CONTROLO EM ESPAÇO DE ESTADOS
LEEC, IST

<u>Duração: 3horas</u>
1 de Julho de 2004

Q.1 [9 v] Considere um motor eléctrico de corrente contínua e denote por u, ω, e θ respectivamente a tensão de entrada, a velocidade de rotação do veio, e a posição angular do veio. A dinâmica do motor admite a descrição em espaço de estados

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1$$
$$y = x_2$$

onde $x_2=\theta$ e $x_1=\omega$. A função de transferência correspondente é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)}$$

Pretende-se projectar um sistema de controlo da posição angular θ recorrendo a uma de duas estratégias possíveis: *controlo em malha aberta*, e *controlo em malha fechada.* As questões que se seguem focam as duas estratégias.

Controlo em Malha Aberta.

1.a [2 v] –Considere o seguinte problema simplificado: suponha que $\omega=\theta=0$ para $t=0$ (isto é, no instante inicial $t=0$ o motor encontra-se na posição zero e tem velocidade zero). Prove que dados um instante T>0 e uma posição angular θ^* arbitrários existe uma entrada $u(t)$; $t \in [0,T]$ tal que

$$[\omega(T),\ \theta(T)]' = [x_1(T), x_2(T)]' = [0,\ \theta^*]'$$

isto é, o veio do motor atinge a posição angular θ^* arbitrária com velocidade angular zero quando $t=T$. ***Sugestão:*** *utilize o critério de controlabilidade da realização de um sistema em espaço de estados.*

1.b [1 v] – De acordo com o resultado da alínea anterior, é sempre possível transitar do estado $[0,\ 0]'$ para $[0,\ \theta^*]'$ num intervalo arbitrário $[0,T]$. No entanto, nada se diz àcerca da função temporal de entrada $u(t)$ que efectua essa transição. Prove justificadamente se a função

$$u(t) = Ae^{-t}\sin\frac{2\pi}{T}t;\ t \in [0,T],$$

com A convenientemente escolhido, permite de facto efectuar essa transição. ***Sugestão:*** calcule a matriz de transição associada à realização do sistema acima indicado e calcule explicitamente a evolução de $[\omega(t),\ \theta(t)]' = [x_1(t), x_2(t)]'$.

Controlo em Malha Fechada.

Pretende-se agora desenvolver uma estratégia de controlo em malha fechada que resulte da combinação de um regulador (retroacção de estado) e um observador para o sistema.

Regulador.

1.c [0.5 v] **–** Dado o sistema com a realização acima indicada, mostre que é possível, com uma estratégia de retroacção de estado $u=-[K_1\ K_2]$, colocar de modo arbitrário os valores próprios do regulador resultante.

1.d [1 v] **–** Calcule os ganhos de retroacção $K=[K_1\ K_2]$ tais que os valores próprios do regulador sejam iguais às raízes do polinómio $\lambda^2+1.4\lambda+1$ (polos de um sistema de segunda ordem com frequência natural $w_n=1\ rad\ s^{-1}$ e grau de amortecimento $\xi=0.7$).

1.e [1 v] **–** Pretende-se agora projectar um observador para o sistema que, com base em medições da saída $y=x_2=\theta$ e da entrada u, produza estimativas do estado $[x_1(t), x_2(t)]'$. Mostre que é possível colocar de modo arbitrário os valores próprios do observador por escolha adequada dos ganhos de observação $L=[L_1\ L_2]'$.

1.f [1 v] **–** Calcule os ganhos de observação $L=[L_1\ L_2]'$ tais que os valores próprios do observador sejam iguais às raízes do polinómio $\lambda^2+14\lambda+100$ (polos de um sistema de segunda ordem com frequência natural $w_n=10\ rad\ s^{-1}$ e grau de amortecimento $\xi=0.7$).

1.g [1.5 v] **–** Represente num diagrama a estrutura do sistema de controlo total que consiste no sistema a controlar, regulador, e controlar. Calcule os valores próprios do sistema total.

1.h [1 v] **–** Diga como modificaria o sistema total acima referido de modo a obter um servomecanismo em que a saída saída $y=\theta=x_2$ segue com erro estático igual a zero sinais de comando r constantes no tempo.

Q.2 [6 v] Controlo Não Linear. Considere um corpo rígido que roda no espaço em torno de um eixo vertical sob a acção de um binário aplicado u. Sejam ω e θ respectivamente a velocidade de rotação do corpo e a sua posição angular. Devido a constrições tecnológicas (controlo por jactos de gás), o binário u só pode assumir os valores $u=m_1$ e $u=-m_2$ onde m_1 e m_2 são valores positivos. Pretende-se controlar a posição angular do corpo recorrendo ao sistema de controlo simples representado na Figura 1, onde $G(s)=\Theta(s)/U(s)=1/s^2$ denota a função de transferência do corpo rígido com entrada u e saída θ .

2.a [3 v] **–** Faça r=o (isto é, suponha que se pretende levar a coordenada posição do corpo para zero) e considere o caso em que $m_1=m_2=1$ (actuação em binário simétrica). Mostre *justificadamente* que o sistema de controlo proposto não permite estabilizar assimptóticamente o sistema em torno do ponto de equilíbrio $\omega=\theta=0$. Para isso, trace explicitamente as trajectórias do sistema no plano de fase adequado utilizando o método das isoclínicas. Em particular, mostre que as únicas trajectórias possíveis são ciclos limites em que o período é maior ou igual a zero.

2.b [1 v] – Pretende-se agora investigar qual a alteração no comportamento do sistema de controlo proposto quando a actuação em binário não é simétrica. Faça m_1=1 e m_2=0.5 e mostre justificadamente que o comportamento qualitativo não se altera, isto é, o sistema continua a exibir um número infinito de ciclos limites em torno do ponto de equilíbrio $\omega = \theta = 0$.

2.c [2 v] – Confirme o verificado na alínea 2.a recorrendo ao método da função descritiva.

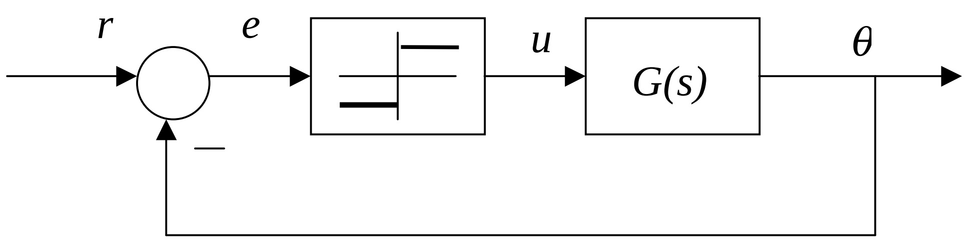

Fig. 1. Controlo "on-off"; $G(s)=\Theta(s)/U(s)=1/s^2$

Q.3 [5 v] Controlo Óptimo. Considere o modelo do motor eléctrico de corrente contínua introduzido em Q.1. Pretende projectar-se um sistema de controlo de posição angular. No entanto, e ao contrário da situação explicitada em Q.1, tem-se agora acesso às variáveis posição angular θ e velocidade angular ω. Opta-se por isso pelo projecto de um sistema de controlo com base na teoria do ***regulador óptimo*** por retroacção de estado. Para isso, considere o critério de custo quadrático

$$J(u) = \int_0^\infty y^2(t) + \rho u^2(t)dt$$

onde $y=m\omega+\theta$; $m>0$ capta a "penalização" dos desvios de ω e θ em relação a zero, *e r>0* é um factor de penalização da energia dispendida.

3.a [4 v] – Mostre que o problema de minimização do critério de custo adoptado admite uma solução única por retroacção de estado que estabiliza o sistema em malha fechada. Discuta o padrão de evolução dos valores próprios do regulador resultante em função de $m>0$ e ρ>0. *Sugestão:* utilize o método de Chang-Letov para traçado dos valores próprios do regulador e analise as situações $m=0.1$ e $m=100$. Forneça uma visão intuitiva do resultado, com base em raciocínios de ordem física.

3.b [1 v] – Mostre, através de um figura, como modificaria o regulador de modo a obter um servomecanismo para seguimento de um sinal de comando de posição angular. Atenção: o integrador do sistema a controlar não é "artificial", isto é, ele está de facto "amarrado à física" do sistema uma vez que a posição angular é o integral da velocidade de rotação.