Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2014/2015

Segundo Teste

28 de Maio de 2015, 16h30 horas – salas C13, C12 e C10

Duração 2 horas

Não é permitida consulta nem uso de calculadoras programáveis

Quotação: P1a)1b)2c)2d)1 P2 Aa,b,d,e=1, c=2 B)a)2 b)2P3a)4b)1P4a) 1 b)1 c)1

P1. Considere o sistema sem entrada descrito pelas equações não lineares de estado

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(x_1 + 1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1(1 + x_2^3)$$

a) Escreva um conjunto de equações algébricas não lineares verificadas por todos os pontos de equilíbrio do sistema.

b) Resolva o sistema de equações algébricas que escreveu na alínea a) para obter todos os pontos de equilíbrio do sistema. Para simplicidade de referência a estes pontos nas alíneas seguintes, designe-os pelas letras maiúsculas A, B,...

c) Obtenha as equações do sistema linearizado em torno de cada um dos pontos de equilíbrio.

d) Com base nos resultados da alínea c), o que pode dizer sobre a estabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio do sistema não linear?

P2. Neste problema tem duas alternativas, designadas A ou B. A alternativa A é mais complicada mas tem um valor mais elevado (6 valores). A alternativa B vale apenas 4 valores. **Deverá indicar de modo inequívoco qual a alternativa**

que escolhe. Se responder a ambas, apenas será considerada a resposta a A, não sendo a outra resposta classificada.

A) Neste problema pretende-se desenvolver um controlador adaptativo baseado no 2º Método de Lyapunov para a velocidade de um submarino autónomo do tipo "torpedo" que se mostra na figura P2-1.

Fig. P2-1. Submarino considerado no problema P2-1 A. (Fotografia do MIT).

Na ausência de correntes marinhas, o modelo que relaciona a velocidade linear do submarino, v, com a velocidade de rotação da hélice u (variável manipulada) é

$$\frac{dv}{dt} = -\varepsilon\alpha v^2 + \beta u^2.$$

Nesta equação, α e β são constantes conhecidas com precisão, e ε é uma constante desconhecida, que dever ser estimada pelo controlador adaptativo. Designe por $\hat{\varepsilon}$ a estimativa de ε e por $\tilde{\varepsilon}$ o erro da estimativa, sendo por conseguinte

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \hat{\varepsilon}.$$

A a) Determine uma mudança na variável manipulada tal que, se o erro na estimativa de ε fosse nulo, o sistema seria um integrador. Designe por w a nova variável manipulada virtual, e escreva as expressões que permitem calcular w como função da velocidade da hélice u e, vice-versa, u como função de w.

A b) Seja r a velocidade desejada e defina o erro de seguimento e como a diferença entre a valocidade desejada e a velocidade real, ou seja $e = r - v$. Determine uma lei de controlo linear que permita calcular w como função do erro de seguimento por forma a garantir que o erro de seguimento e tende para zero quando o tempo aumenta e admitindo um conhecimento perfeito do parâmetro ε.

A c) Com base na candidata a função de Lyapunov $V(e,\tilde{\varepsilon}) = \frac{1}{2}(e^2 + \frac{1}{\gamma}\tilde{\varepsilon}^2)$ obtenha uma lei de ajuste da estimativa do parâmetro $\hat{\varepsilon}$ que garanta que o sistema controlado é estável pelo menos.

A d) Com base no Teorema do Conjunto Invariante, mostre que o erro de seguimento e tende para zero quando o tempo aumenta.

A e) Desenhe um diagrama de blocos do sistema global, mostrando o submarino, a transformação da variável manipulada da alínea a), a lei de controlo da alínea b) e a lei de adaptação da alínea c).

B) Considere o sistema definido pelas equações de estado não lineares

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

Para este sistema, a origem ($x_1 = 0,\ \ x_2 = 0$) é um ponto de equilíbrio. Relativamente a este ponto de equilíbrio, responda às seguintes perguntas:

B a) O que pode dizer sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio para o sistema não linear, com base na linearização? Mostre todos os cálculos.

B b) Tome como candidata a função de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

O que pode dizer sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio para o sistema não linear? Mostre todos os cálculos.

P3. O modelo que relaciona a velocidade v com a taxa de consumo de combustível u num veículo é dado pela equação diferencial escalar

$$\frac{dv}{dt} = -0{,}1v + u$$

a) Pretende-se, partindo do repouso (isto é, $v(0) = 0$), escolher a função u no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 10$ que maximiza o funcional de custo

$$J(u) = v(10) - 0{,}6\int_0^{10} u(t)dt, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Este funcional de custo traduz um compromisso entre atingir a máxima velocidade no final do intervalo de optimização e consumir pouco combustível.

b) Esboce o gráfico aproximado de v no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 10$.

P4. Considere de novo o sistema do problema P1.

a) Recorrendo à informação sobre a linearização em torno dos pontos de equilíbrio, aos sinais da derivada em pontos que considere importantes, e ao teorema de unicidade de solução, trace um esboço do retrato de fase (isto é das trajectórias de estado partindo de várias condições iniciais) do sistema. Justifique todos os raciocínios que fizer.

b) Diga qual a relação entre as trajectórias no plano de estado de um sistema descrito pelo modelo de estado

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{e de outro descrito por} \quad \frac{dx}{dt} = -f(x)$$

em que f é igual nos dois casos. (*Sugestão: Relacione os dois modelos por uma mudança de variável*).

c) Combine a informação das duas alíneas anteriores para determinar aproximadamente a bacia de atracção do ponto de equilíbrio assimptoticamente estável do sistema do problema P1. Represente a bacia de atracção pintando-a com um lápis de cor sobre o diagrama que obteve na alínea a) (*A bacia de atracção de um ponto de equilíbrio é o conjunto dos estados tais que, partindo deles, quando o tempo aumenta dão origem a trajectórias que tendem para esse ponto de equilíbrio*).

Ajudas úteis

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{e} = 0{,}37$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda,x,u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

"Sic transit Gloria mundi"

(Tradução livre do Latim: As informações de trânsito da SIC são as melhores do mundo)[1]

[1] Que ninguém diga que os alunos do IST não são expostos à Cultura Clássica!