INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2004/05

Segundo Exame

20 de Julho de 2005, 17 horas - salas C11, C22, C9

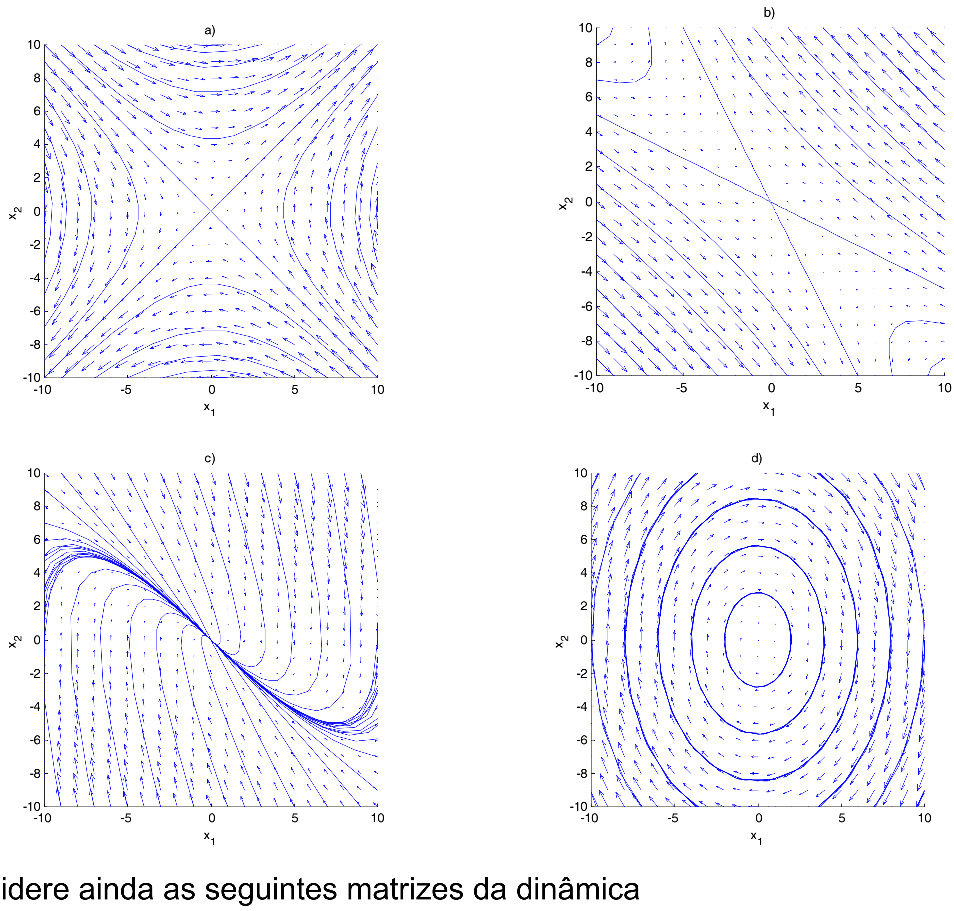
Duração 3horas - Não é permitida consulta nem calculadoras programáveis

Quotação: P1-5, P2-5, P3-2, P4(A)-3, P4(B)-1, P5-2, P6-3.

P1. Considere as figuras seguintes, que correspondem a trajectórias no espaço de estado de 4 sistemas lineares de 2ª ordem, diferentes, com equação

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

Estes retratos de fase estão identificados de *a)* a *d)* no topo de cada figura.



Considere ainda as seguintes matrizes da dinâmica

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} -5/3 & -4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Diga qual das matrizes corresponde a qual retrato de fase. Deve justificar a sua resposta com base nos valores próprios e vectores próprios (calcule os vectores próprios apenas quando necessário).

b) Determine a matriz exponencial da matriz A_2.

c) Na situação da alínea b), determine $x(t)$ quando $x(0) = [2 \quad 3]^T$.

P2. Considere o sistema cujo diagrama de blocos se mostra na figura 1.

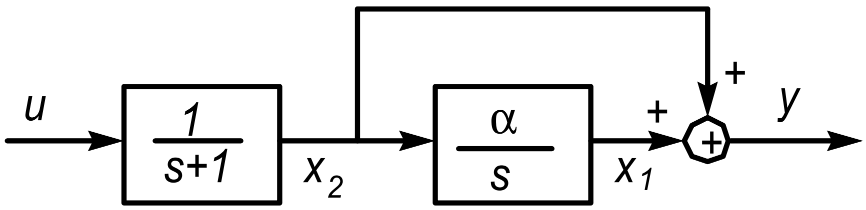


Fig. 2-1: Problema P2.

a) Obtenha uma representação de estado de 2ª ordem do sistema. Tome como entrada u, variáveis de estado x_1 e x_2 e como saída y, indicadas na figura P2-1.

b) Diga para que valores do parâmetro α, tomando como variáveis de estado x_1 e x_2, é possível dimensionar os ganhos de uma realimentação linear de todas as variáveis de estado (RLVE) por forma a posicionar arbitrariamente os pólos do sistema em cadeia fechada. Não calcule explicitamente o polinómio característico da cadeia fechada.

c) Para $\alpha = 2$, dimensione os ganhos da RLVE por forma a que os pólos da cadeia fechada se situem em $-4 \pm j$. Suponha, nesta alínea, que tem acesso à medida directa de x_1 e x_2.

d) Suponha agora que não tem acesso à medida directa de x_1 e x_2. Diga para que valores de α é que o sistema é tal que satisfaz a condição de ser possível dimensionar um observador assimptótico do estado por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero tão depressa quanto se queira.

e) Para $\alpha = 2$ escreva as equações e projecte os ganhos de um observador por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero, com valores próprios em $-10 \pm j$ da equação de erro.

P3. O PLL (*Phase Lock Loop* **-** malha de captura de fase) é um dispositivo não linear usado quer para resolver problemas de Telecomunicações (desmodulação de fase) quer de Controlo (controlo de velocidade de precisão). A figura P3-1 mostra um diagrama de blocos genérico de um PLL. O PLL gera no ponto B um sinal em fase com o sinal de entrada em A, cuja fase se pretende determinar.

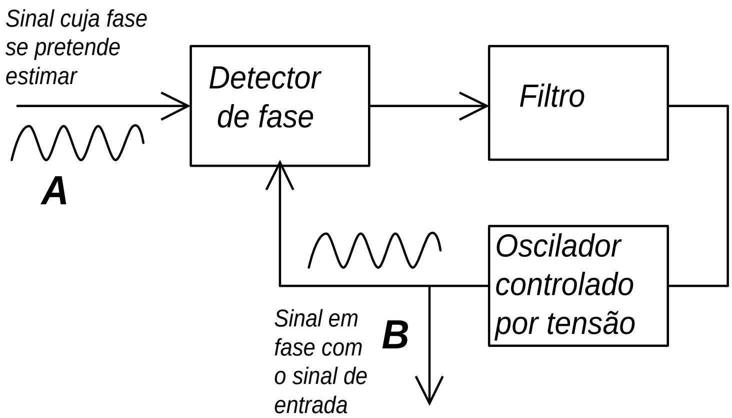


Fig. P3-1 – Problem P3. Diagrama de blocos de um PLL.

O sistema de equações diferenciais não linear seguinte

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \sin(\theta_i - x_1) - x_2$$

representa o modelo de um PLL. Admite-se que a fase do sinal de entrada é constante. A constante θ_i representa a fase da sinusóide de entrada que se pretende estimar. A variável de estado x_1 representa a estimativa dessa fase. Pretende-se:

a) Mostre que

$$\text{Ponto A:} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Ponto B:} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i + \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

são dois pontos de equilíbrio do sistema.

b) Calcule o sistema linearizado em torno de cada um destes ponto de equilíbrio.

c) Para cada um dos sistemas linearizados que obteve em b) calcule os valores próprios e classifique-os qualitativamente (diga se são estáveis ou instáveis e se se trata de um nó, de um foco, de um centro ou de um ponto de sela).

d) Diga, justificando, se pode concluir que o sistema não linear é assimptoticamente estável em torno de cada um dos pontos de equilíbrio acima referidos.

Deverá resolver apenas um dos problemas P4(A) ou P4(B). O problema P4(A) vale 3 valores mas o problema P4(B) vale apenas 1 valor, pelo que se optar por fazer P4(B) estará a fazer o exame para uma nota total inferior a 20. Se resolver os dois problemas apenas contará a classificação obtida em P4(A).

P4(A). Considere o sistema da fig. P4-1 que representa um controlador de caudal com uma válvula não linear.

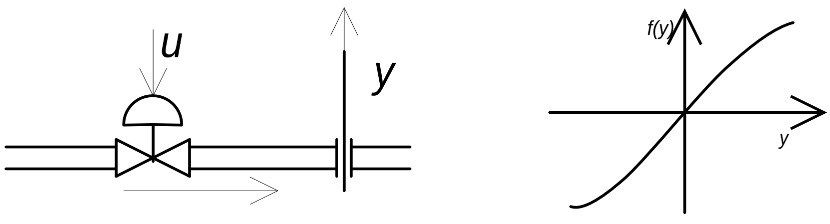


Fig. P4-1: Problema P4.

A válvula é descrita pelo modelo não linear de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dt} = u - \theta\, f(y)$$

em que a a forma da função não linear $f(.)$ é conhecida e o parâmetro θ é desconhecido mas constante. A variável u representa a posição da válvula (variável manipuolada) e y representa o caudal. Pretende-se:

a) Determine uma retroacção estática da saída tal que, admitindo um conhecimento perfeito de θ, o sistema (válvula+retroacção) se comporte como um integrador. Esta retroacção consiste numa mudança de variável que transforma uma variável manipulada virtual v na variável manipulada efectivamente aplicada ao sistema físico u, tal que a relação existente entre v e y é um integrador. Deverá indicar a fórmula que permite calcular a abertura da válvula u em função de v.

b) Determine uma lei de controlo linear a aplicar ao integrador assim resultante, que leve a que, supondo conhecimento perfeito de θ, o erro de seguimento $e(t) = h(t) - r$ do sistema controlado tenda para zero com uma constante de tempo de 1 segundo (pólo em $1\, rad/s$). Assuma que a referência r é constante.

c) Suponha agora que aplica a retroacção estática que projectou na alínea a) com o valor exacto de θ substituído por uma estimativa $\hat{\theta}$. A relação entre v e y deixa de ser um integrador exactamente, mas passa a ter um termo adicional que se anula com o erro de estimativa $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$. Determine o resultado da retroacção estática nestas condições.

d) Recorrendo ao Segundo Método de Lyapunov, obtenha uma lei de ajuste da estimativa $\hat{\theta}(t)$ que garanta que o sistema global é estável.

e) Diga justificadamente se pode ou não garantir que o erro de seguimento $e(t) = r - h(t)$ tende para zero quando o tempo t tende para infinito.

P4(B). Atenção à observação imediatamente antes do problema P4(A).

Considere o sistema não linear descrito pelas equações de estado

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

a) Mostre que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema.

b) Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov mostre que a origem é um ponto de equilíbrio assimptoticamente estável. Sugestão: Use a função de Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

P5. Por aplicação do Princípio de Pontryagin, determine a função *u(t)* tal que o funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2(t) + u^2(t)dt$$

seja mínimo (estabilizando o sistema), sendo *x* o estado do seguinte sistema escalar instável

$$\frac{dx}{dt} = x + u(t)$$

Deve resolver o problema admitindo que existe uma constante *p* tal que

$$\lambda(t) = -px(t)$$

e determinando essa constante.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

$$J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t))$$

$$\lambda'(T) = \Psi_x(x)\big|_{x=x(T)}$$

$$H(\lambda,x,u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

P6. Considere o modelo de estado descrito pelas equações

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu$$
$$y = Cx$$

em que o par (A, C) é observável. Seja

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n+1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n$$

o polinómio característico da matriz A.

Demonstre o correspondente à fórmula de Bass-Gura para o dimensionamento dos ganhos de um observador assimptótico que coloque os valores próprios da matriz da dinâmica do erro nas raízes de um polinómio especificado

$$\alpha(s) = s^n + \alpha_1 s^{n+1} + \alpha_2 s^{n-2} + \ldots + \alpha_n$$

Ajudas: A transformação de coordenadas que leva o modelo de estado genérico nas coordenadas x à forma canónica do observador é

$$x_o = Tx$$

em que x_o é o vector de estado na forma canónica do observador e

$$T = M\, \mathcal{O}(A,c)$$

sendo $O(A,C)$ a matrz de observabilidade associada ao par (A,C) e

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

em que os a_i são os coeficientes do polinómio característico do sistema em cadeia aberta. A forma canónica do observador de uma função de transferência

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_n}$$

é tal como se mostra na figura P6-1.

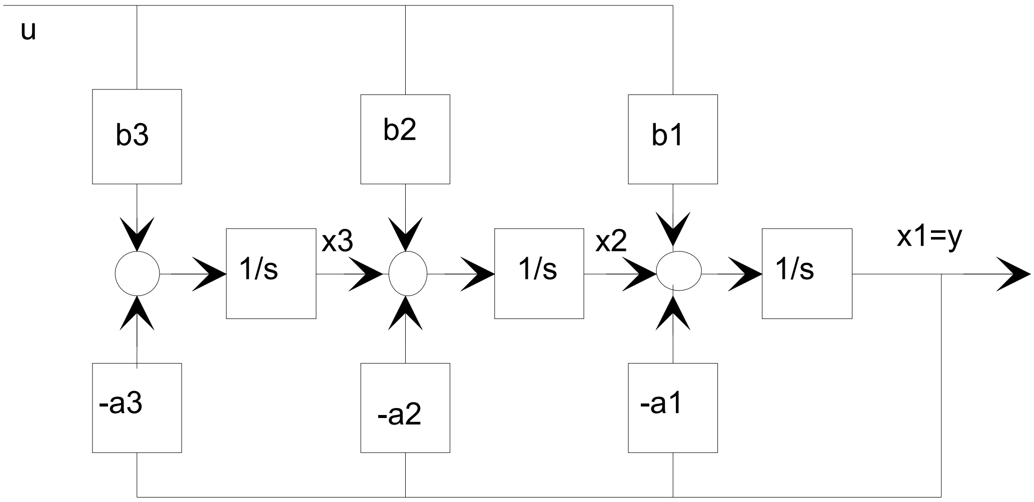


Fig. P6-1 – Problem P6.