria não tem nenhuma outra fonte de rendimento para além dos juros das suas poupanças. Sendo $x_1(t)$ o valor das poupanças no instante t, esta variável satisfaz portanto a equação diferencial

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1(t) - u(t), \qquad \text{(P4-1)}$$

com condição inicial $x_1(0) = x_0$, e em que $\alpha > 0$ é um parâmetro constante que determina a taxa de rendimento das poupanças (colocadas em bancos seguros e de uma insuspeita honestidade na boa tradição portuguesa), e $u(t)$ são os gastos da D. Aulíria no instante t.

Em cada instante de tempo t, admite-se que o gasto instantâneo $u(t)$ nele realizado tem uma utilidade (ou seja, o prazer que dele tira a D. Aulíria) dada por $\sqrt{u}$. Como a utilidade dos gastos futuros, feitos no instante t, tem um valor menor do que o actual (feito no instante 0), admite-se que a utilidade decai exponencialmente no tempo. Assim, o funcional a maximizar é

$$J = \int_0^T e^{-\beta t} \sqrt{u}(t) dt, \qquad \text{(P4-2)}$$

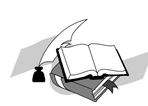
em que β é um parâmetro positivo.

Pretende-se: Determine a lei de controlo que maximiza o funcional J dado por (P4-2), sujeito à dinâmica (P4-1) e à condição terminal

$$x_1(T) = 0. \qquad (3)$$

(A D. Aulíria pretende estoirar o cacau todo. A seguir os sobrinhos, que a adoram, tratam dela).

Ajuda: Observe que a função lagrangeana em (P4-2) depende do tempo. No entanto, a forma do Princípio de Pontryagin que estudou não contempla este caso, uma vez que assume que, quer a dinâmica (P4-1), quer a função lagrangiana (função integranda em (P4-2)), não dependem explicitamente do tempo. Mostre que esta dificuldade pode ser facilmente ultrapassada através da introdução de uma variável de estado adicional. Defina esta variável de estado e reformule o problema como um problema equivalente ao posto em que a lagrangeana não depende explicitamente de t.



Ajudas úteis

$\dot{x} = -ax + b \quad a, b$ constantes
$$x(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Transformadas de Laplace

$$1 \ \rightarrow \ \frac{1}{s}, \quad e^{-at} \ \rightarrow \ \frac{1}{s+a}, \quad 1 - e^{-at} \ \rightarrow \ \frac{a}{s(s+a)}$$