Licenciatura em Engenharia Electrotécnica

e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2005/06

Primeiro Exame

28 de Junho de 2006, 17 horas - salas C9, C11, C22

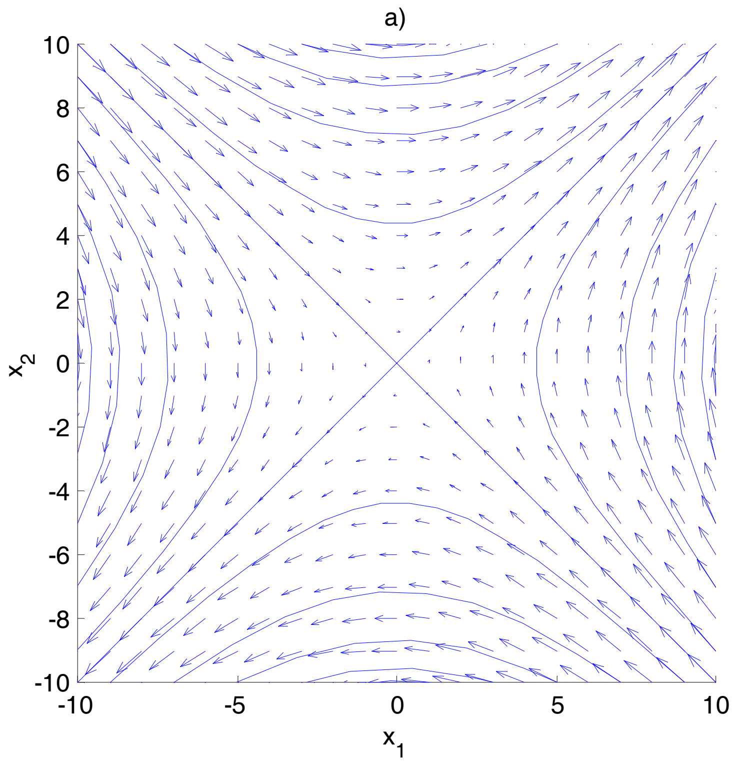
Duração 3horas – Não é permitida consulta nem calculadoras programáveis

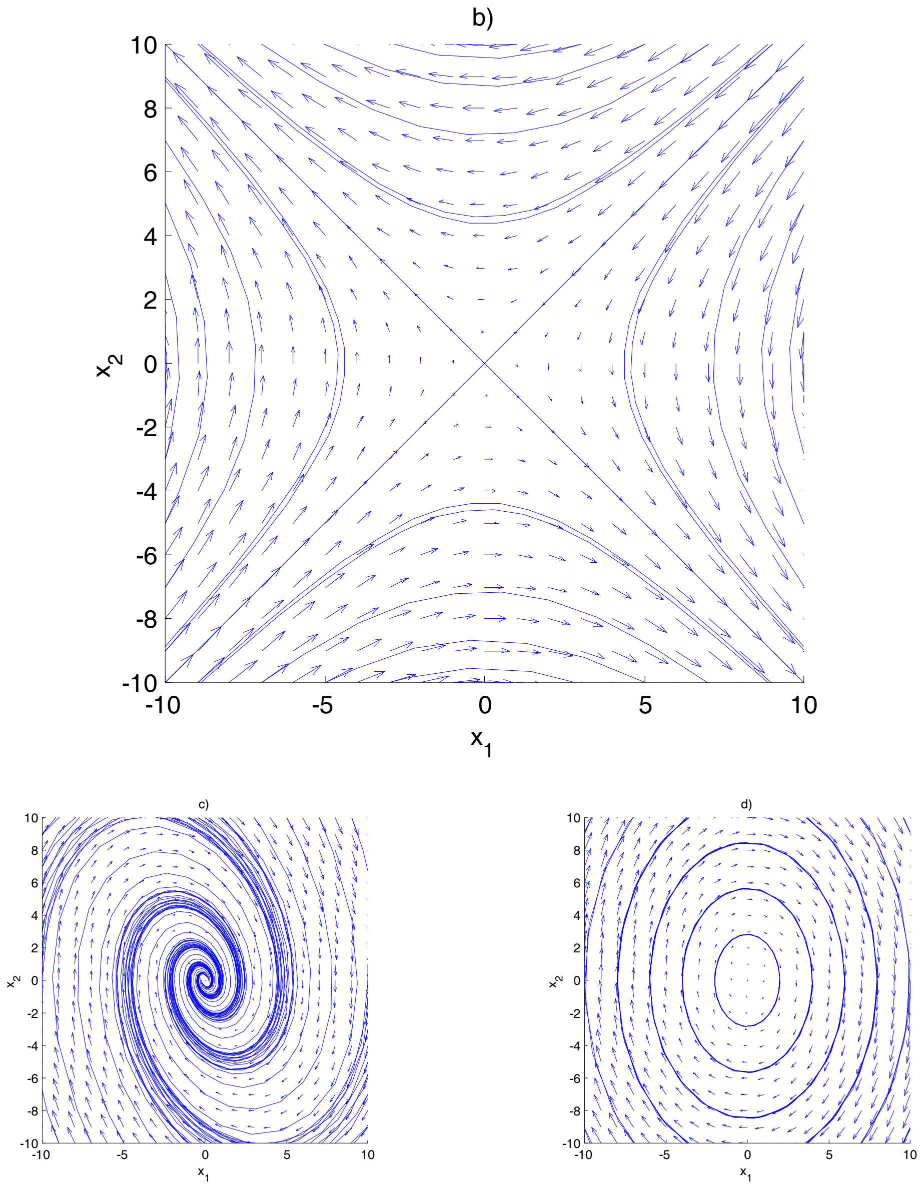
Quotação: P1-6, P2-5, P3-2, P4-2, P5-2, P6-3.

P1. Considere as figuras seguintes, que correspondem a trajectórias no espaço de estado de 4 sistemas lineares de 2ª ordem, diferentes, com equação

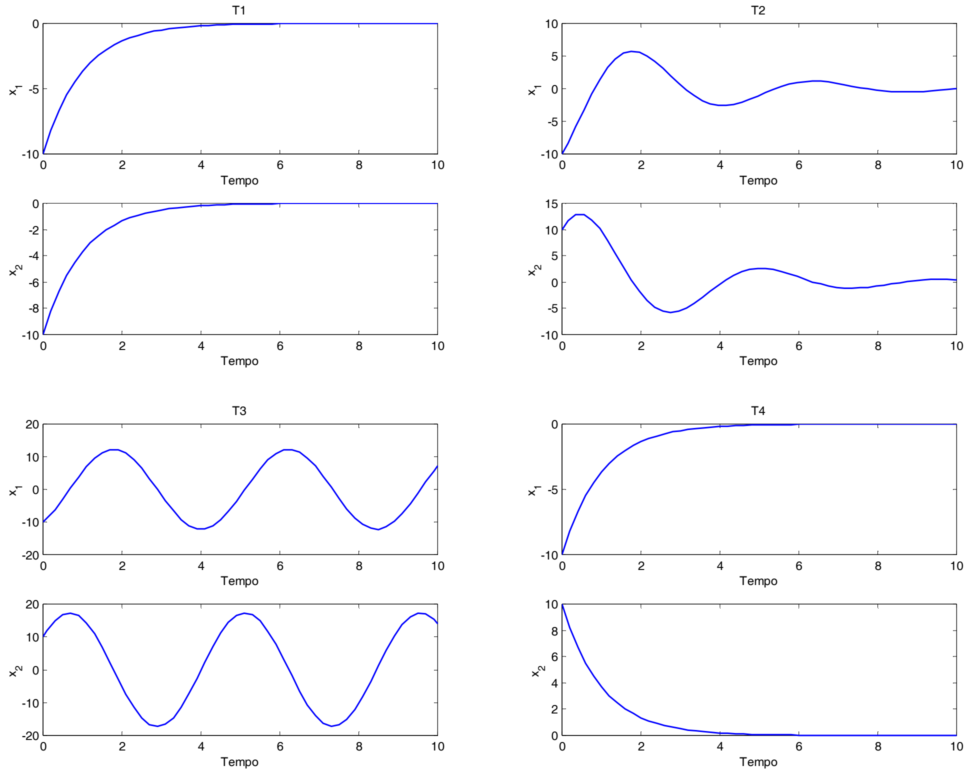
$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

Estes retratos de fase estão identificados de *a)* a *d)* no topo de cada figura.





Considere ainda as respostas temporais das duas components do estado partindo de uma dada condição inicial (que pode variar de figura para figura).



Considere ainda as seguintes matrizes da dinâmica

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.7 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Diga qual das matrizes corresponde a qual retrato de fase. Deve justificar a sua resposta com base nos valores próprios e vectores próprios (calcule os vectores próprios apenas quando necessário). Pode ainda utilizar outros argumentos se a resposta baseada nos valores próprios e vectores próprios não fôr suficiente.

b) Diga qual das respostas temporais corresponde a qual retrato de fase. Justifique.

c) Calcule a exponencial da matriz A_2, isto é, a matriz $e^{A_2 t}$. Utilize o método que achar conveniente.

d) Calcule a resposta $x(t)$ quando a matriz da dinâmica é a matriz A_2, e a condição inicial é $x_1(0) = 1 \quad x_2(0) = 0$.

P2. A figura 2.1 representa um paciente preparado para ser sujeito a uma intervenção cirúrgica, ligado a um sistema automático de controlo do nível de bloqueio neuromuscular, que constitui uma das componentes da anestesia (a qual visa "paralizar" o paciente). São visíveis, respectivamente, os seguintes elementos do sistema de controlo:

- O sensor de actividade muscular, colocado na mão do paciente;
- O computador que recebe os sinais do sensor e calcula a dose de fármaco relaxante muscular (atracúrio) a aplicar ao doente (variável manipulada) por forma que o seu nível de actividade muscular seja o desejado;
- A seringa perfusora (aparelho verde, do lado esquerdo), que recebe o valor da variável manipulada através de uma porta série ligada ao computador de controlo e aplica ao paciente a dose de fármaco relaxante muscular.

Fig. 2-1. Problema P2. Controlo por computador do nível de actividade muscular de um paciente sujeito a cirurgia.

Neste problema pretende-se projectar um lei de controlo de realimentação de variáveis de estado, a programar no computador, tal que o nível do relaxamento muscular seja o desejado (problema de regulação). Para tal, sabe-se que a relação entre a variável manipulada u e o incremento y do nível de actividade muscular em relação a um nível de referência pode ser representado pelo diagrama de blocos da figura 2-2. Neste diagrama, α é um parâmetro que tem o valor nominal $\alpha = 1$.

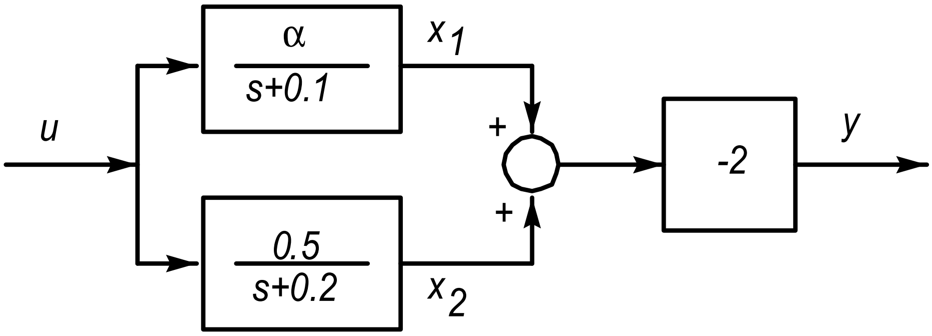


Fig. 2-2. Problema P2. Modelo da actividade muscular do paciente.

Embora o sistema implementado em computador seja discreto, neste problema apenas se considera o algoritmo baseado em equações em tempo contínuo. Responda sucessivamente às seguintes questões:

a) Obtenha uma representação de estado de 2ª ordem do sistema. Tome como entrada u, variáveis de estado x_1 e x_2 e como saída y, indicadas na figura 2-2.

b) Diga para que valores do parâmetro α, tomando como variáveis de estado x_1 e x_2, é possível dimensionar os ganhos de uma realimentação linear de todas as variáveis de estado (RLVE) por forma a posicionar arbitrariamente os pólos do sistema em cadeia fechada. Não calcule explicitamente o polinómio característico da cadeia fechada.

c) Para o valor nominal $\alpha = 1$, dimensione os ganhos da RLVE por forma a que os pólos da cadeia fechada se situem em $-0.2 \pm 0.1j$. Suponha, nesta alínea, que tem acesso à medida directa de x_1 e x_2.

d) Suponha agora que não tem acesso à medida directa de x_1 e x_2. Diga para que valores de α é que o sistema é tal que satisfaz a condição de ser possível dimensionar um observador assimptótico do estado por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero tão depressa quanto se queira.

e) Para o valor nominal $\alpha = 1$ escreva as equações e projecte os ganhos de um observador por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero, com valores próprios em $-1 \pm 0.1j$ da equação de erro.

f) Usando apenas blocos com entradas e saídas e ligações **escalares**, desenhe o diagrama de blocos do sistema de controlo incluindo o controlador e o observador.

P3. Um pêndulo com comprimento 1m e massa 1kg pode ser descrito pelo modelo de estado não linear

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -10\sin(x_1) - \beta x_2 \end{cases}$$

em que x_1 é o ângulo de desvio da vertical, x_2 é a velocidade angular e β o coeficiente de atrito.

a) Mostre que a origem $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ é um ponto de equilíbrio do sistema.

b) Obtenha a matriz da dinâmica do sistema linearizado em torno da origem.

c) Calcule os valores próprios da matriz da dinâmica do sistema linearizado em torno da origem, em função do parâmetro β.

d) Discuta a estabilidade em torno da origem do sistema linearizado e do sistema não linear quando $\beta \geq 0$. Considere todos os casos relevantes.

P4. a) Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov, mostre que a origem (0, 0) do sistema seguinte é um ponto de equilíbrio assimptoticamente estável:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1^3 - 2x_1x_2^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2^3 \end{cases}$$

b) Faça uma transformação da variável "tempo" *t* no exemplo anterior por forma a obter um sistema instável. Demonstre que ele é instável com o teorema de instabilidade de Lyapunov.

P5. Pretende-se controlar a posição de um motor de corrente contínua de íman permanente. Sabe-se que a função de transferência que relaciona a tensão aplicada ao motor (variável manipulada) com a posição do veio ("saída" a controlar) é

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

O controlo é feito por realimentação de variáveis de estado, sendo os ganhos escolhidos por forma a optimizar

$$J = \int_0^\infty \left[y^2(t) + \rho u^2(t) \right] dt$$

em que ρ é um parâmetro a seleccionar.

a) Determine o lugar geométrico das raízes do polinómio característico do sistema em cadeia fechada que obtém quando o parâmetro ρ varia de 0 a mais infinito.

b) Diga se a resposta do sistema em cadeia fechada apresenta ou não oscilações quando o parâmetro ρ toma valores sucessivamente menores (mas sempre positivos. Justifique a sua resposta com base no diagrama que obteve na alínea a).

P6. A figura 6.1 representa um reservatório de água usada para combate a incêndios.

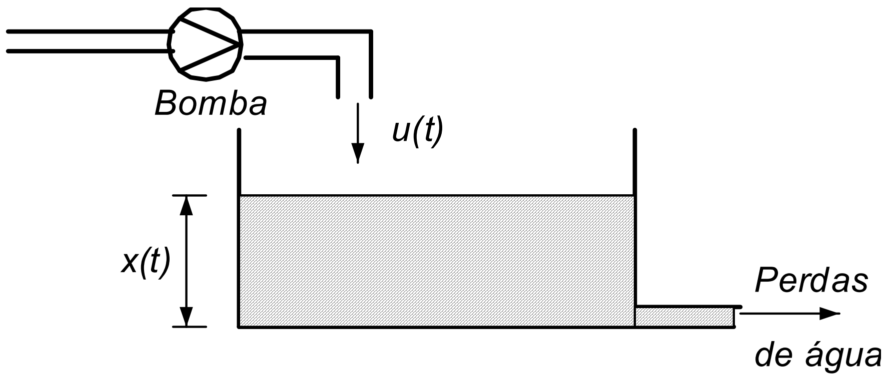


Fig. 6.1 – Reservatório para combate a incêndios.

Este reservatório tem perdas que levam a uma queda do nível, e que devem ser repostas por uma bomba por forma a manter o nível dentro de valores adequados. Dado que a pressão é proporcional ao nível, este nunca deverá baixar muito por forma a que haja sempre uma pressão suficiente para o combate a um eventual incêndio. Admite-se que o nível é modelado pela equação diferencial linear de 1ª ordem

$$\dot{x} = -0.1x + u$$

com condição inicial

$$x(0) = 10$$

Admite-se que, na escala de tempo considerada, a bomba impõe directamente um caudal de água $u(t)$, que constitui a variável manipulada e, no sistema de uniudades considerado, satisfaz a restrição:

$$0 \leq u \leq 3$$

Neste problema pretende-se operar a bomba por forma a optimizar um custo, supondo que ela opera no intervalo de tempo de 0 a 100 (unidades de tempo). Consideram-se duas situações, correspondentes a funcionais de custo diferentes. Em ambas apenas se devem considerar as soluções em que $x \geq 0$.

a) Recorrendo ao Princípio de Pontriagyn, determine o perfil óptimo para o caudal $u(t)$ no intervalo de tempo de 0 a 100, quando o funcional de custo a maximizar é

$$J_1 = \int_0^{100} \left[x(t) - 5u(t) \right] dt$$

b) Calcule o nível $x(t)$ do reservatório quando é usada a lei de controlo quer deduziu na alínea a), nos instantes de tempo $t = 0$, $t = 10$, $t = 100$ e no instante de tempo em que o nível $x(t)$ é máximo. Use estes valores para esboçar aproximadamente a função $x(t)$.

c) Recorrendo ao Princípio de Pontriagyn, determine o perfil óptimo para o caudal $u(t)$ no intervalo de tempo de 0 a 100 (unidades de tempo), quando o funcional de custo a maximizar é agora

$$J_2 = 5x(100)$$

Ajudas úteis: As informações seguintes são úteis para resolver este problema.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x)\big|_{x=x(T)}$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

A solução da equação diferencial escalar $\dot{x}(t) + ax(t) = b$ com a e b constantes é dada por

$$x(t) = \frac{b}{a} + ce^{-at}$$

em que c é uma constante que depende das condições iniciais.