TÉCNICO LISBOA

Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2016/2017

Exame

23 de Junho de 2017, 11h30 horas – sala Ea2

Duração 3 horas

Não é permitida consulta nem uso de calculadoras programáveis

Quotação: P1a)2b)1c)2d)1 P2 a)1b)1c)1d)1e)1 P3 a)1b)1c)1 P4-3 P5-3

P1. Considere o sistema com entrada u e saída y, com função de transferência

$$G(s) = \frac{s+5}{s^2+3s+2}$$

a) Obtenha uma realização de estado do sistema usando variáveis de fase.

b) Calcule os valores próprios e os vectores próprios correspondentes do modelo de estado que obteve.

c) Usando a decomposição modal, escreva a solução $x(t)$ da equação de estado quando a condição inicial do estado é $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

d) Usando apenas blocos básicos **escalares** (integradores, somadores e ganhos), desenhe um diagrama de blocos que permita simular o modelo de estado.

P2. Considere o sistema cujo diagrama de blocos se mostra na figura P2-1.

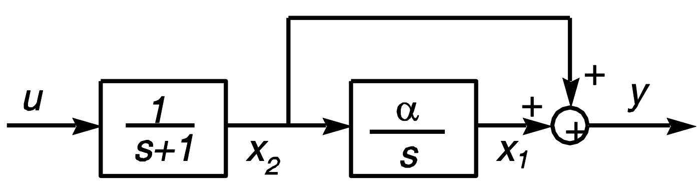


Fig. P2-1. Modelo de um sistema a controlar.

a) Obtenha uma representação de estado de 2ª ordem do sistema. Tome como variáveis de estado x_1 e x_2, indicadas na figura.

b) Diga para que valores do parâmetro α, tomando como variáveis de estado x_1 e x_2, é possível dimensionar os ganhos de uma realimentação linear de todas as variáveis de estado (RLVE) por forma a posicionar arbitrariamente os pólos do sistema em cadeia fechada. Não calcule explicitamente o polinómio característico da cadeia fechada.

c) Para $\alpha = 2$, dimensione os ganhos da RLVE por forma a que os pólos da cadeia fechada se situem em $-4 \pm j$. Suponha, nesta alínea, que tem acesso à medida directa de x_1 e x_2.

d) Suponha agora que não tem acesso à medida directa de x_1 e x_2. Diga para que valores de α é que o sistema é tal que satisfaz a condição de ser possível dimensionar um observador assimptótico do estado por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero tão depressa quanto se queira.

e) Para $\alpha = 2$ escreva as equações e projecte os ganhos de um observador por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero, com valores próprios em $-10 \pm j$ da equação de erro.

P3. Um pêndulo com comprimento 1m e massa 1kg pode ser descrito pelo modelo de estado não linear

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -10\sin(x_1) - \beta\, x_2 \end{cases}$$

em que x_1 é o ângulo de desvio da vertical, x_2 é a velocidade angular e β o coeficiente de atrito.

a) Obtenha a matriz da dinâmica do sistema linearizado em torno da origem.

b) Escreva a equação algébrica satisfeita pelos os valores próprios da matriz da dinâmica do sistema linearizado em torno da origem, em função do parâmetro β

c) Com base no modelo linearizado, o que pode dizer sobre a estabilidade da origem **do sistema não linear** nos dois casos seguintes: $\beta = 0$ e $\beta = 8$? Justifique.

P4. Considere um veículo que se move numa única direcção, ao longo de uma recta graduada, tal como se mostra na figura P4-1.

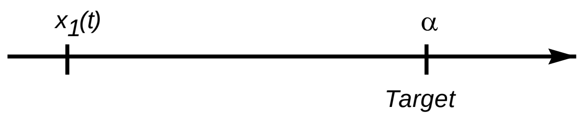


Figura P4-1. Veículo que se desloca ao longo de uma recta.

No instante t o veículo está na posição $x_1(t)$, tem uma velocidade $x_2(t)$.e é actuado por uma força (variável de entrada manipulada) $u(t)$. Estas variáveis estão relacionadas perlo modelo de estado do veículo dado pelas equações

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

Pretende-se calcular uma lei de controlo que leve o veículo à posição com a coordenada α, e velocidade nula, para o que se considera a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(K_1(x_1 - \alpha)^2 + x_2^2)$$

Com base nesta função, no Método Directo de Lyyapunov e no Teorema do Conjunto Invariante, obtenha uma lei de controlo de realimentação que garanta que $x_1(t) \to \alpha$ e que $x_2(t) \to 0$. Justifique.

P5. Há cerca de meio século, em 20 de Julho de 1969, teve lugar o culminar dos esforços de uma das mais prodigiosas aventuras da Humanidade, que consistiu na descida da superfície lunar de um veículo tripulado. Numa conversa telefónica feita a partir da superfície da Lua com o então Presidente dos USA, a que pude assistir pela televisão e que recordo ainda hoje como algo inspirador, o astronauta Neil Armstrong disse: *It’s a great honor and privilege for us to be here, representing not only the United States, but men of peace of all nations, and with interest and curiosity, and men with vision for the future*. A figura mostra uma fotografia feita pelo astronauta Michael Collins a partir da janela do módulo de comando da nave Apollo 11 ao LEM (Lunar Excursion Module) quando este, levando no seu interior os astronautas Neil Armstrong e Edwin Aldrin, iniciava a descida para a superfície da Lua. Este problema evoca esse grande momento através do cálculo da trajectória óptima de descida para alunagem. Por forma a tornar o problema solúvel com “papel e lápis”, são feitas as seguintes hipótese simplificativas:

H1: As únicas forças que agem sobre o veículo são o seu próprio peso, e o impulso de um jacto que o contraria.

H2: A lua é plana na vizinhança no ponto de alunagem, e a gravidade lunar é constante.

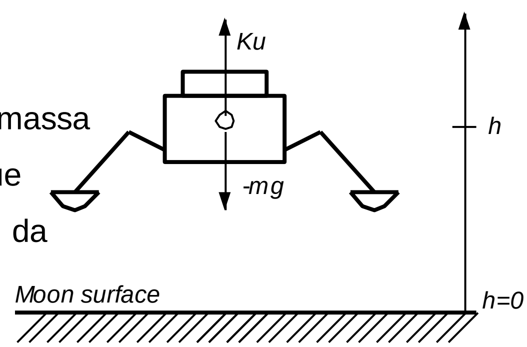
H3: Despreza-se a perda de massa devida ao combustível usado para o jacto, pelo que se considera a massa total constante.

H4: Assume-se que o movimento se faz apenas na vertical.

De acordo com estas hipóteses, e de acordo com a lei de Newton, o movimento do veículo é modelado pela equação diferencial (ver figura)

$$m\frac{d^2}{dt^2}h = Ku - mg,$$

em que h é a altitude (função do tempo t), m a massa do veículo (constante), K uma constante que mede o efeito do jacto, e g a aceleração da gravidade lunar.



a) Tomando como variáveis de estado $x_1 = h$ e $x_2 = \dot{h}$, e usando um valor de $\frac{K}{m} = 1$, escreva as equações de estado do veículo em função de g.

b) Utilizando o Princípio de Pontryagin, determine a função $u(t), 0 \leq t \leq T$, com $T = 10$ que minimiza

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$$

sujeita às restrições

$h(0) = \alpha,\ \dot{h}(0) = \beta$ (posição e velocidade iniciais)

$h(T) = 0,\ \dot{h}(T) = 0$ (o veículo chega à superfície lunar com velocidade nula)

Use os seguintes valores para os parâmetros

$\frac{K}{m} = 1,\ \alpha = 5000,\ \beta = gT = 16.$

Ajuda:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t)\, f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$