TÉCNICO LISBOA

Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2013/2014

Segundo Teste

29 de Maio de 2018, 20 horas – salas F2,F3,FA1

Duração 2 horas

Não é permitida consulta nem calculadoras programáveis

Quotação: P1-6 P2-5 P3-5 P4-4

P1. Em certas condições, um laser de CO2 de fase gasosa pode ser descrito pelo modelo de estado não linear

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = 1 - \alpha x_2 - (1 + \beta x_2) x_1$$

em que α e β são parâmetros positivos, x_1 é a intensidade normalizada do feixe de luz e x_2 é proporcional à diferença entre o número de átomos excitados e não excitados do gás. Responda às seguintes perguntas:

a) Calcule todos os pontos de equilíbrio do sistema
b) Obtenha as equações do sistema linearizado em torno de cada um dos pontos de equilíbrio.
c) Com base na linearização que fez na alínea b), diga justificadamente se os pontos de equilíbrio são ou não assimptoticamente estáveis, ou se não pode dizer nada sobre a estabilidade. Admita que $\beta + \alpha < 2$.

P2. Considere o diagrama de blocos do servomecanismo realimentado que se mostra na fig. P2-1. Neste sistema de controlo de posição, o sinal de entrada u de um motor de corrente contínua é aplicado por um actuador cuja característica é descrita por uma função não linear f aplicada ao erro de seguimento.

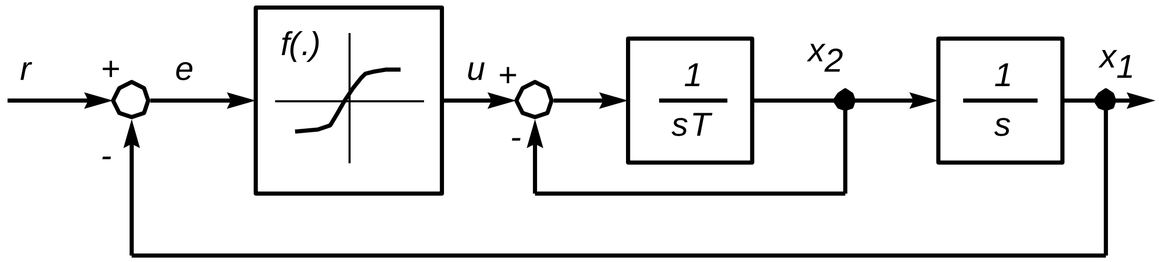

Fig. P2-1 Servomecanismo realimentado com um actuador não linear.

Sabe-se que esta função é tal que

$$f(e) > 0 \text{ para } e > 0; \quad f(e) = 0 \text{ para } e = 0; \quad f(e) < 0 \text{ para } e < 0$$

Isto significa que:

$$\int_0^e f(\sigma)\, d\sigma > 0 \qquad \text{para} \qquad e \neq 0$$

A referência r é constante no tempo.

As variáveis x_1 e x_2 são, respectivamente, a posição angular e a velocidade angular do veio do motor. O parâmetro $T > 0$ é a constante de tempo do motor.

Responda às seguintes perguntas:

a) Considere o estado definido pelo erro de seguimento e e pela velocidade angular x_2. Escreva as equações de estado (não-lineares) correspondentes.

b) Mostre que

$$V(e, x_2) = \frac{T}{2} x_2^2 + \int_0^e f(\sigma)\, d\sigma$$

é uma função de Lyapunov para a origem do sistema descrito na alínea a). Diga que conclusões pode tirar sobre a estabilidade para este ponto de equilíbrio através do Teorema de Lyapunov.

c) Diga que conclusões pode tirar pela aplicação do Teorema do Conjunto Invariante para o mesmo problema.

P3. Uma classe de aplicações do controlo que tem grande interesse tem a ver com a Medicina. Neste problema optimiza-se a terapia que permite que permite impedir o crescimento de um tumor. Admite-se que o crescimento do tumor pode ser modelado através da seguinte equação diferencial escalar

$$\dot{x} = x - bu,$$

em que x é a massa do tumor, u é a terapia utilizada, que se assume ser a taxa de aministração de um fármaco (variável manipulada) e b é um parâmetro positivo, que se admite conhecido, e que traduz a sensibilidade do tumor à terapia.

Supõe-se que é feito um tratamen durante um intervalo de tempo de duração T. O objectivo é um compromisso entre minimizar a massa do tumor no final do tratamento, $x(T)$ e a quantidade total de fármaco administrada (o fármaco tem efeitos secundários tóxicos). Este objectivo é traduzido através do funcional seguinte, que se pretende minimizar

$$J(u) = x(T) + \int_0^T \rho\, u(t)dt,$$

em que ρ é um parâmetro positivo que traduz a importância relativa de minimizar a quantidade de fármaco administrada face ao objectivo de reduzir o tumor.

A terapia tem de verificar a condição

$$0 \leq u \leq u_{max},$$

em que u_{max} é a taxa máxima de admissão de fármaco. Admite-se ainda que $\rho > b$. Determine a função de controlo óptimo que minimiza J. Utilize o Princípio de Pontryagin.

Ajuda:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t)\, f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda,x,u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

P4. Um submarino desloca-se em linha recta, com uma velocidade longitudinal V num meio aquático onde não há correntes, movido por uma força de propulsão F_p. Neste problema pretende-se projectar um controlador que mantenha a velocidade incremental em relação ao equilíbrio perto de zero (isto é, pretende-se que o submarino mantenha a velocidade nominal aproximadamente constante, mesmo que haja perturbações que a desviem deste valor). O projecto é feito supondo válido o modelo incremental contínuo descrito pela equação

$$\dot{v} = -0.5v + u \ ,$$

em que u é o incremento da força de propulsão em relação à força de equilíbrio e v o correspondente incremento de velocidade em relação à velocidade de equilíbrio. Pretende-se escolher a variável manipulada u por forma a minimizar

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(v^2(t) + u^2(t)\right)dt \ .$$

Por aplicação do Princípio de Pontryagin, obtenha uma lei de controlo de realimentação por forma a minimizar J.

Sugestão: Assuma que, em cada instante de tempo t, a velocidade $v(t)$ e o co-estado $\lambda(t)$ estão relacionados por

$$\lambda(t) = -p\,v(t) \ ,$$

em que p é uma constante positiva que deve determinar, e escreva uma equação algébrica verificada por p.