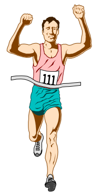
Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2002/03

Primeiro Exame

25 de Junho de 2003, 13 horas - salas F3, F4

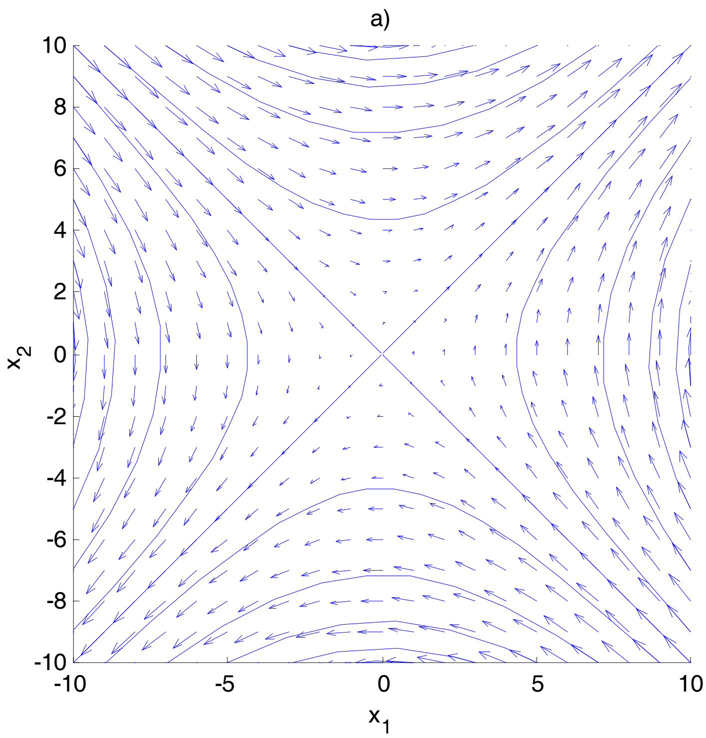


Quotação: P1-6, P2-5, P3-2, P4-2, P5-2, P6-3.

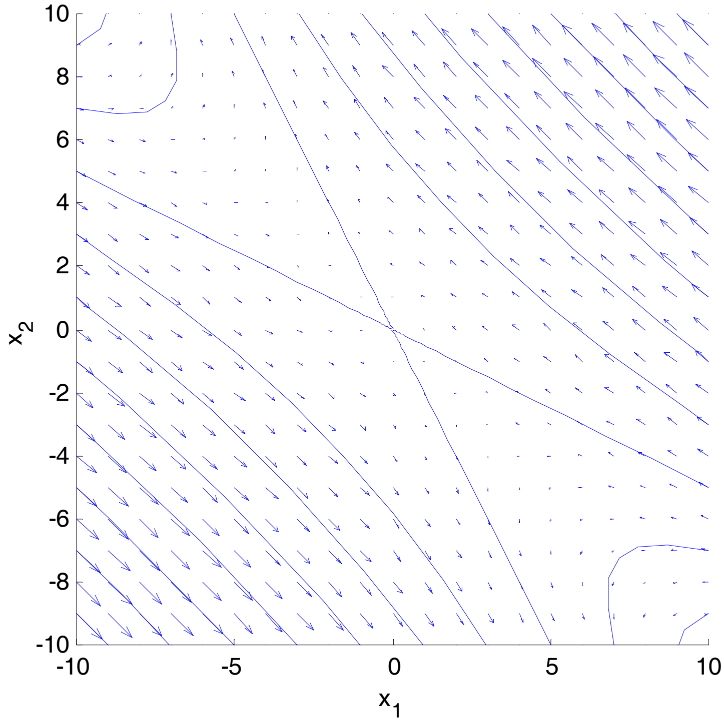
P1. Considere as figuras seguintes, que correspondem a trajectórias no espaço de estado de 5 sistemas lineares de 2ª ordem, diferentes, com equação

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

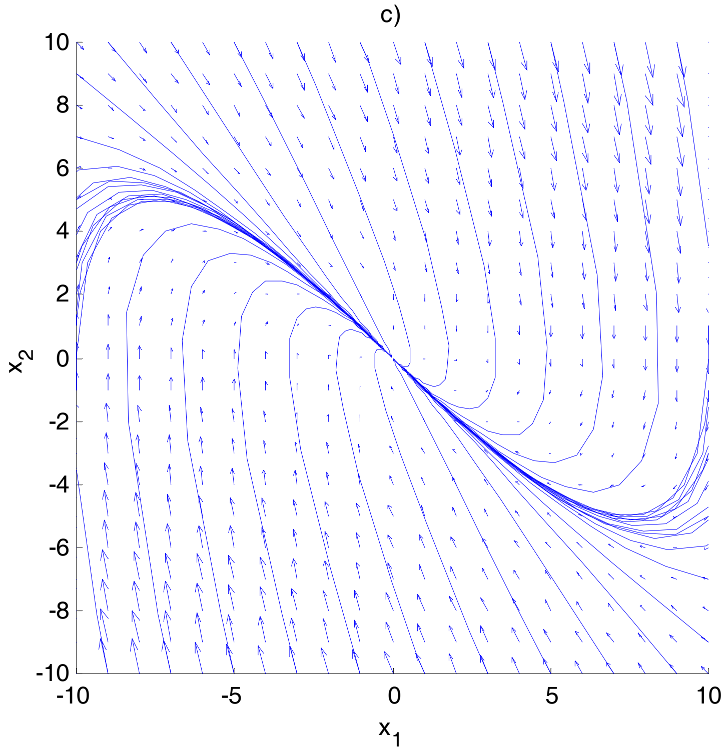
Estes retratos de fase estão identificados de *a)* a *e)* no topo de cada figura.



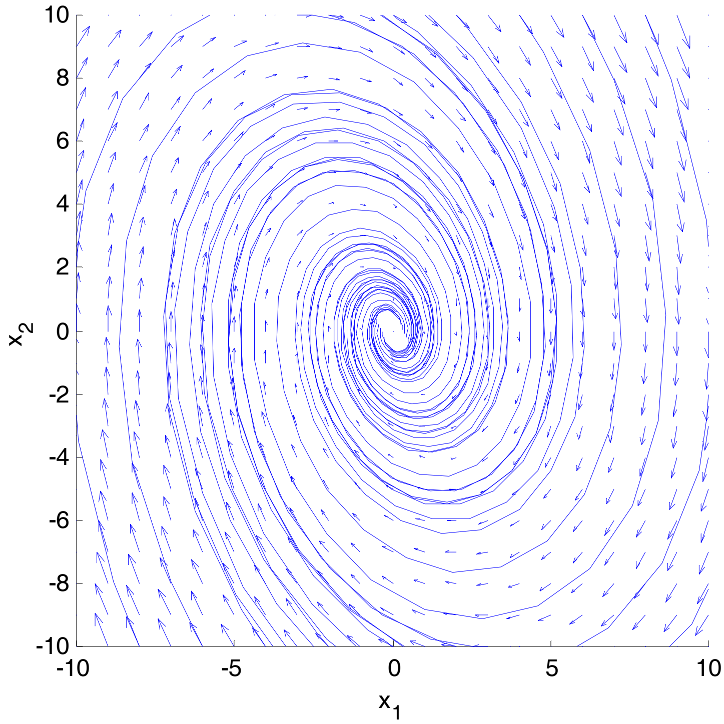
b)



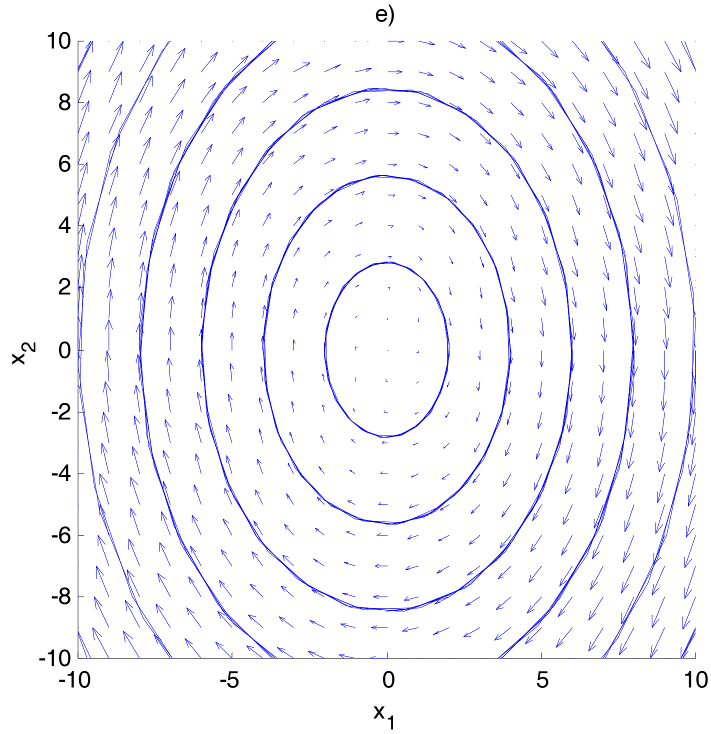
c)



d)



e)



Considere ainda as seguintes matrizes da dinâmica

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -5/3 & -4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

a) Diga qual das matrizes correspondem a qual retrato de fase. Deve justificar a sua resposta com base nos valores próprios e vectores próprios (calcule os vectores próprios apenas quando necessário).

b) Calcule a resposta $x(t)$ quando a matriz da dinâmica é a matriz A_3 do problema anterior, e a condição inicial é $x_1(0) = 1 \quad x_2(0) = 0$.

c) Diga justificando com base na definição se o sistema com matriz da dinâmica A_3 é estável no sentido de Lyapunov.

d) Indique uma condição incial não nula tal que o estado do sistema com matriz da dinâmica A_3 tenda para zero quando o tempo aumenta.

P2. Considere o sistema cujo diagrama de blocos se mostra na figura 1.

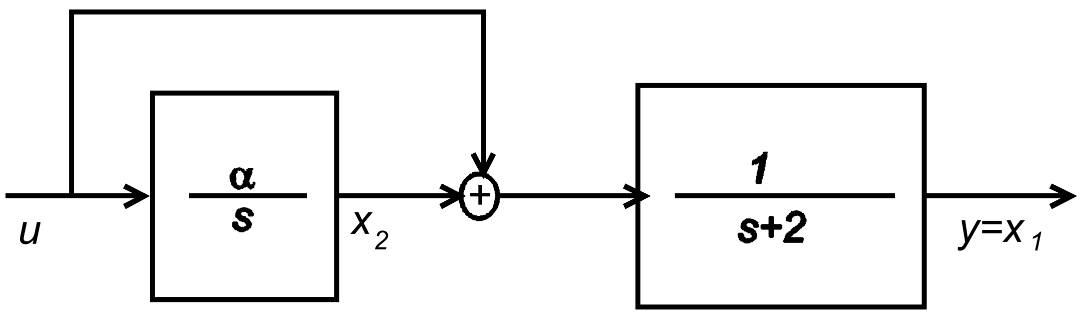


Fig. 2-1: Problema P2.

a) Obtenha uma representação de estado de 2ª ordem do sistema. Tome como variáveis de estado x_1 e x_2, indicadas na figura 2-1.

b) Diga para que valores do parâmetro α, tomando como variáveis de estado x_1 e x_2, é possível dimensionar os ganhos de uma realimentação linear de todas as variáveis de estado (RLVE) por forma a posicionar arbitrariamente os pólos do sistema em cadeia fechada. Não calcule explicitamente o polinómio característico da cadeia fechada.

c) Para $\alpha = 1$, dimensione os ganhos da RLVE por forma a que os pólos da cadeia fechada se situem em $-4 \pm j$. Suponha, nesta alínea, que tem acesso à medida directa de x_1 e x_2.

d) Suponha agora que não tem acesso à medida directa de x_1 e x_2. Diga para que valores de α é que o sistema é tal que satisfaz a condição de ser possível dimensionar um observador assimptótico do estado por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero tão depressa quanto se queira.

e) Para $\alpha = 1$ escreva as equações e projecte os ganhos de um observador por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero, com valores próprios em $-10 \pm j$ da equação de erro.

P3. A equação do pêndulo amortecido é

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + cL\frac{d\theta}{dt} + mgL\sin(\theta) = 0$$

em que L é o comprimento do pêndulo, m a sua massa, c o coeficiente de atrito, g a constante de aceleração da gravidade e $\theta(t)$ o ângulo de oscilação em relação à vertical.

a) Tomando como variáveis de estado o ângulo $\theta(t)$ e a sua derivada, escreva um sistema de equações de estado para o pêndulo.

b) Mostre que $\theta = \pi, \quad \dot{\theta} = 0$ é um ponto de equilíbrio.

c) Estude os valores próprios do sistema linearizado em torno deste ponto de equilíbrio e conclua sobre a forma das trajectórias no plano de estado do sistema linear. O que pode dizer sobre o comportamento do sistema não linear em torno deste ponto?

Nota: ***Não*** *tem de calcular os vectores próprios. Deve dar a resposta qpemnas com base na infortmaçãoque é possível extrair dos valores próprios.*

P4. Recorrendo ao 2º método de Lyapunov, com uma função de Lyapunov tentativa da forma

$$V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$$

mostre que a origem de cada um dos seguintes sistemas não lineares é do tipo indicado, relativamente à estabilidade:

a) Assimptoticamente estável

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

b) Instável

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2^2 + 4x_1^2 x_2 + 2x_2^3 \end{cases}$$

P5. Por aplicação do Princípio de Pontryagin, determine a função *u(t)* tal que o funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2(t) + u^2(t)dt$$

seja mínimo, sendo *x* o estado do seguinte sistema escalar instável

$$\frac{dx}{dt} = x + u(t)$$

Admita que existe uma constante *p* tal que

$$\lambda(t) = -px(t)$$

e determine essa constante.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

$$J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t))$$

$$\lambda'(T) = \Psi_x(x)\Big|_{x=x(T)}$$

$$H(\lambda,x,u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

P6. Considere um míssil *M* que pretende atingir um alvo *A* (ver figura 6-1). O alvo desloca-se em linha recta, para a direita. A velocidade do míssil *M* relativamente ao alvo *A* é V, constante, segundo a horizontal e x_2 segundo a vertical. No instante $t = 0$ a distância, medida segundo a horizontal entre o míssil *M* e o alvo *A* é D. O tempo que o míssil demora a atingir o alvo *A* é

$$T = \frac{D}{V}$$

A distância do míssil ao alvo segundo a vertical é x_1.

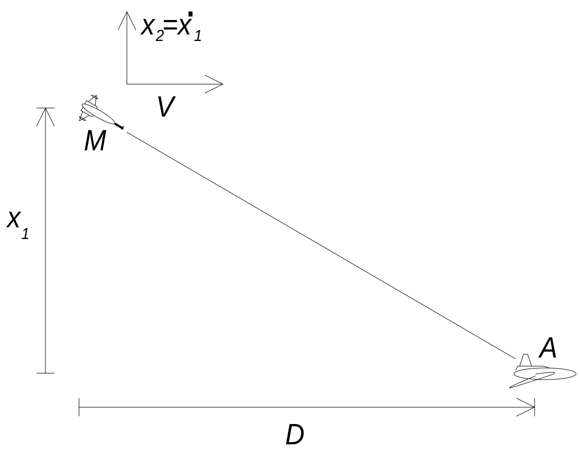


Fig.6-1 – Problema P6.

Admite-se que a dinâmica vertical do míssil é descrita por

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u$$

em que u é a variável manipulada, dada pela componente vertical da aceleração do míssil. Admite-se que não há restrições em u.

a) Determine a aceleração u do míssil no intervalo de tempo $[0, T]$ por forma a minimizar o funcional

$$J(u) = \frac{m}{2} x_1^2(T) + \frac{1}{2}\int_0^T u^2(\tau)d\tau$$

em que m é uma constante. Exprima o controlo óptimo u como função do tempo t, do tempo gasto na manobra T e das condições iniciais do estado $x_1(0)$ e $x_2(0)$.

b) Diga se a constante m deve ser grande ou pequena para que o míssil atinja o alvo.

c) Suponha que em vez de um míssil se considerava um avião de abastecimento que deveria acompanhar no final da manobra o alvo com a mesma velocidade (este problema é denominado problema de *rendez-vous*). Como modificaria o funcional de custo para este problema? (**não** tem de resolver este novo problema).

Ajuda: Equações na “Ajuda” do problema P5.