**Mestrado Integrado em**

**Engenharia Electrotécnica e de Computadores**

# Controlo Em Espaço de Estados

**2017/2018**

**25/Maio/2018, 20h00 – 22h00, Ea1, Ea2, E1, E2, E3, E4**

# Segundo Teste

**Duração 2 horas**

**Não é permitida consulta nem uso de funcionalidades programáveis**

**Quotação:** P1 a)1 b)4 c)2 P2 A) a) 1 b)1 c)2 d)1 B)2 P3-5 P4-3

**P1.** Em certas condições, um laser de CO2 de fase gasosa pode ser descrito pelo modelo de estado não linear

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2,$$

$$\dot{x}_2 = 1 - \alpha x_2 - (1 + \beta x_2) x_1.$$

Nestas equações, $\alpha$ e $\beta$ são parâmetros positivos que verificam

$$\alpha + \beta < 2,$$

$x_1$ é a intensidade normalizada do feixe de luz e $x_2$ é proporcional à diferença entre o número de atomos excitados e não excitados do gás. Responda às seguintes perguntas:

a) Mostre que $(0, {}^{1}/_{\alpha})$ é um ponto de equilíbrio do sistema.

b) Determine a dinâmica do sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio referido em a) e os respectivos valores próprios. O que pode dizer sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema não linear?

c) Determine qual o outro ponto de equilíbrio. O que pode dizer sobre a estabilidade destre ponto com base no modelo linearizado?

**P2.** Neste problema tem duas alternativas, designadas A e B. A alternativa A é mais complicada mas tem um valor mais elevado (5 valores). A alternativa B vale apenas 2 valores. **Deverá indicar de modo inequívoco qual a alternativa**

**que escolhe. Se responder a ambas, apenas será considerada a resposta a A**, não sendo a outra resposta classificada.

**A)** Considere o sistema da fig. P2-1 que representa um controlador de caudal com uma válvula não linear, em que $y$ é a medida de caudal que atravessa a válvula (saída do sistema) e $u$ é o comando do posicionador da válvula (variável manipulada).

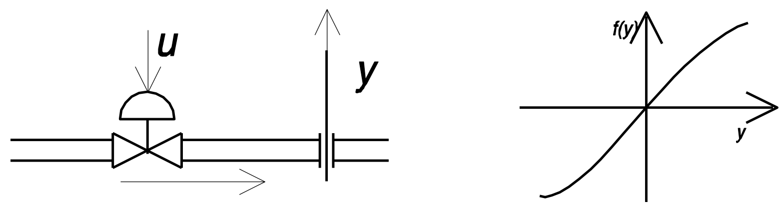



Fig. P2-1: Problema 2 A). Válvula não linear de controlo de caudal.

A válvula é descrita pelo modelo não linear de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dt} = u - \theta \; f(y)$$

em que a função não linear $f(.)$ é conhecida, estando representada na fig. P2-1 (à direita), e o parâmetro $\theta$ é desconhecido.

Pretende-se:

a) Determine uma retroacção estática da saída tal que, admitindo um conhecimento perfeito de $\theta$, o sistema (válvula+realimentação) se comporte como um integrador.

b) Determine uma lei de controlo linear a aplicar ao integrador assim resultante, que leve a que, supondo conhecimento perfeito de $\theta$, o erro de seguimento $e(t) = r - y(t)$ do sistema controlado tenda para zero com uma constante de tempo de 1 segundo. Admite-se que a referência $r$ é constante.

c) Recorrendo ao Segundo Método de Lyapunov, obtenha uma lei de ajuste do parâmetro $\theta$ que garanta que o sistema global é estável.

d) Com base no teorema do conjunto invariante, diga justificadamente se pode ou não garantir que o erro de seguimento $e(t)$ tende para zero quando $t$ tende para infinito.

**B)** Considere o sistema definido pelas equações de estado não lineares

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_1 x_2^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - x_1^2 x_2$$

Para este sistema, a origem $(x_1 = 0,\ \ x_2 = 0)$ é um ponto de equilíbrio. Relativamente a este ponto de equilíbrio, tome como candidata a função de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Pergunta: O que pode dizer sobre a estabilidade deste ponto de equilíbrio para o sistema não linear? Mostre todos os cálculos e justifique a sua resposta.

**P3.** Neste problema tem duas alternativas, designadas A e B. A alternativa A é mais complicada mas tem um valor mais elevado (5 valores). A alternativa B vale apenas 3 valores. **Deverá indicar de modo inequívoco qual a alternativa que escolhe. Se responder a ambas, apenas será considerada a resposta a A**, não sendo a outra resposta classificada.

**A)** Considere o sistema escalar descrito pela equação de estado

$$\dot{x} = x + u,$$

em que $x$ é o estado (escalar) e $u$ é a variável manipulada (escalar). Por aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin, obtenha uma lei de controlo por realimentação do estado por forma a minimizar

$$J = \int_0^\infty \left(x^2(t) + u^2(t)\right) dt$$

Assuma que, em cada instante de tempo $t$, o estado $x(t)$ e o co-estado $\lambda(t)$ estão relacionados por

$$\lambda(t) = -p\, x(t)$$

em que $p$ é uma constante que deve determinar.

**B)** Considere o sistema escalar descrito pela equação de estado

$$\dot{x} = x - 0{,}2u,$$

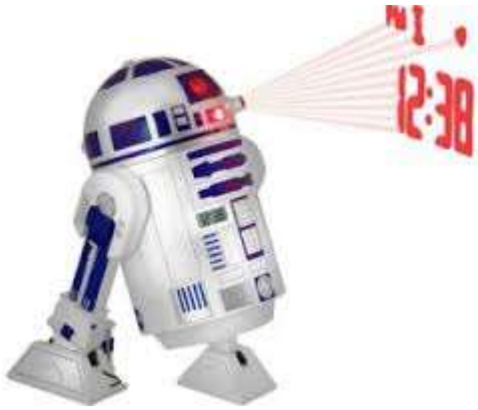
em que $x$ é o estado (escalar) e $u$ é a variável manipulada (escalar). Por aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin, obtenha uma lei de controlo por forma a minimizar

$$J(u) = x(5) + \int_0^5 u(t)dt,$$

em que, para cada instante $t$, a variável de controlo está sujeita à restrição

$$0 \leq u(t) \leq 1.$$

**P4. Deslocamento óptimo de um robot móvel**




Prestável, altruísta e determinado, o R2D2 é sem dúvida um dos robots mais simpáticos e populares alguma vez construídos. Merece pois deslocar-se de um modo óptimo, e por isso este problema é-lhe dedicado.

Para simplificar as coisas, vamos supor que o movimento do robot numa dimensão pode ser modelado como um duplo integrador em que as variáveis de estado $x_1$ e $x_2$ são a posição e a velocidade num dado sistema de coordenadas. As equações de estado são

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

Determine o controlo óptimo que permite transferir o estado no instante 0, dado por

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

para o estado no instante 2 dado por

$$x(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

minimizando a energia gasta na manobra, dada pelo funcional de custo

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt.$$

# Ajudas úteis

$$\dot{x} = -ax + b \quad a, b \text{ constantes}$$

$$x(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Transformadas de Laplace

$$1 \rightarrow \frac{1}{s}, \quad e^{-at} \rightarrow \frac{1}{s+a}, \quad 1 - e^{-at} \rightarrow \frac{a}{s(s+a)}$$