TÉCNICO LISBOA

Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2016/2017

Segundo Teste

31 de Maio de 2017, 18h30 horas – salas V1.23 a 26

Duração 2 horas

Não é permitida consulta nem uso de funcionalidades programáveis

Quotação: P1-a)2 b) 3 c) 2 P2-a)2 b)2 c)1 P2A-3 P3-a)3 b)2 P4-3

P1. Considere o sistema modelado pelo modelo de estado não linear sem entrada

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 x_2 - 1$$

a) Determine **todos** os pontos de equilíbrio.

b) Obtenha as matrizes da dinâmica do sistema linearizado em torno de cada um dos pontos de equilíbrio.

c) Com base nos resultados da alínea b), o que pode dizer sobre a estabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio **do sistema não linear**?

P2. Neste problema tem duas alternativas, designadas A e B. A alternativa A é mais complicada mas tem um valor mais elevado (5 valores). A alternativa B vale apenas 3 valores. **Deverá indicar de modo inequívoco qual a alternativa que escolhe. Se responder a ambas, apenas será considerada a resposta a A**, não sendo a outra resposta classificada.

A) Considere o diagrama de blocos do servomecanismo realimentado que se mostra na figura P2-1. Neste sistema de controlo de posição, o sinal de entrada u de um motor de corrente contínua é aplicado por um actuador cuja característica é descrita por uma função não linear f conhecida aplicada ao erro de seguimento.

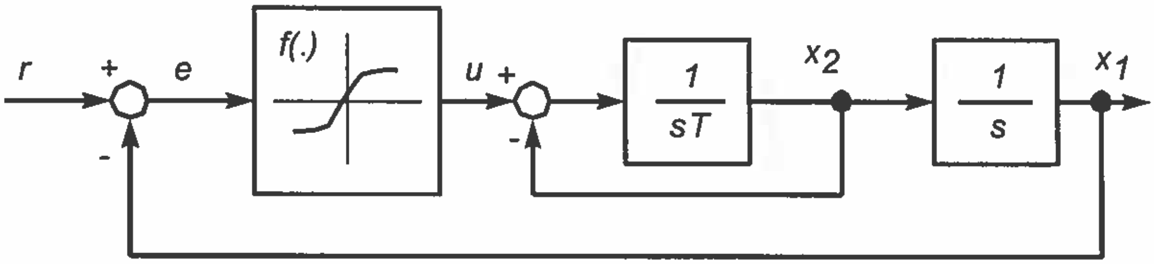


Fig. P2-1 Servomecanismo realimentado com um actuador não linear.

Sabe-se que esta função é tal que

$f(e) > 0$ para $e > 0$; $f(e) = 0$ para $e = 0$; $f(e) < 0$ para $e < 0$

Isto significa que:

$$\int_0^e f(\sigma)d\sigma > 0 \qquad \text{para} \qquad e \neq 0$$

A referência r é constante no tempo.

As variáveis x_1 e x_2 são, respectivamente, a posição angular e a velocidade angular do veio do motor. O parâmetro $T > 0$ é a constante de tempo do motor.

Responda às seguintes perguntas:

a) Considere o estado definido pelo erro de seguimento e e pela velocidade angular x_2. Escreva as equações de estado (não-lineares) correspondentes. Estas equações dependem da função f.

b) Mostre que

$$V(e, x_2) = \frac{T}{2} x_2^2 + \int_0^e f(\sigma)d\sigma$$

é uma função de Lyapunov para a origem do sistema descrito na alínea a). Diga que conclusões pode tirar sobre a estabilidade para este ponto de equilíbrio usando o teorema de Lyapunov standard.

c) Diga que conclusões pode tirar pela aplicação do Teorema do Conjunto Invariante para o mesmo problema.

B) Considere o sistema definido pelas equações de estado não lineares

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_1 x_2^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - x_1^2 x_2$$

Para este sistema, a origem $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ é um ponto de equilíbrio. Relativamente a este ponto de equilíbrio, tome como candidata a função de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Pergunta: O que pode dizer sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio para o sistema não linear? Mostre todos os cálculos.

P3. No romance *Madame de Bovary*, publicado em 1857 por Gustave Flaubert descreve-se (não é esta a história central do romance) um coveiro que plantava batatas na zona do cemitério não ocupada por sepulturas. O coveiro tinha assim um rendimento duplo: Das sepulturas que abria (pelas quais recebia um pagamento, mas que iam reduzindo o espaço disponível para a cultura de batatas), e das batatas que plantava no espaço remanescente. Para quem lê *Madame de Bovary*, põe-se o problema de saber qual deveria ser a estratégia do coveiro para aceitar ou recusar funerais, por forma a maximizar os proventos totais obtidos durante o período de tempo em que exerceu as suas funções (esta questão não é tratada no livro de Flaubert, o que não admira dado que o Princípio de Pontryagin só foi descoberto 100 anos depois). Para resolver esta questão considere a seguinte formulação matemática (esta parte não está no romance):

Seja A a área total do cemitério. Desta área, uma área x é ocupada por sepulturas, sendo a área remanescente, $A-x$, ocupada pela plantação de batatas. Por forma a poder usar um modelo na forma de uma equação diferencial, admitimos que x é uma variável real que pode tomar qualquer valor entre 0 e A, e que o ritmo u com que o coveiro abre as sepulturas pode também tomar qualquer valor entre 0 e $\bar{u}$. Tem-se assim que

$$\frac{dx}{dt} = u \tag{P3-1}$$

No instante em que o coveiro inicia a sua actividade, o cemitério não tem sepulturas, pelo que se tem a condição inicial:

$$x(0) = 0 \tag{P3-2}$$

O coveiro desenvolve a sua actividade durante um intervalo de tempo de T anos (fixo à partida). Admite-se que ao fim deste tempo o cemitério não está esgotado (isto é, que há ainda espaço para mais sepulturas), o que significa que $x(T) > 0$. O problema consiste em saber como é que deve ser o ritmo de actividade do coveiro u por forma a maximizar

$$J = \int_0^T \left(A - x(t) + \rho u(t)\right) dt \tag{P3-3}$$

em que $\rho > 0$ é um parâmetro fixo, satisfazendo a restrição

$$0 \le u \le \bar{u}$$

Responda às seguintes questões:

a) Usando o Princío de Pontryagin, determine a função $u(t)$ no intervalo de tempo $t \in [0, T]$, que maximiza J dado por (P3-3).

b) Represente graficamente, de modo aproximado, as funções $u(t)$ e $x(t)$ no intervalo de tempo $t \in [0, T]$ quando é utilizado o controlo óptimo.

P4. Após uma vida de trabalho árduo e empenhado, a D. Aulíria, zelosa e exemplar funcionária da 5ª repartição do contencioso das Finanças do Município de Vila-Cova-à-Coelheira, com uma vida dedicada à Adminstração Pública, reformou-se e pretende determinar o seu plano de poupança e gastos óptimo durante um intervalo de tempo que começa no instante actual, $t = 0$, e acaba num instante futuro $t = T$.

A D. Aulíria não tem nenhuma outra fonte de rendimento para além dos juros das suas poupanças. Sendo $x_1(t)$ o valor das poupanças no instante t, esta variável satisfaz portanto a equação diferencial

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1(t) - u(t), \tag{P4-1}$$

com condição inicial $x_1(0) = x_0$, e em que $\alpha > 0$ é um parâmetro constante que determina a taxa de rendimento das poupanças (colocadas em bancos seguros e de uma insuspeita honestidade na boa tradição portuguesa), e $u(t)$ são os gastos da D. Aulíria no instante t.

Em cada instante de tempo t, admite-se que o gasto instantâneo $u(t)$ nele realizado tem uma utilidade (ou seja, o prazer que dele tira a D. Aulíria) dada por $\sqrt{u}$. Como a utilidade dos gastos futuros, feitos no instante t, tem um valor menor do que o actual (feito no instante 0), admite-se que a utilidade decai exponencialmente no tempo. Assim, o funcional a maximizar é

$$J = \int_0^T e^{-\beta t}\sqrt{u}(t)dt, \tag{P4-2}$$

em que β é um parâmetro positivo.

Pretende-se: Determine a lei de controlo que maximiza o funcional J dado por (P4-2), sujeito à dinâmica (P4-1) e à condição terminal

$$x_1(T) = 0. \tag{3}$$

(A D. Aulíria pretende estoirar o cacau todo. A seguir os sobrinhos, que a adoram, tratam dela).

Ajuda: Observe que a função lagrangeana em (P4-2) depende do tempo. No entanto, a forma do Princípio de Pontryagin que estudou não contempla este caso, uma vez que assume que, quer a dinâmica (P4-1), quer a função lagrangiana (função integranda em (P4-2)), não dependem explicitamente do tempo. Mostre que esta dificuldade pode ser facilmente ultrapassada através da introdução de uma variável de estado adicional. Defina esta variável de estado e reformule o problema como um problema equivalente ao posto em que a lagrangeana não depende explicitamente de t.

Ajudas úteis

$\dot{x} = -ax + b \quad a, b$ constantes
$x(t) = \dfrac{b}{a} + Ce^{-at}$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda,x,u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Transformadas de Laplace

$$1 \to \frac{1}{s}, \quad e^{-at} \to \frac{1}{s+a}, \quad 1 - e^{-at} \to \frac{a}{s(s+a)}$$

TÉCNICO LISBOA

Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2016/2017

Second Test

31 de Maio de 2017, 18h30 horas – salas V1.23 a 26

Duration 2 hours

Document consultation not allowed

Grades: P1-a)2 b) 3 c) 2 P2-a)2 b)2 c)1 P2A-3 P3-a)3 b)2 P4-3

P1. Consider the nonlineare state model without input

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 x_2 - 1$$

a) Find **all** the equilibrium points.

b) Obtain the dynamic matrices of the linearized system around each of the equilibrium points.

c) Using the results of b), what can you say about the stability of these equilibrium points?

P2. In this problem you have 2 choices, named A and B. Choice A is more complicated, but it has a higher value (5 points). Alternative B has the smaller value of 3 points. You must indicate your choice. If you answer both choices, only choice A is considered.

A) Consider the block diagram of a feedback servomechanism shown in figure P2-1. In this position control system the input signal u of a direct current motor is applied by a power amplifier, the characteristic of which is described by the nonlinear function f, known, that has as argument the tracking error e.

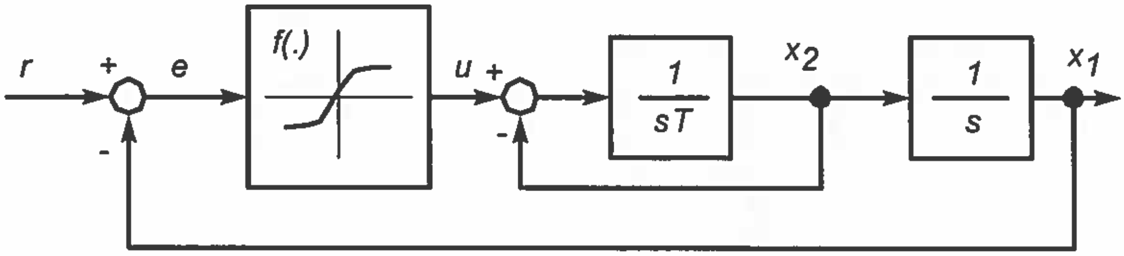


Fig. P2-1 Feedback servomechanism with a nopnlinear actuator.

This function is such that

$$f(e) > 0 \text{ for } e > 0; \quad f(e) = 0 \text{ for } e = 0; \quad f(e) < 0 \text{ for } e < 0$$

These properties mean that

$$\int_0^e f(\sigma)\,d\sigma > 0 \quad \text{for} \quad e \neq 0$$

The reference r is constant in time.

Variables x_1 and x_2 are, respectively, the angular position and the angular velocity of the shaft motor. Parameter $T > 0$ is the motor time constant.

Answer the following questions:

a) Consider the state defined by the tracking e and the angular velocity x_2. Write the corresponding nonlinear state equations. These equations depend on the function f.

b) Show that

$$V(e, x_2) = \frac{T}{2} x_2^2 + \int_0^e f(\sigma)\,d\sigma$$

Is a Lyapunov function for the origin. State the conclusions that you can obtrain wsing the standard Lyapunov theorem.

c) State the conclusions that you can obtain from the invariant set theorem.

B) Consider

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_1 x_2^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - x_1^2 x_2$$

For this system the origin ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) is an equilibrium point. In relation to this equilibrium consider the Lyapunov function

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Question: What can you say about the stability properties of the origin? Show all your calculations.

P3. The novel *Madame de Bovary*, published in 1857 by Gustave Flaubert describes a grave digger that plants potatoes in the part not occupied by tombs. The grave digger had a double income: from the graves that he was opening (for which he was paid, but that they were progressively reducing the space available for potatoes), and from the potatoes that he was planting in the remaining space. If one reads *Madame de Bovary*, the following problem immediately arises: what is the optimal strategy of the grave digger to accept or refuse funerals in order to maximize his profit during the period of time in which he was in function (this problem is not treated in Flaubert's book, which is not a wonder since Pontryagin's Principle was discovered only 100 years later). To solve this problem, consider the fillowing mathematical formulation(this part in the novel):

Let A be the total area of the cemetery. Of this area, an area x is occupied by tombs, and the remnaining area, $A-x$, is occupied by potatoes. ocupada pela plantação de batatas. In order to be able to use a model in the form of a differential equation, it is assumed x is a real variable that may assume any value between 0 and A, and that the rate u with which the grave digger opens the graves may also take any value between 0 and $\bar{u}$. Therefore

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad \text{(P3-1)}$$

Sice when the grave digger started his activity there were no graves, and therefore we have the following initial condition

$$x(0) = 0 \qquad \text{(P3-2)}$$

It is assumed that the grave digger is active during a fixed period of T years, and that after this period, there is still room for more graves, meaning that $x(T) > 0$.

The problem consists in finding the rate of work u of the grave digger such as to maximize

$$J = \int_0^T \left(A - x(t) + \rho\, u(t)\right) dt \qquad \text{(P3-3)}$$

wheree $\rho > 0$ is a constant parameter, while satisfying the constraint

$$0 \leq u \leq \bar{u}$$

Answer the following questions:

a) Using Pontryagin's Principle, find the function $u(t)$ in the interval of time $t \in [0, T]$, that maximizes J given by (P3-3).

b) Sketch the functions $u(t)$ and $x(t)$ for $t \in [0, T]$ when using the optimal control..

P4. After a hard life of work, miss Aulíria has retired and wants to decid a plan of optimal savings and expenditure during an interval of time that starts at the current moment, $t = 0$, and ends in a future time $t = T$.

Miss Aulíria has no other source of income besides her savings. Being $x_1(t)$ the value of savings at time t, this variable satisfies the differential equation

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1(t) - u(t), \qquad \text{(P4-1)}$$

With the initial condition $x_1(0) = x_0$, in which $\alpha > 0$ is a constant parameter that represents the rate of valorization of the savings, and $u(t)$ represents the rate of expenditure of miss Aulíria at time t.

At each time t, it is assumed that the rate of expenditure $u(t)$ has an utility (that is to say, the pleasure joyed by miss Aulíria from it) given by $\sqrt{u}$. Since the utility of future expenditures made at time t has less value then the present ones (made at time 0) it is assumed that the utility decays exponentially in time. The functional to maximize is therefore

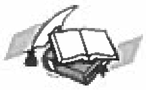
$$J = \int_0^T e^{-\beta t} \sqrt{u}(t) dt, \qquad \text{(P4-2)}$$

where β is a positive parameter.

Question: Using Pontryagin's maximum principle, find the control law that maximizes the functional J given by (P4-2), subject to the dynamics (P4-1) and the terminal condition

$$x_1(T) = 0. \tag{3}$$

Help: Observe that the lagrangian function in (P4-2) depends on time. The form of Pontryagin's Maximum Principle that you have studied does not include this case. Show that this difficulty can be easily overcome by the introduction of an additional state variable. Define this extra state variable and reformulate the problem in a way that the lagrangian does not depend on t.



Helpful hints

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x} = -ax + b \quad a, b \text{ constant} \\ \qquad x(t) = \dfrac{b}{a} + Ce^{-at} \end{array}}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} & \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Laplace transforms

$$1 \to \frac{1}{s}, \quad e^{-at} \to \frac{1}{s+a}, \quad 1 - e^{-at} \to \frac{a}{s(s+a)}$$

P1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - 1 \end{cases}$$

a) Equilibrium points

$x_1 = x_2$

$x_1^2 = 1 \qquad x_1 = \pm 1$

A) $x_1 = 1 \quad x_2 = 1$

B) $x_1 = -1 \quad x_2 = -1$

b) Jacobian matrix at a generic point

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

c) Linearization around A

$$x_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x = x_A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2$$

$\lambda_1 = +\sqrt{2}, \quad \lambda_1 = -\sqrt{2}$

Since there is one eigenvalue with positive real part, x_A is unstable.

$$x_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x = x_B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$$\lambda_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm j$$

Since all eigenvalues have negative real part, x_B is asymptotically stable.

P2 A)

a) $e = r - x_1 \qquad i = -\dot{x}_1$

$$\begin{cases} \dot{e} = -x_2 \\ \dot{x}_2 = \left(-x_2 + f(e)\right)\frac{1}{T} \end{cases}$$

b) $V(0,0) = \frac{T}{2}\, 0^2 + \int_0^0 f(\sigma)\,d\sigma = 0$

$V(e, x_2) > 0 \quad \forall \begin{bmatrix} e \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\dot{V} = T\, x_2 \dot{x}_2 + \dot{e}\, f(e)$

$\dot{V} = -x_2^2 + \cancel{x_2 f(e)} - \cancel{x_2 f(e)}$

$\dot{V} = -x_2^2 \leq 0$

Stable, at least.

c) All trajectories $\longrightarrow$ Largest invariant set in which $\dot{V} = 0$

In this set $x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0$

From $\underset{\overset{\|}{0}}{\dot{x}_2} = \frac{1}{T}\left(-\underset{\overset{\|}{0}}{x_2} + f(e)\right) \Rightarrow f(e) = 0 \Rightarrow e = 0$.

P2 B)

$$\dot V = x_1 \dot x_1 + x_2 \dot x_2 =$$

$$= -x_1^2 - x_1^2 x_2^2 - x_2^2 - x_1^2 x_2^2$$

$$= -\left(x_1^2 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^2\right) < 0$$

Asymptotically stable.

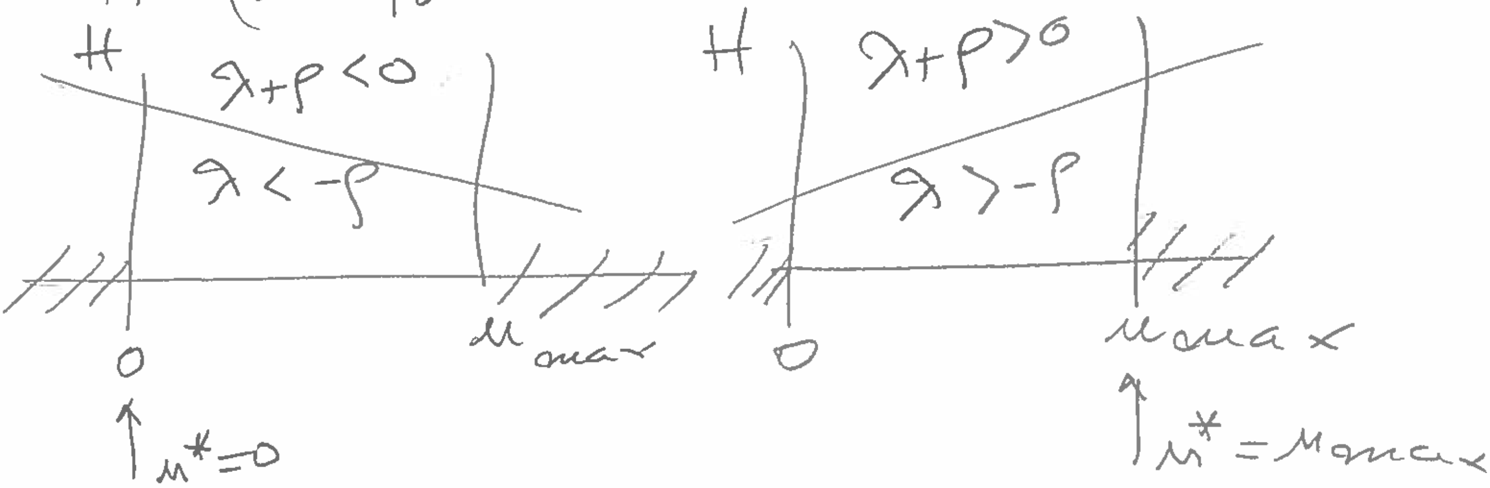
P3 $f = u \quad f_x = 0$

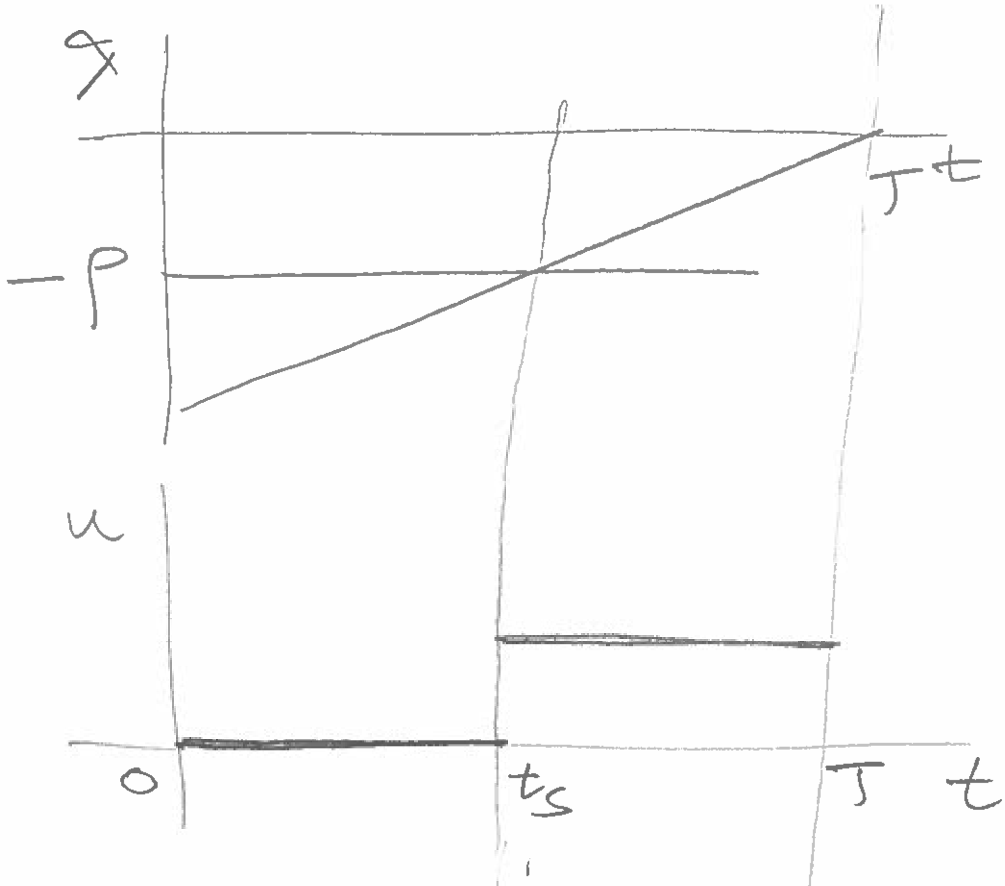
a) $L = A - x + \rho u \qquad L_x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} -\dot\lambda = -1 \quad \dot\lambda = 1 \\ \lambda(T) = 0 \end{array}\right\} \lambda(t) = t - T$$

$$H = \lambda u + A - x + \rho u$$

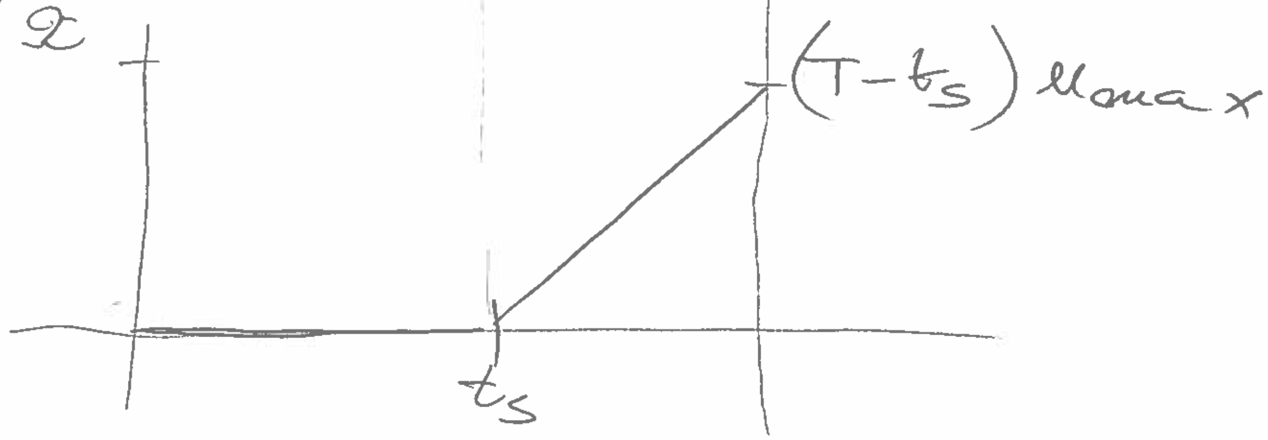
$$H = (\lambda + \rho) u + A - x$$





$$\lambda + \rho = 0$$
$$t_s - T + \rho = 0$$
$$t_s = T - \rho$$

b)



P4

$$\dot{x}_1 = a x_1 - u$$

$$\dot{x}_2 = 1$$

$$J = \int_0^T e^{-\beta x_2} u^{\frac{1}{2}} \, dt$$

$$f = \begin{bmatrix} a x_1 - u \\ 1 \end{bmatrix} \qquad L = e^{-\beta x_2} \sqrt{u}$$

$$f_x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} 0 & -\beta e^{-\beta x_2} \sqrt{u} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\dot{\lambda}_1 & -\dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\beta e^{-\beta x_2} \sqrt{u} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\dot{\lambda}_1 & -\dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\beta e^{-\beta x_2} \sqrt{u} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\lambda}_1 = -a \lambda_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\beta e^{-\beta x_2} \sqrt{u}$$

$$\lambda_1(t) = C_1 e^{-at}$$

$$H = \lambda_1 (a x_1 - u) + \lambda_2 + e^{-\beta t} \sqrt{u}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_1 - e^{-\beta t} \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

Extremum condition

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lambda_1 = e^{-\beta t} \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\sqrt{u} = \frac{e^{-\beta t}}{2\lambda_1} = \frac{1}{2 C_1 e^{-at} e^{\beta t}}$$

$$u(t) = \frac{1}{4 C_1^2 e^{2(\beta - a)t}}$$

$$C \triangleq \frac{1}{4 C_1^2}$$

$$u(t) = C e^{2(a-\beta)t}$$

$$\dot{x}_1 = a x_1 - C e^{2(a-\beta)t}$$

$$s X_1 - x_0 = a X_1 - C \frac{1}{s - 2(a-\beta)}$$

$$X_1 = \frac{1}{s-a} x_0 + C \frac{1}{(s-a)(s-2(a-\beta))}$$

$$\frac{1}{(s-a)(s-2(a-\beta))} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-2(a-\beta)}$$

$$A = \frac{1}{\beta} \qquad B = -\frac{1}{\beta}$$

$$X_1 = \frac{1}{s-a} x_0 + \frac{C}{\beta}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-2(a-\beta)}\right)$$

$$x_4(t) = x_0 e^{at} + \frac{C}{\beta}\left(e^{at} - e^{2(a-\beta)t}\right)$$

~~Apply~~ the terminal condition to find C

$$x_0 e^{aT} + \frac{C}{\beta}\left(e^{aT} - e^{2(a-\beta)T}\right) = 0$$

$$x_0 + \frac{C}{\beta}\left(1 - e^{-\beta T}\right) = 0$$

$$C = \frac{x_0}{e^{-\beta T} - 1}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{x_0}{e^{-\beta T} - 1} \cdot e^{2(a-\beta)t}}$$