Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2002/03

Segundo Exame

8 de Julho de 2003, 13 horas - salas C22, C9

Quotação: P1-5, P2-5, P3-3, P4-2, P5-2, P6-3.

P1. Dado o sistema linear de 2ª ordem com equação

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

considere as seguintes matrizes da dinâmica possíveis

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Com base nos valores próprios, vectores próprios e sinais das derivadas das variáveis de estado, esboce aproximadamente o retrato de fase (ou seja, o andamento das trajectórias no plano de estado) correspondente a cada uma das matrizes. **Não** deve basear a sua resposta no cálculo da solução do sistema.

b) Determine a exponencial de cada uma das matrizes A_1 e A_2.

c) Calcule a resposta $x(t)$ quando a matriz da dinâmica é a matriz A_3 do problema anterior, e a condição inicial é $x_1(0) = 0.5 \quad x_2(0) = -1$.

d) Diga justificando **com base na definição** se o sistema com matriz da dinâmica A_1 é estável no sentido de Lyapunov.

e) Indique uma condição incial não nula tal que o estado do sistema com matriz da dinâmica A_1 tenda para zero quando o tempo aumenta.

P2. Considere o sistema cujo diagrama de blocos se mostra na figura 2.

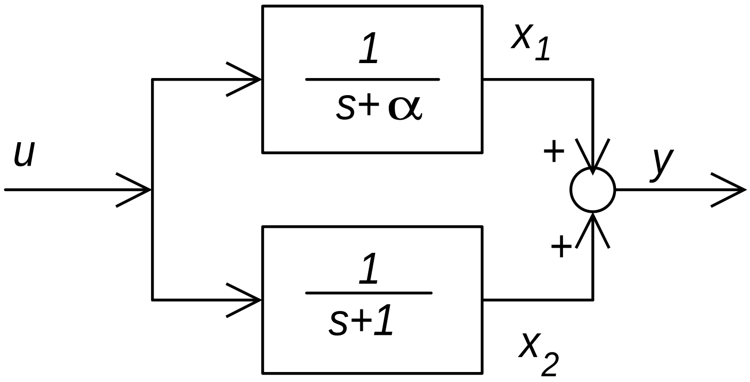

Fig. 1: Problema P2.

a) Obtenha uma representação de estado de 2ª ordem do sistema. Tome como variáveis de estado x_1 e x_2, indicadas na figura.

b) Diga para que valores do parâmetro α, tomando como variáveis de estado x_1 e x_2, é possível dimensionar os ganhos de uma realimentação linear de todas as variáveis de estado (RLVE) por forma a posicionar arbitrariamente os pólos do sistema em cadeia fechada. Não calcule explicitamente o polinómio característico da cadeia fechada.

c) Para $\alpha = 2$, dimensione os ganhos da RLVE por forma a que os pólos da cadeia fechada se situem em $-4 \pm j$. Suponha, nesta alínea, que tem acesso à medida directa de x_1 e x_2.

d) Suponha agora que não tem acesso à medida directa de x_1 e x_2. Diga para que valores de α é que o sistema é tal que satisfaz a condição de ser possível dimensionar um observador assimptótico do estado por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero tão depressa quanto se queira.

e) Para $\alpha = 2$ escreva as equações e projecte os ganhos de um observador por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero, com valores próprios em $-10 \pm j$ da equação de erro.

P3. Foi recentemente descoberta na Polinésia uma ilha habitada apenas por duas novas espécies de herbívoros, a que foram dados os lindos nomes de Necs e Plaks. Após aturados estudos de uma competende equipa de biólogos concluiu-se que estas duas espécies competem entre si pelo alimento disponível, podendo o número médio dos seus efectivos ser modelado pelo sistema de equações diferenciais não lineares:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = N(1 - N - P) \\ \dfrac{dP}{dt} = P\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}P - \dfrac{3}{4}N\right) \end{cases}$$

em que N é o número de Necs e P é o número de Plaks. Estes números são normalizados pelo que, para obter os valores das populações é necessário multiplicá-los por 1000.

a) Determine os pontos de equilíbrio possíveis para o sistema
b) Determine se é possível as duas espécies coexistirem a longo prazo.
c) Determine se é possível existirem apenas Plaks e não existirem Necs
d) Suponha que ambas as populações se extinguiam e que, em seguida, eram reintroduzidas pequenas quantidades de Necs e Placs. A SPAE (Sociedade Protectora dos Animais Extintos) argumenta que isso de nada servirá para restabelecer **pelo menos uma** das populações, dado que o pequeno número de indivíduos introduzido irá rapidamente extinguir-se de novo. Diga se a SPAE tem ou não razão. Justifique a sua resposta com base no modcelo.

P4. Considere o sistema da fig. 2 que representa um controlador de caudal com uma válvula não linear.

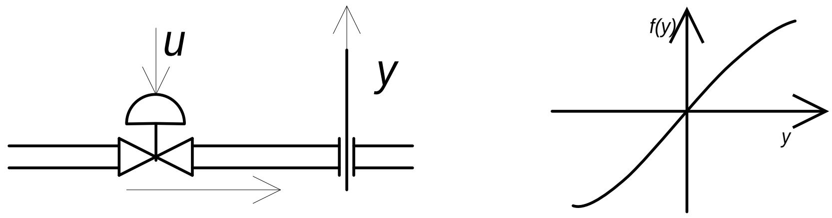

Fig. 2: Problema 4.

A válvula é descrita pelo modelo não linear de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dt} = u - \theta\, f(y)$$

em que a função não linear $f(.)$ é conhecida, estando representada na fig.3, e o parâmetro θ é desconhecido.

Pretende-se:

a) Determine uma retroacção estática da saída tal que, admitindo um conhecimento perfeito de θ , o sistema (válvula+realimentação) se comporte como um integrador.

b) Determine uma lei de controlo linear a aplicar ao integrador assim resultante, que leve a que, supondo conhecimento perfeito de θ , o erro de seguimento $e(t) = h(t) - r$ do sistema controlado tenda para zero com uma constante de tempo de 1 segundo.

c) Recorrendo ao Segundo Método de Lyapunov, obtenha uma lei de ajuste do parâmetro θ que garanta que o sistema global é estável.

d) Diga justificadamente se pode ou não garantir que o erro de seguimento $e(t) = h(t) - r$ tende para zero quando t tende para infinito.

P5. Recorrendo ao Teorema de Chang-Letov (resultado que dá os valores próprios óptimos do sistema em cadeia fechada que optimizam um custo quadrático de horizonte infinito), determine o controlo *u(t)* na forma de uma retroacção do estado $x(t)$ tal que o funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2(t) + u^2(t)dt$$

seja mínimo, sendo *x* o estado do seguinte sistema escalar

$$\frac{dx}{dt} = x + u(t)$$

P6. Considere o sistema não linear

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad x \notin R^n \tag{1}$$

em que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio isolado e f é um vector de funções contínuas com primeiras derivadas parciais contínuas numa bola centrada em torno da origem. Seja

$$f(x) = Ax + g(x)$$

em que a matriz A é dada por

$$A = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right]_{x=0}$$

e g verifica

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$$

Por outras palavras,

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2}$$

é a linearização de (1) em torno da origem.

Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov, mostre que se A tem todos os valores próprios com parte real negativa, então a origem ($x = 0$) é um ponto de equilíbrio assimptoticamente estável do sistema não linear (1).

Deve dar uma estimativa do raio de uma bola centrada em torno da origem, em que o sistema não linear é garantidamente estável de acordo com este método.

Informações úteis:

i) Desigualdade de Schwarz:

$$\left|x^T y\right| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad x,\, y \in R^n$$

ii) Sendo P uma matriz de elementos reais e $x \in R^n$, tem-se

$$\|Px\| \leq \sigma_{\max} \|x\|$$

em que $\sigma_{\max}$ é o máximo valor singular da matriz P. Os valores singulares de uma matriz de elementos reais $M[m \times n]$ são definidos como

$$\sigma_i(M) := \sqrt{\lambda_i(M^T M)}$$

em que $\lambda_i(L)$ designa o valor próprio número i da matriz (genérica) L.

iii) Recorde que, por definição de limite, se

$$\lim_{z \to 0} h(z) = a \qquad z \in R$$

então

$$\forall_{\delta > 0},\, \exists_{\varepsilon > 0} : |z| < \varepsilon \Rightarrow |h(z) - a| < \delta$$