P1, a)

$$\begin{cases} s - d x_1 - \alpha x_1 x_2 = 0 \\ \alpha x_1 x_2 - \delta x_2 = 0 \end{cases}$$

b) A 2ª eq. é satisfeita por $x_2 = 0$.
Para $x_2 = 0$, a 1ª eq. fica

$$s - d x_1 = 0$$

$$x_1 = \frac{s}{d} = \frac{10}{0{,}02} = 500 .$$

$$x_p = \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) $f_1 = s - d x_1 - \alpha (1 - u) x_1 x_2$

$f_2 = \alpha (1 - u) x_1 x_2 - \delta x_2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -d - \alpha (1 - u) x_2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\alpha (1 - u) x_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \alpha (1 - u) x_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \alpha (1 - u) x_1 - \delta$$

$$A_p = \begin{bmatrix} -d & -\alpha 500 \\ 0 & \alpha 500 - \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}02 & -0{,}35 \\ 0 & 0{,}48 \end{bmatrix}$$

d) A_p

$$\begin{vmatrix} \lambda+0.02 & 0.5 \\ 0 & \lambda-0.48 \end{vmatrix} =$$

$$=(\lambda+0.02)(\lambda-0.48)$$

$$\lambda_1 = -0.02 \qquad \lambda_2 = 0.48$$

Ponto de sela. A resposta no tempo é a soma de uma exponencial crescente com outra decrescente. Não há oscilações. Ponto de equilíbrio instável.

A_Q

$$\begin{vmatrix} \lambda+0,0417 & 0,24 \\ -0,027 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + 0,0417\lambda + 0,00648$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0,0417 \pm \sqrt{0,00174 - 0,026}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -0.02 \pm j\,0,078$$

Parte real negativa → assimptoticamente estável; parte imaginária. A resposta é uma oscilação amortecida.

Foco estável.

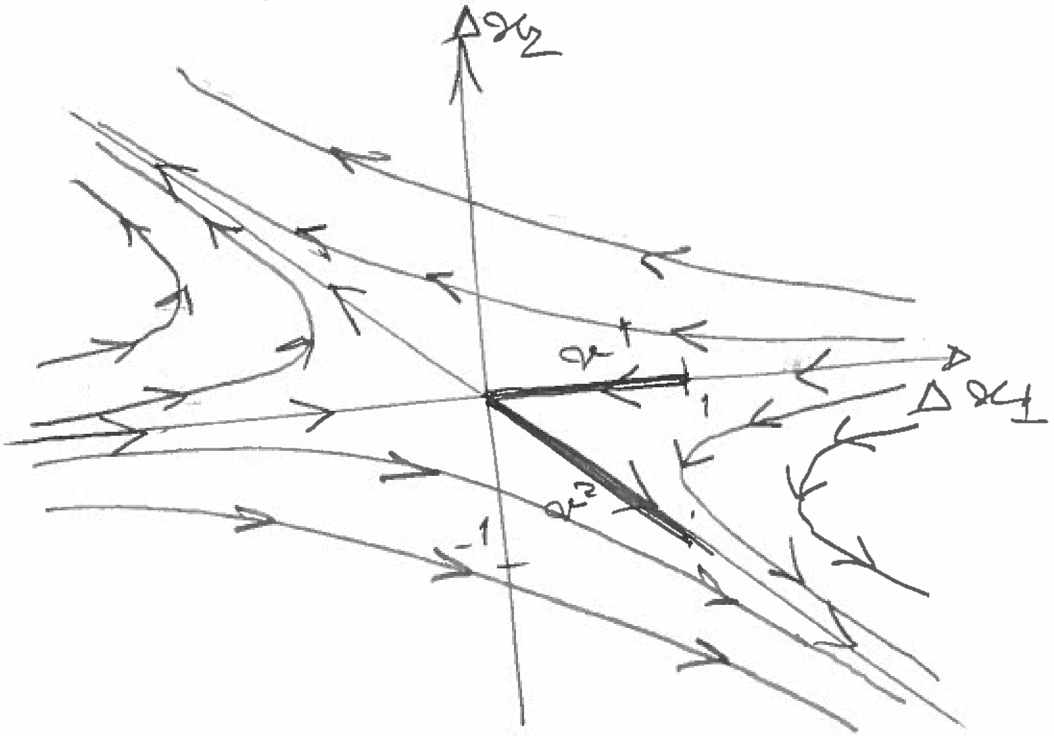
e) $v_1^1 = 1$

$$\lambda_i + 0{,}02 + 0{,}5\, v_2^i = 0$$

$$v_2^i = -\frac{\lambda_i + 0{,}02}{0{,}5}$$

$\lambda_1 = -0{,}02$ $\qquad$ $\lambda_2 = 0{,}48$

$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



f) É a hipótese b)
É a única que tem os pontos de equilíbrio nos locais certos.

g) $\begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-0{,}02t} + K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{0{,}48t}$

$$K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = 10 \\ -K_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} K_1 = 12 \\ K_2 = -2 \end{cases}$$

h) $A_Q b_Q = \begin{bmatrix} 1{,}03 \\ 0{,}14 \end{bmatrix}$

$$\mathcal{C}(A_Q, b_Q) = \begin{bmatrix} 5{,}2 & 1{,}03 \\ -5{,}2 & 0{,}14 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{C}(A_Q, b_Q) = 6{,}1 \neq 0$$

Logo é controlável.

i) $b_q K = \begin{bmatrix} 5{,}2 \\ -5{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}2 K_1 & 5{,}2 K_2 \\ -5{,}2 K_1 & -5{,}2 K_2 \end{bmatrix}$

$$A_Q - b_Q K = \begin{bmatrix} -0{,}0417 - 5{,}2 K_1 & -0{,}24 - 5{,}2 K_2 \\ 0{,}0217 + 5{,}2 K_1 & 5{,}2 K_2 \end{bmatrix}$$

$\det(sI - A_Q + b_Q K) =$

$$= \begin{vmatrix} s + 0{,}0417 + 5{,}2 K_1 & 0{,}24 + 5{,}2 K_2 \\ -0{,}0217 - 5{,}2 K_1 & s - 5{,}2 K_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (s + 0{,}0417 + 5{,}2 K_1)(s - 5{,}2 K_2) +$$

$$+ (0{,}0217 + 5{,}2 K_1)(0{,}24 + 5{,}2 K_2) =$$

$$= s^2 - 5{,}2K_2 s$$

$$+ (0{,}0417 + 5{,}2K_1)s - (0{,}0417 + 5{,}2K_1)5{,}2K_2 +$$

$$+ 0{,}0217 \times 0{,}24 + 0{,}0217 \times 5{,}2K_2 +$$

$$+ 0{,}24 \times 5{,}2K_1 + (5{,}2)^2 K_1 K_2 =$$

$$= s^2 + (0{,}0417 + 5{,}2K_1 - 5{,}2K_2)s -$$

$$- \underbrace{0{,}0417 \times 5{,}2}_{0{,}217} K_2 - \cancel{\underbrace{(5{,}2)^2}_{27{,}04} K_1 K_2} +$$

$$+ \underbrace{0{,}0217 \times 0{,}24}_{0{,}0052} + \underbrace{0{,}0217 \times 5{,}2}_{0{,}113} K_2$$

$$+ \underbrace{0{,}24 \times 5{,}2}_{1{,}248} K_1 + \cancel{\underbrace{(5{,}2)^2}_{27{,}04} K_1 K_2} =$$

$$\begin{array}{r} -0{,}217 \\ 0{,}113 \\ \hline -0{,}104 \end{array}$$

$$\to s^2 + (0{,}0417 + 5{,}2K_1 - 5{,}2K_2)s -$$

$$- 0{,}104K_2 + 0{,}0052 + 1{,}248K_1$$

$$\alpha(s) = (s + 0{,}1)(s + 0{,}2) =$$

$$= s^2 + 0{,}3s + 0{,}02$$

$$\begin{cases} 0{,}0417 + 5{,}2K_1 - 5{,}2K_2 = 0{,}3 \\ -0{,}104K_2 + 0{,}0052 + 1{,}248K_1 = 0{,}02 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} K_1 - K_2 = \dfrac{0,3-0,0417}{5,2} = 0,0497 \\ K_1 - \underbrace{\dfrac{0,104}{1,248}}_{0,083} K_2 = \dfrac{0,02-0,0052}{1,248} = 0,0119 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K_1 - K_2 &= 0,0497 \\ -K_1 + 0,083K_2 &= -0,0119 \end{aligned}$$

$$-0,917K_2 = 0,0378$$

$$\boxed{K_2 = -0.041}$$

$$K_1 = K_2 + 0.0497 = -0.041 + 0.0497$$

$$\boxed{K_1 = 0.0087}$$

Resposta dada pela função place
(com mais precisão numérica):

$$K_1 = 0.0084$$
$$K_2 = -0.0413$$

P2 a) Função de Lyapunov tentativa

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = \\ &= -x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^2 \\ &= -(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0 \quad \forall x \neq \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Considere-se a função

$$W(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{W}(x) = (x_1^2 + x_2^2)^2 > 0 \quad \forall x \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

P3) $f = u \quad f_x = 0 \quad L = -\frac{1}{2}u^2 \quad L_x = 0$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \psi(\lambda(10)) = x(10) \quad \psi_x\Big|_{x = x(10)} = 1$$

$$\Longrightarrow \lambda(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 10]$$

$$H = \lambda u - \frac{1}{2}u^2 = u - \frac{1}{2}u^2$$

Dado que H é uma função quadrática de u, a condição de extremo é

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial u} = 1 - u = 0$$

$$u^*(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 10]$$

P4) $f = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$L = -\frac{1}{2}u^2 \qquad L_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = C_1$$

$$-\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 \Rightarrow \dot{\lambda}_2 = -C_1$$

$$\lambda_2(t) = -C_1 t + C_2$$

$$H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u - \frac{1}{2} u^2$$

Dado que H é uma função quadrática de u, a condição de extremo de H é

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_2 - u = 0 \Rightarrow u^*(t) = \lambda_2(t)$$

$$u^*(t) = c_2 - c_1 t$$

Insere-se esta expressão no modelo de estado e resolve-se a equação resultante. As constantes c_1 e c_2 são obtidas impondo a condição terminal do estado.

$$\dot{x}_2 = c_2 - c_1 t$$

$$x_2(T) = x_2(0) + \int_0^T (c_2 - c_1 t)\, dt$$

$$x_2(T) = x_2(0) + c_2 T - c_1 \frac{1}{2} T^2$$

$$0 = 2 + 2c_2 - 2c_1$$

$$x_1(T) = x_1(0) + \int_0^T x_2(\tau)\, d\tau$$

$$x_1(T) = x_1(0) + x_2(0) T + c_2 \frac{1}{2} T^2 - c_1 \frac{1}{6} T^3$$

$$1 = 1 + 4 + 2c_2 - \frac{8}{6} c_1$$

$$\frac{4}{3}c_1 - 2c_2 = 4$$

$$4c_1 - 6c_2 = 12$$

$$4c_1 - 4c_2 = 4$$

$$4c_1 - 6c_2 = 12$$

$$2c_2 = -8 \qquad c_2 = -4$$

$$c_1 - c_2 = 1 \qquad c_1 = 1 + c_2 = 1 - 4 = -3$$

$$\boxed{u^*(t) = 3t - 4}$$