Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2006/07

Segundo Exame

14 de Julho de 2007, 9 horas - salas E1, E2, E3, E4

Duração 3 horas

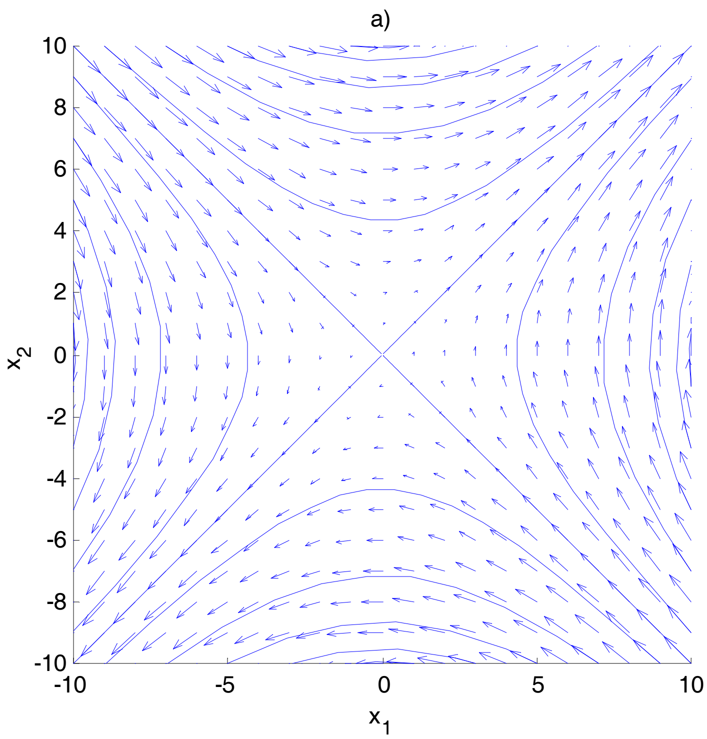
Não é permitida consulta nem calculadoras programáveis

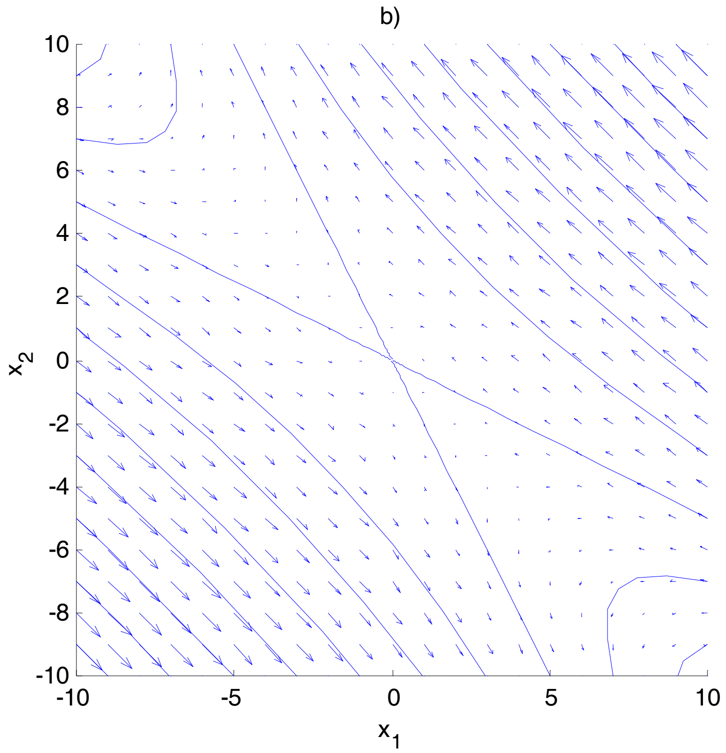
Quotação: P1-5, P2-5, P3-2, P4-3, P5-3, P6-2.

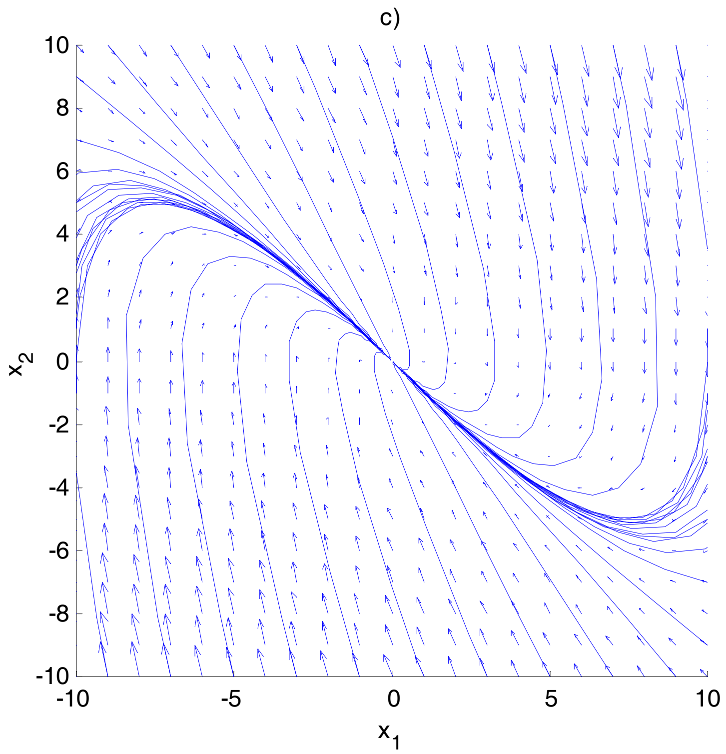
P1. P1. Considere as figuras seguintes, que correspondem a trajectórias no espaço de estado de 5 sistemas lineares de 2ª ordem, diferentes, com equação

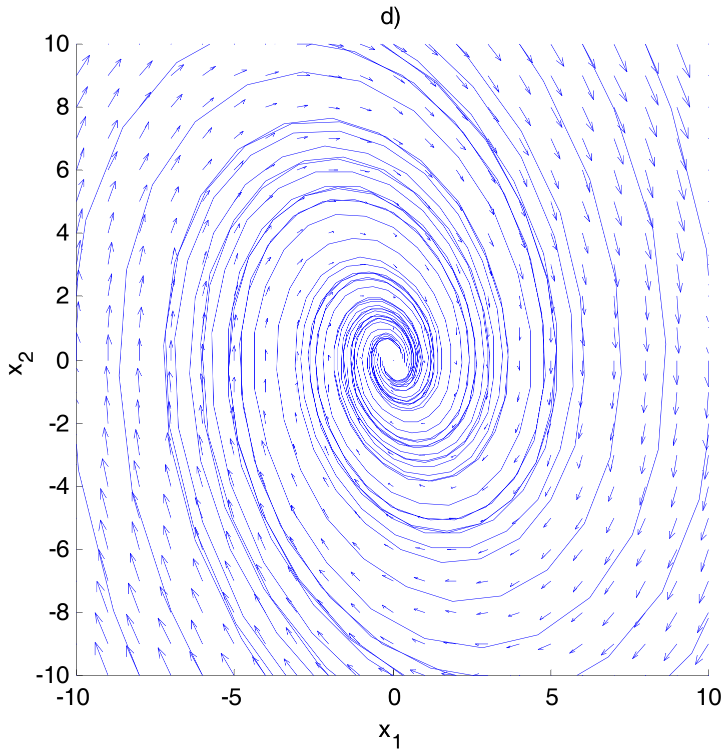
$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad \text{(P1-1)}$$

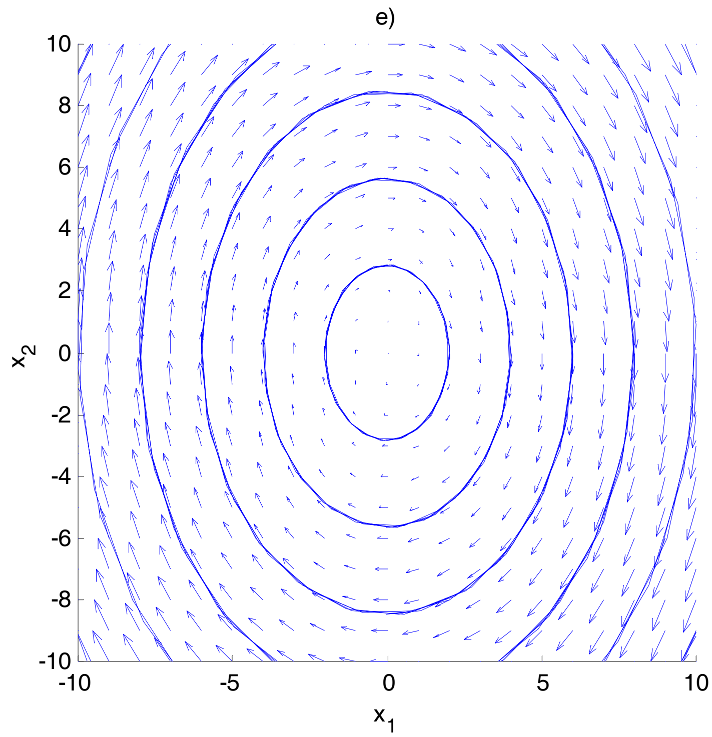
Estes retratos de fase estão identificados de *a)* a *e)* no topo de cada figura.




b)
x2
x1
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-5
5


c)
x2
x1
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-5
5


d)
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10
-5
0
5
10
x1
x2


e)
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10
-5
0
5
10
x1
x2

Considere ainda as seguintes matrizes da dinâmica

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.6 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -5/3 & -4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

a) Diga qual das matrizes correspondem a qual retrato de fase. Deve justificar a sua resposta com base nos valores próprios e vectores próprios (calcule os vectores próprios apenas quando necessário).

b) Calcule a resposta $x(t)$ quando a matriz da dinâmica é a matriz A_3 do problema anterior, e a condição inicial é $x_1(0) = 1 \quad x_2(0) = 3$. Dê a resposta com base na decomposição modal.

c) Indique uma condição incial não nula tal que o estado do sistema com matriz da dinâmica A_3 tenda para zero quando o tempo aumenta.

P2. Um permutador de calor permite transferir calor de um fluido (fonte de calor) para outro que se pretende aquecer. Consta normalmente de dois circuitos separados. Num dos circuitos circula o fluido a aquecer e noutro (que o envolve por forma a permitir a transferência de calor), o fluido que constitui a fonte de calor (por exemplo, vapor). Regulando o caudal de fluido quente, varia-se a quantidade de energia transmitida por unidade de tempo ao fluido a aquecer, o que permite regular a sua temperatura. A fig. P2-1 mostra uma visão esquemática de um permutador de calor.

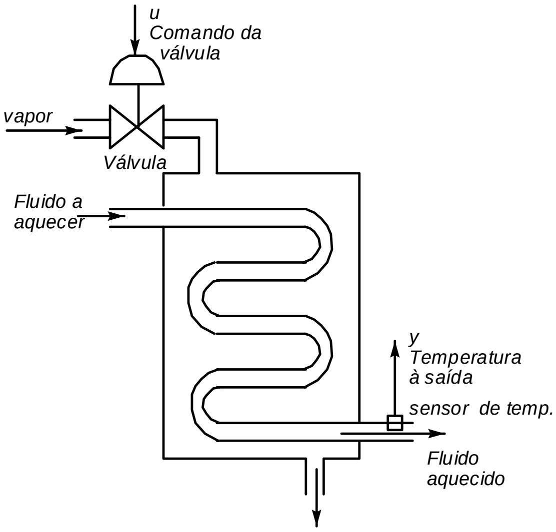


Fig. P4-1 Esquema de um permutador de calor.

Neste problema pretende-se projectar um controlador por realimentação de variáveis de estado para regular a temperatura de saída do fluído por actuação na válvula do vapor. Para tal, conhece-se o seguinte modelo de estado que relaciona incrementos no comando da válvula u em torno de um ponto de trabalho, com os incrementos y da temperatura do fluido à saída:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.017 & 0.017 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t) \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Responda às seguintes questões:

a) Projecte um regulador por realimentação de variáveis de estado que coloque os pólos da cadeia fechada em $-0.05 \pm j0.087$

b) Diga justificadamente se o modelo é controlável

c) Projecte um observador assimptótico que coloque os pólos do erro de estimação de estado em $-0.15 \pm j0.26$

d) Diga justificadamente se o modelo é observável

e) Desenhe um diagrama de blocos do sistema de controlo global.

P3. Considere o diagrama de blocos do servomecanismo realimentado que se mostra na fig. P4-1. Neste sistema de controlo de posição, o sinal de entrada u

de um motor de corrente contínua é aplicado por um actuador cuja característica é descrita por uma função não linear f aplicada ao erro de seguimento.

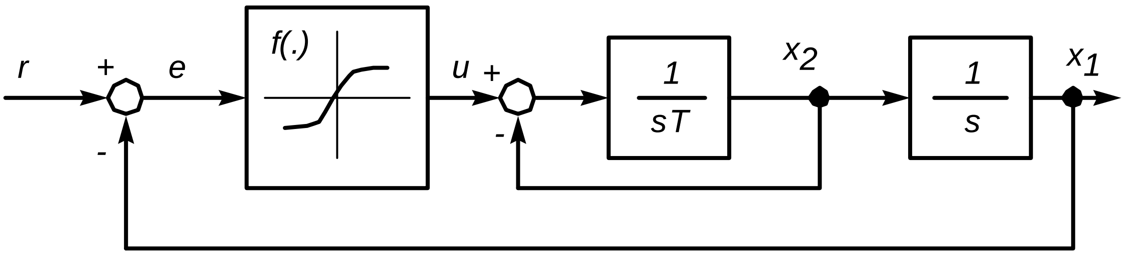


Fig. P3-1 Servomecanismo realimentado com um actuador não linear.

Sabe-se que esta função é tal que

$$f(e) > 0 \text{ para } e > 0; \quad f(e) = 0 \text{ para } e = 0; \quad f(e) < 0 \text{ para } e < 0$$

Isto significa que:

$$\int_0^e f(\sigma)\, d\sigma > 0 \qquad \text{para} \qquad e \neq 0$$

A referência r é constante no tempo.

As variáveis x_1 e x_2 são, respectivamente, a posição angular e a velocidade angular do veio do motor. O parâmetro $T > 0$ é a constante de tempo do motor.

Responda às seguintes perguntas:

a) Considere o estado definido pelo erro de seguimento e e pela velocidade angular x_2. Escreva as equações de estado (não-lineares) correspondentes. Estas equações dependem da função f.

b) Mostre que

$$V(e, x_2) = \frac{T}{2} x_2^2 + \int_0^e f(\sigma) d\sigma$$

é uma função de Lyapunov para a origem do sistema descrito na alínea a). Diga que conclusões pode tirar sobre a estabilidade para este ponto de equilíbrio.

c) Diga que conclusões pode tirar pela aplicação do Teorema do Conjunto Invariante para o mesmo problema.

P4. A fig. P4-1 mostra um sistema realimentado em que existe um elemento não linear tipo "tudo ou nada com histerése". Neste diagrama, o parâmetro k representa uma constante estritamente positiva.

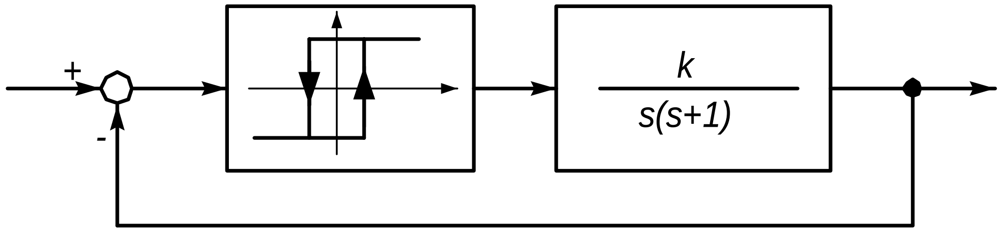


Fig. P4-1 Sistema não linear realimentado.

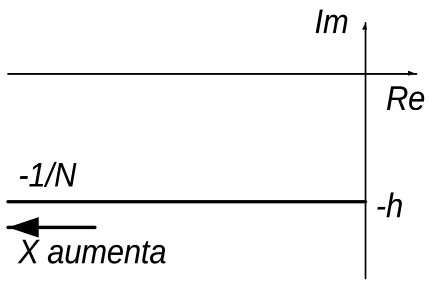


Fig. P4-2 Simétrico do inverso da função descritiva do elemento não linear.

A fig. P4-2 representa o simétrico do inverso da função descritiva $N(X)$ do elemento não linear. Como se pode ver, o lugar geométrico de $-1/N(X)$ é uma semi-recta paralela ao eixo real negativo, com parte imaginária constante e igual ao nível de histerése h do elemento não linear. Quando a amplitude X das oscilações à saída do sistema global (entrada da não linearidade) aumenta, o ponto correspondente de $-1/N(X)$ desloca-se para a esquerda, no sentido indicado pela seta. Responda às seguintes perguntas:

a) Mostre que ocorrem oscilações no sistema representado na fig. P4-1. Complete a sua justificação com um diagrama apropriado.

b) Obtenha uma equação algébrica polinomial cuja solução seja a frequência das oscilações. Não resolva a equação.

c) Diga o que acontece à amplitude das oscilações quando se considera um valor maior do parâmetro k.

P5. Ao publicar o romance *Madame de Bovary* em 1857, o seu autor Gustave Flaubert (fig. P5.1), um dos expoentes do então nascente Realismo que inspirou

Eça de Queiróz, provocou uma grande controvérsia, tendo sido mesmo acusado de atentado contra a moral e os bons costumes (do que veio a ser absolvido).

Fig. P5-1 Retrato do escritor francês Gustave Flaubert (1821-1880).

Neste romance descreve-se (não é esta a história central do romance) um coveiro que plantava batatas na zona do cemitério não ocupada por sepulturas. O coveiro tinha assim um rendimento duplo: Das sepulturas que abria (pelas quais recebia um pagamento, mas que iam reduzindo o espaço disponível para a cultura de batatas), e das batatas que plantava no espaço remanescente. Para quem lê *Madame de Bovary*, põe-se o problema de saber qual deveria ser a estratégia do coveiro para aceitar ou recusar funerais, por forma a maximizar os proventos totais obtidos durante o período de tempo em que exerceu as suas funções (esta questão não é tratada no livro de Flaubert, o que não admira dado que o Princípio de Pontryagin só foi descoberto mais de 100 anos depois). Para resolver esta questão considere a seguinte formulação matemática (esta parte não está no romance):

Seja A a área total do cemitério. Desta área, uma área x é ocupada por sepulturas, sendo a área remanescente, $A-x$, ocupada pela plantação de batatas. Por forma a poder usar um modelo na forma de uma equação diferencial, admitimos que x é uma variável real que pode tomar qualquer valor entre 0 e A, e que o ritmo u com que o coveiro abre as sepulturas pode também tomar qualquer valor entre 0 e $\bar{u}$. Tem-se assim que

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad (5\text{-}1)$$

No instante em que o coveiro inicia a sua actividade, o cemitério não tem sepulturas, pelo que se tem a condição inicial:

$$x(0) = 0 \qquad (5\text{-}2)$$

O coveiro desenvolve a sua actividade durante um intervalo de tempo de T anos (fixo à partida). Admite-se que ao fim deste tempo o cemitério não está esgotado (isto é, que há ainda espaço para mais sepulturas). O problema consiste em saber como é que deve ser o ritmo de actividade do coveiro u por forma a maximizar

$$J = \int_0^T \left(A - x(t) + \rho\, u(t)\right) dt \qquad (5\text{-}3)$$

em que $\rho > 0$ é um parâmetro fixo, satisfazendo a restrição

$$0 \le u \le \bar{u}$$

Responda às seguintes questões:

a) Dê uma interpretação do funcional de lucro J dado por (5-3).

b) Determine a função $u(t)$ no intervalo de tempo $t \in [0, T]$, que maximiza J dado por (5-3).

c) Represente graficamente as funções $u(t)$ e $x(t)$ no intervalo de tempo $t \in [0, T]$ quando é utilizado o controlo óptimo.

d) Calcule o correspondente valor óptimo de J.

Ajudas úteis: As informações seguintes são úteis para resolver este problema.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x)\big|_{x=x(T)}$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

P6. Seja $\Phi(t) = e^{At}$ a matriz de transição associada à matriz da dinâmica, A, do sistema linear e invariante no tempo

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t)$$

a) Mostre que, em aproximação de 1ª ordem em ε,

$$\det[I + \varepsilon A] = 1 + \varepsilon \; tr(A)$$

em que $tr(A)$ representa o "traço da matriz A" (soma dos elementos da diagonal). Pode fazer esta demonstração apenas para sistemas de 2ª ordem, em que a matriz A é 2×2.

b) Utilize este resultado para mostrar que

$$\frac{d}{dt} \det \Phi(t) = \left(tr(A)\right) \det \Phi(t)$$

em que $tr(A)$ representa o "traço da matriz A" (soma dos elementos da diagonal).

c) Qual a importância deste resultado, relativamente às propriedades da matriz exponencial?