Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2004/05

Primeiro Exame

9 de Julho de 2005, 9 horas - salas V1.24 a V1.27

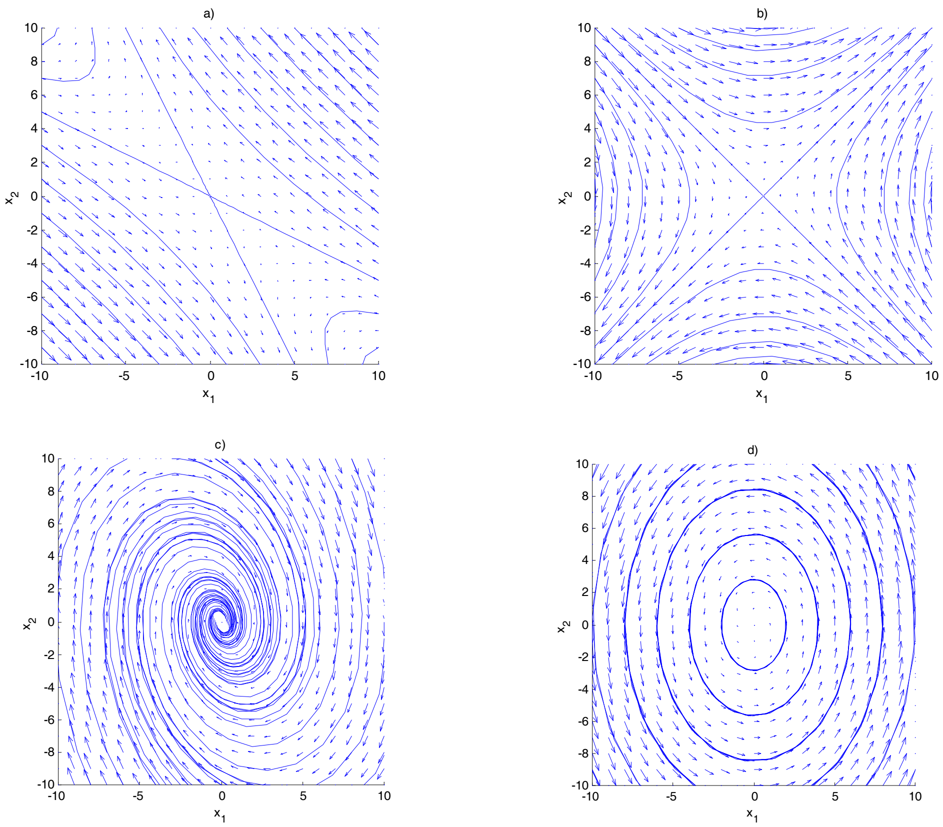
Duração 3horas – Não é permitida consulta nem calculadoras programáveis

Quotação: P1-6, P2-5, P3-2, P4-2, P5-2, P6-3.

P1. Considere as figuras seguintes, que correspondem a trajectórias no espaço de estado de 4 sistemas lineares de 2ª ordem, diferentes, com equação

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

Estes retratos de fase estão identificados de *a)* a *d)* no topo de cada figura.



Considere ainda as seguintes matrizes da dinâmica

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5/3 & -4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.6 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Diga qual das matrizes corresponde a qual retrato de fase. Deve justificar a sua resposta com base nos valores próprios e vectores próprios (calcule os vectores próprios apenas quando necessário).

b) Calcule a resposta $x(t)$ quando a matriz da dinâmica é a matriz A_3 do problema anterior, e a condição inicial é $x_1(0) = 1 \quad x_2(0) = 0$.

c) Indique uma condição incial não nula tal que o estado do sistema com matriz da dinâmica A_3 tenda para zero quando o tempo aumenta.

P2. Considere o sistema cujo diagrama de blocos se mostra na figura 1.

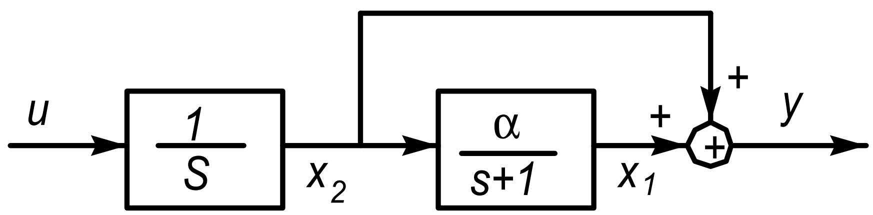


Fig. 2-1: Problema P2.

a) Obtenha uma representação de estado de 2ª ordem do sistema. Tome como entrada u, variáveis de estado x_1 e x_2 e como saída y, indicadas na figura 2-1.

b) Diga para que valores do parâmetro α, tomando como variáveis de estado x_1 e x_2, é possível dimensionar os ganhos de uma realimentação linear de todas as variáveis de estado (RLVE) por forma a posicionar arbitrariamente os pólos do sistema em cadeia fechada. Não calcule explicitamente o polinómio característico da cadeia fechada.

c) Para $\alpha = 1$, dimensione os ganhos da RLVE por forma a que os pólos da cadeia fechada se situem em $-4 \pm j$. Suponha, nesta alínea, que tem acesso à medida directa de x_1 e x_2.
d) Suponha agora que não tem acesso à medida directa de x_1 e x_2. Diga para que valores de α é que o sistema é tal que satisfaz a condição de ser possível dimensionar um observador assimptótico do estado por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero tão depressa quanto se queira.
e) Para $\alpha = 1$ escreva as equações e projecte os ganhos de um observador por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero, com valores próprios em $-10 \pm j$ da equação de erro.

P3. As populações de Marsupilamis e de Monstros da Tasmânia (animais existentes nas selvas da Brutópia) podem ser modeladas pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1 - 0.5x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2(1 - 0.5x_1 - x_2) \end{cases}$$

Nestas equações, x_1 corresponde ao número de Marsupilamis e x_2 corresoponde ao número de Monstros da Tasmânia (cada unidade corresponde a 1000 indivíduos). Responda às seguintes perguntas:

a) Determine um ponto de equilíbrio em que ambas as populações sejam positivas e não nulas.
b) Determine as equações de estado do sistema linearizado em torno desse ponto de equilíbrio e calcule os respectivos valores próprios. *Nota:* ***Não*** *tem de calcular os vectores próprios.*
c) O que pode dizer sobre o comportamento do sistema não linear em torno deste ponto (tem comportamento semelhante ao do sistema linearizado ou não)? Diga se ambas as populações podem coexistir, mesmo se ocorrerem pequenas perturbações do seu valor em torno do equilíbrio.

P4. Recorrendo ao 2º método de Lyapunov, com uma função de Lyapunov tentativa da forma

$$V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$$

mostre que a origem de cada um dos seguintes sistemas não lineares é do tipo indicado, relativamente à estabilidade:

a) Assimptoticamente estável

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

b) Instável

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2^2 + 4x_1^2 x_2 + 2x_2^3 \end{cases}$$

P5. Considere o sistema de segunda ordem de fase não-mínima descrito pela função de transferência

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2 - 2s + 1}$$

a) Determine o lugar geométrico das raízes do sistema em cadeia fechada que optimiza

$$J = \int_0^\infty \left[y^2(t) + \rho u^2(t) \right] dt$$

quando o parâmetro ρ varia de 0 a mais infinito.

b) Diga se a resposta do sistema em cadeia fechada apresenta ou não oscilações quando o parâmetro ρ toma valores sucessivamente maiores a partir de 0. Justifique a sua resposta com base no diagrama que obteve na alínea a).

P6. Num motor eléctrico de corrente contínua, a relação entre a tensão aplicada u (variável manipilada) e a velocidade x é dada (num certo sistema de unidades normalisadas) por

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 2u$$

Pretende-se executar uma manobra que leva o motor da velocidade $x = 10$ à velocidade $x = 20$ em $T = 1$ unidades de tempo, minimizando

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$$

Admite-se que não há restrições na variável manipilada.

Recorrendo ao Princípio de Pontryagin, determine a evolução no tempo óptima da tensão a aoplicar ao motor para executar a manobra.

Ajudas: Dois pares de Transformadas de Laplace úteis:

$$e^{-at} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s+a} \qquad\qquad e^{-at} - e^{-bt} \quad \leftrightarrow \quad \frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$$

Recorra às expressões do Princípio de Pontryagin indicadas a seguir, mas tenha em conta que o estado final é especificado.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

$$J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t))$$

$$\lambda'(T) = \Psi_x(x)\Big|_{x=x(T)}$$

$$H(\lambda,x,u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$