Licenciatura em Engenharia Electrotécnica
e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2002/03

Exame de Época Especial

Setembro de 2003

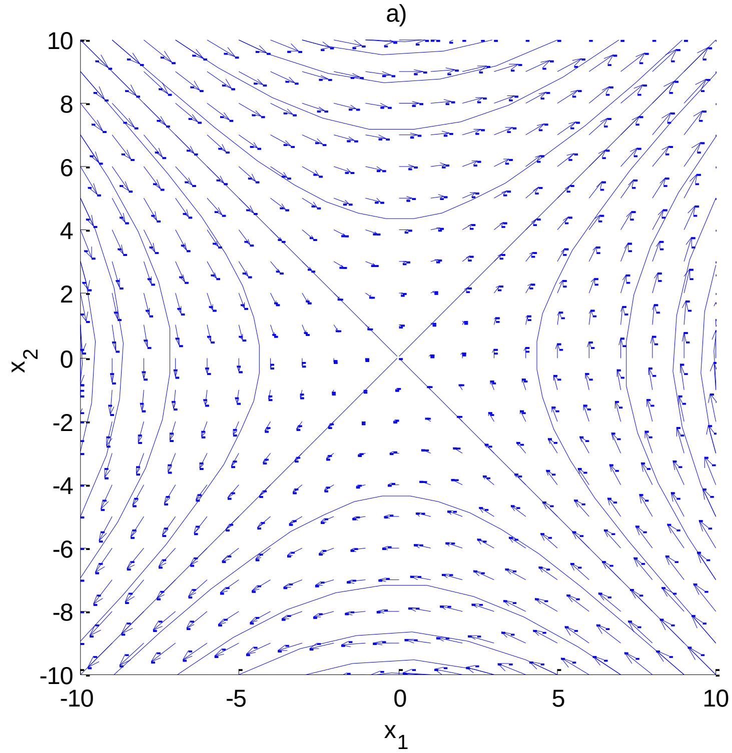
Quotação: P1-6, P2-6, P3-1, P4-2, P5-2, P6-3.

P1. Considere as figuras seguintes, que correspondem a trajectórias no espaço de estado de 5 sistemas lineares de 2ª ordem, diferentes, com equação

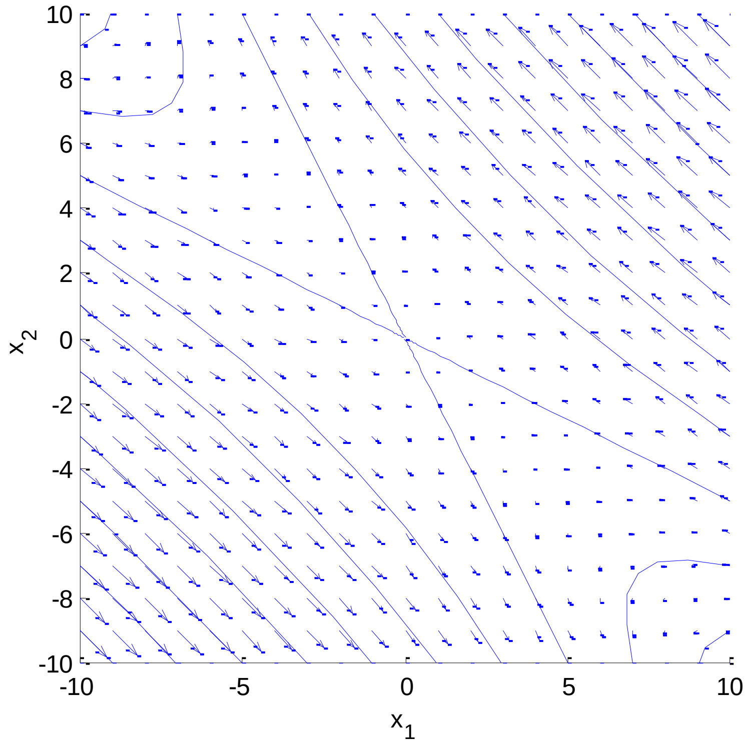
$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

Estes retratos de fase estão identificados de *a)* a *e)* no topo de cada figura.

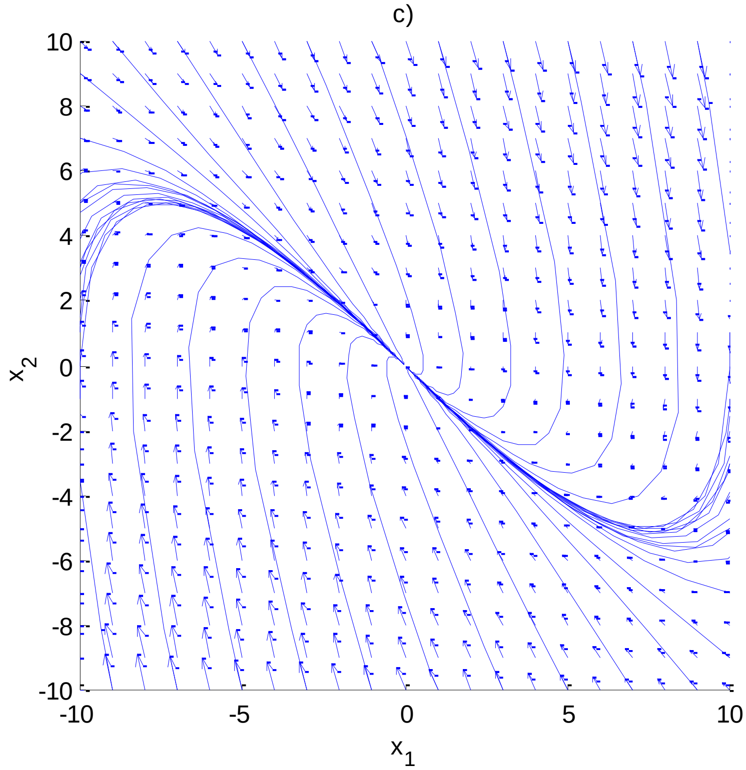
a)



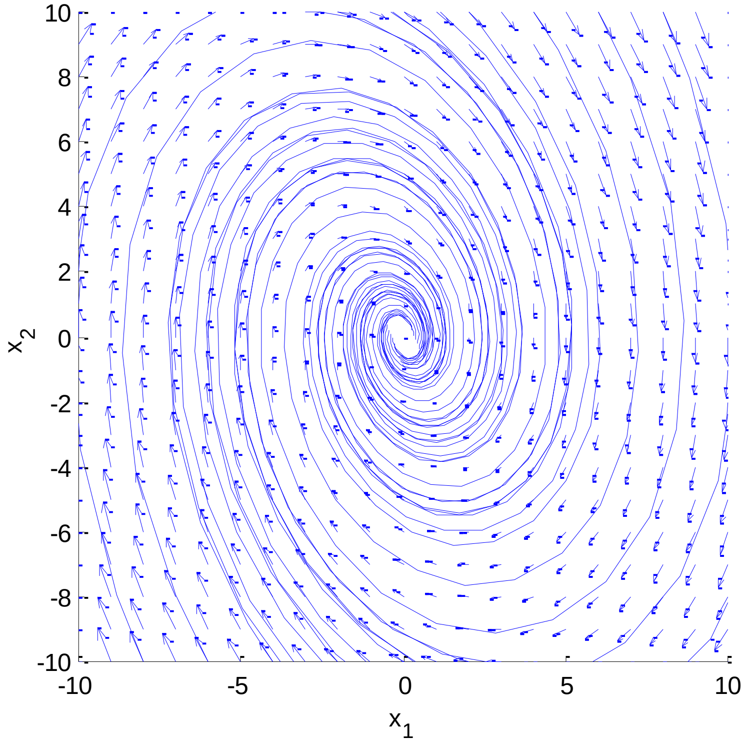
b)



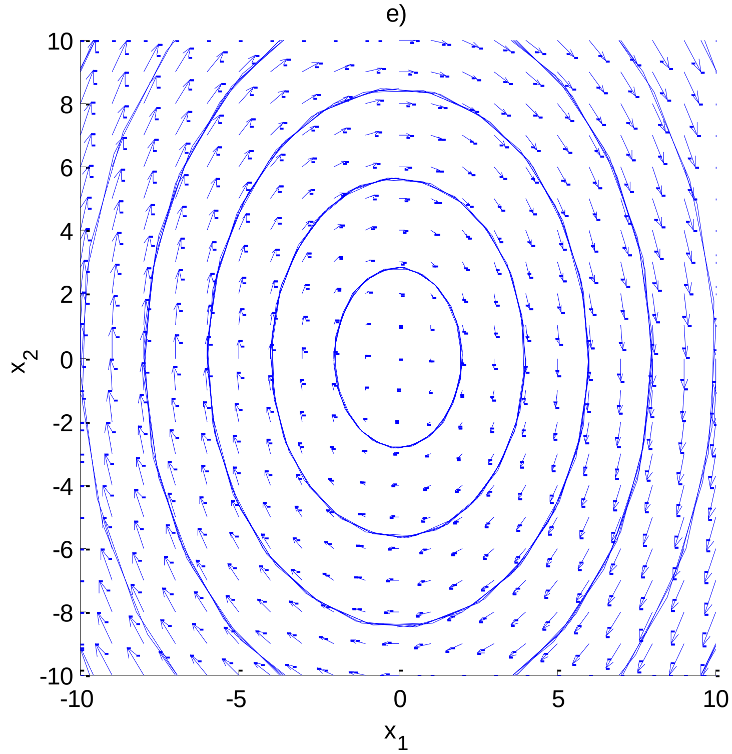
c)



d)



e)



Considere ainda as seguintes matrizes da dinâmica

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.6 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -5/3 & -4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

a) Diga qual das matrizes correspondem a qual retrato de fase. Deve justificar a sua resposta com base nos valores próprios e vectores próprios (calcule os vectores próprios apenas quando necessário).

b) Calcule a resposta $x(t)$ quando a matriz da dinâmica é a matriz A_3 do problema anterior, e a condição inicial é $x_1(0) = 1 \quad x_2(0) = 0$.

c) Diga justificando com base na definição se o sistema com matriz da dinâmica A_3 é estável no sentido de Lyapunov.

d) Indique uma condição incial não nula tal que o estado do sistema com matriz da dinâmica A_3 tenda para zero quando o tempo aumenta.

P2. Considere o sistema cujo diagrama de blocos se mostra na figura 2.

Title:
C:\USERS\IST\C2\EXAMES\E2F2.EPS
Creator:
C:\USERS\IST\C2\EXAMES\E2F2.EPS
Preview:
This EPS picture was not saved
with a preview included in it.
Comment:
This EPS picture will print to a
PostScript printer, but not to
other types of printers.

Fig. 2: Problema P2.

a) Obtenha uma representação de estado de 2ª ordem do sistema. Tome como variáveis de estado x_1 e x_2, indicadas na figura.

b) Diga para que valores do parâmetro α, tomando como variáveis de estado x_1 e x_2, é possível dimensionar os ganhos de uma realimentação linear de todas as variáveis de estado (RLVE) por forma a posicionar arbitrariamente os pólos do sistema em cadeia fechada. Não calcule explicitamente o polinómio característico da cadeia fechada.

c) Para $\alpha = 2$, dimensione os ganhos da RLVE por forma a que os pólos da cadeia fechada se situem em $-4 \pm j$. Suponha, nesta alínea, que tem acesso à medida directa de x_1 e x_2.

d) Suponha agora que não tem acesso à medida directa de x_1 e x_2. Diga para que valores de α é que o sistema é tal que satisfaz a condição de ser possível dimensionar um observador assimptótico do estado por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero tão depressa quanto se queira.

e) Para $\alpha = 2$ escreva as equações e projecte os ganhos de um observador por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero, com valores próprios em $-10 \pm j$ da equação de erro.

P3. O PLL (malha de captura de fase) é um dispositivo não linear usado quer para resolver problemas de Telecomunicações (desmodulação de fase, etc.) quer de Controlo (controlo de velocidade de precisão). A figura 3 mostra um diagrama de blocos genérico de um PLL. O PLL gera no ponto B um sinal em fase com o sinal de entrada em A, cuja fase se pretende determinar.

Title:
C:\USERS\IST\CEES\EXAMES\PLL1.EPS
Creator:
C:\USERS\IST\CEES\EXAMES\PLL1.EPS
Preview:
This EPS picture was not saved
with a preview included in it.
Comment:
This EPS picture will print to a
PostScript printer, but not to
other types of printers.

Fig. 3 – Problema P3. Diagrama de blocos de um PLL.

O sistema de equações diferenciais não linear seguinte

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \sin(\theta_i - x_1) - x_2$$

representa o modelo de um PLL. Admite-se que a fase do sinal de entrada é constante. A constante θ_i representa a fase da sinusóide de entrada que se pretende estimar. A variável de estado x_1 representa a estimativa dessa fase. Pretende-se:

a) Mostre que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um ponto de equilíbrio do sistema.

b) Calcule o sistema linearizado em torno deste ponto de equilíbrio.

c) Diga, justificando, se o sistema não linear é assimptoticamente estável em torno do ponto de equilíbrio acima referido.

P4. Considere o sistema da fig. 4 que representa um controlador de caudal com uma válvula não linear.

Title:
C:\USERS\IST\C2\EXAMES\VNL1.EPS
Creator:
C:\USERS\IST\C2\EXAMES\VNL1.EPS
Preview:
This EPS picture was not saved
with a preview included in it.

Fig. 4: Problema 4.

A válvula é descrita pelo modelo não linear de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dt} = u - \theta\ f(y)$$

em que a função não linear $f(.)$ é conhecida, estando representada na fig.3, e o parâmetro θ é desconhecido.

Pretende-se:

a) Determine uma retroacção estática da saída tal que, admitindo um conhecimento perfeito de θ, o sistema (válvula+realimentação) se comporte como um integrador.

b) Determine uma lei de controlo linear a aplicar ao integrador assim resultante, que leve a que, supondo conhecimento perfeito de θ, o erro de seguimento $e(t) = h(t) - r$ do sistema controlado tenda para zero com uma constante de tempo de 1 segundo.

c) Recorrendo ao Segundo Método de Lyapunov, obtenha uma lei de ajuste do parâmetro θ que garanta que o sistema global é estável.

d) Diga justificadamente se pode ou não garantir que o erro de seguimento $e(t) = h(t) - r$ tende para zero quando t tende para infinito.

P5. Considere o plano (t, x) representado na figura 5.

Title:
C:\USERS\IST\C2\EXAMES\GEOD1.EPS
Creator:
C:\USERS\IST\C2\EXAMES\GEOD1.EPS
Preview:
This EPS picture was not saved
with a preview included in it.
Comment:
This EPS picture will print to a
PostScript printer, but not to
other types of printers.

Fig. 5 - Problema P5.

Recorrendo ao Princípio do Máximo de Pontryagin, determine qual a forma da curva que une os pontos de coordenadas (a, A) e (b, B) e que tem comprimento mínimo.

Ajuda: Dada uma curva descrita pela função $x(t)$ (x escalar) do parâmetro t que varia no intervalo $a \le t \le b$, sabe-se que o seu comprimento é dado por

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\dot{x}(t)\right)^2}\, dt$$

Recorra às expressões do Princípio do Máximo, tendo em conta que o estado final é especificado.

P6. Considere o modelo de estado descrito pelas equações

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu$$
$$y = Cx$$

em que o par (A, C) é observável. Seja

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n+1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n$$

o polinómio característico da matriz A.

Demonstre o correspondente à fórmula de Bass-Gura para o dimensionamento dos ganhos de um observador assimptótico que coloque os valores próprios da matriz da dinâmica do erro nas raízes de um polinómio especificado

$$\alpha(s) = s^n + \alpha_1 s^{n+1} + \alpha_2 s^{n-2} + \ldots + \alpha_n$$

Ajudas: A transformação de coordenadas que leva o modelo de estado genérico nas coordenadas x à forma canónica do observador é

$$x_o = Tx$$

em que x_o é o vector de estado na forma canónica do observador e

$$T = \mathcal{M}\,\mathcal{O}(A,c)$$

sendo $O(A,C)$ a matrz de observabilidade associada ao par (A,C) e

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

em que os a_i são os coeficientes do polinómio característico do sistema em cadeia aberta. A forma canónica do observador de uma função de transferência

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_n}$$

é tal como se mostra na figura 6.

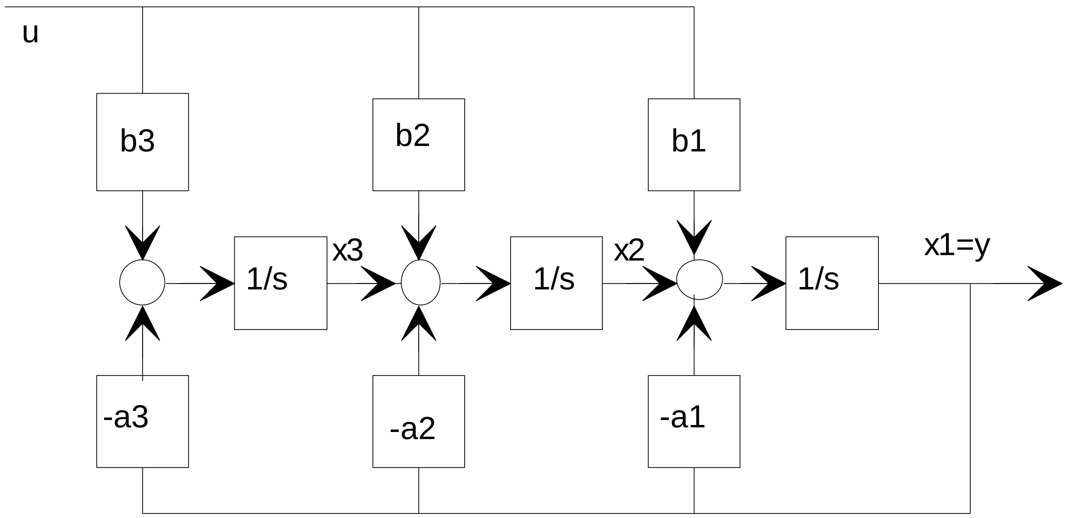


Fig. 6 – Problem P6.