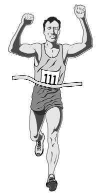
Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2001/02

Segundo Exame

16 de Julho de 2002, 17 horas - sala V108



Quotação: P1-3, P2-5, P3-3, P4-2, P5-2, P6-3.

P1. Considere o modelo de estado homogéneo (sem entrada), dado por

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1$$

Calcule a matriz de transição e^{At} em que A é a matriz da dinâmica do sistema. Utilize o método de diagonalização.

P2. Considere o sistema cujo diagrama de blocos se mostra na figura 1.

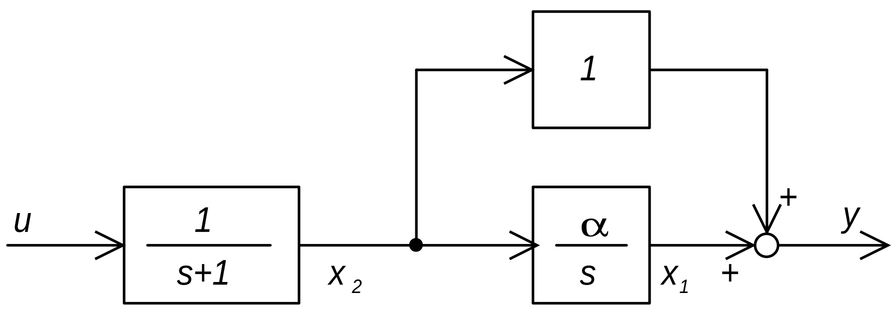


Fig. 2-1: Problema P2.

a) Obtenha uma representação de estado de 2ª ordem do sistema. Tome como variáveis de estado x_1 e x_2, indicadas na figura 2-1.

b) Diga para que valores do parâmetro α, tomando como variáveis de estado x_1 e x_2, é possível dimensionar os ganhos de uma realimentação linear de todas as variáveis de estado (RLVE) por forma a posicionar arbitrariamente os pólos do sistema em cadeia fechada. Não calcule explicitamente o polinómio característico da cadeia fechada.

c) Para $\alpha = 2$, dimensione os ganhos da RLVE por forma a que os pólos da cadeia fechada se situem em $-4 \pm j$. Suponha, nesta alínea, que tem acesso à medida directa de x_1 e x_2.

d) Suponha agora que não tem acesso à medida directa de x_1 e x_2. Diga para que valores de α é que o sistema é tal que satisfaz a condição de ser possível dimensionar um observador assimptótico do estado por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero tão depressa quanto se queira.

e) Para $\alpha = 2$ escreva as equações e projecte os ganhos de um observador por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero, com valores próprios em $-10 \pm j$ da equação de erro.

P3. Recorrendo ao 2º método de Lyapunov, com uma função de Lyapunov tentativa da forma

$$V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$$

mostre que a origem de cada um dos seguintes sistemas não lineares é do tipo indicado, relativamente à estabilidade:

a) Assimptoticamente estável

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

b)Instável

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2^2 + 4x_1^2 x_2 + 2x_2^3 \end{cases}$$

P4. Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov, determine a estabilidade em torno do ponto de equilíbrio do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + 2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 - 1 \end{cases}$$

Deve utilizar a equação de Lyapunov para obter uma função de Lyapunov.

P5. Considere um míssil *M* que pretende atingir um alvo *A* (ver figura 5-1).

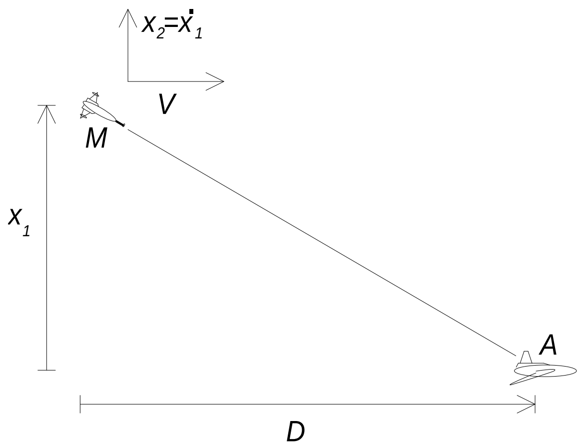


Fig.5-1 – Problema P5.

O alvo desloca-se em linha recta, para a direita. A velocidade do míssil *M* relativamente ao alvo *A* é V, constante, segundo a horizontal e x_2 segundo a vertical. No instante $t = 0$ a distância, medida segundo a horizontal entre o míssil *M* e o alvo *A* é D. O tempo que o míssil demora a atingir o alvo *A* é

$$T = \frac{D}{V}$$

A distância do míssil ao alvo segundo a vertical é x_1.

Admite-se que a dinâmica vertical do míssil é descrita por

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = u$$

em que u é a variável manipulada, dada pela componente vertical da aceleração do míssil. Admite-se que não há restrições em u.

Determine a aceleração u do míssil no intervalo de tempo $[0, T]$ por forma a minimizar o funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}x_1^2(T) + \frac{1}{2}\int_0^T u^2(\tau)d\tau$$

Neste funcional de custo, o primeiro termo pesa o erro vertical quando a distância horizontal se anula e o segundo termo pesa a energia gasta na manobra. Exprima o controlo óptimo u como função do tempo t, do tempo gasto na manobra T e das condições iniciais do estado $x_1(0)$ e $x_2(0)$.

Ajuda:

$$\frac{dx}{dt} = f(u(t))$$

$$J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t))$$

$$\lambda'(T) = \Psi_x(x)\Big|_{x=x(T)}$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

P6. Seja $\Phi(t) = e^{At}$ a matriz de trnsição associada à matriz da dinâmica, A, do SLIT

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t)$$

a) Mostre que, em aproximação de 1ª ordem em ε,

$$\det[I + \varepsilon A] = 1 + \varepsilon\ tr(A)$$

em que $tr(A)$ representa o “traço da matriz A” (soma dos elementos da diagonal).

b) Utilize este resultado para mostrar que

$$\frac{d}{dt}\det\Phi(t)=\left(tr\left(A\right)\right)\det\Phi(t)$$

c) Qual a importância deste resultado, relativamente às propriedades da matriz de transição?