P1. a) $x_2(x_1+1)=0$

$x_1(1+x_2^3)=0$

b) $x_1=0\,,\; x_2=0$ A

$x_1=-1\,,\; x_2=-1$ B

c) $$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix} x_2 & x_1+1 \\ 1+x_2^3 & 3x_1x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

A: $\Delta\dot{x}_1=\Delta x_2$

$\Delta\dot{x}_2=\Delta x_1$

B: $\Delta\dot{x}_1=-\Delta x_1$

$\Delta\dot{x}_2=-3\Delta x_2$

d) A: $\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1$ $\lambda_1=+1$ $\lambda_2=-1$

Instável (ponto de sela)

B: $\lambda_1=-1$ $\lambda_2=-3$

Estável (foco)

P2.A)

a) $w = -\hat{\varepsilon}\alpha v^2 + \beta u^2$

$$u = \sqrt{\frac{w + \hat{\varepsilon}\alpha v^2}{\beta}}$$

Com esta mudança de variável o modelo escreve-se

$$\dot{v} = w - \tilde{\varepsilon}\alpha v^2$$

b) $e = r - v \rightarrow \dot{e} = -\dot{v}$

$$\dot{e} = -w + \tilde{\varepsilon}\alpha v^2$$

Supondo $\tilde{\varepsilon} = 0$, $\dot{e} = -w$

Neste caso, um controlador estabilizante é $w = Ke$, $K > 0$ (*)

$$\dot{e} = -Ke + \tilde{\varepsilon}\alpha v^2$$

c) $\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\varepsilon}\dot{\tilde{\varepsilon}}$

$$\dot{V} = -Ke^2 + \left(\frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{\varepsilon}} + \alpha v^2 e\right)\tilde{\varepsilon}$$

Escolhe-se

$$\dot{\tilde{\varepsilon}} = -\gamma\alpha v^2 e \qquad (**)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \hat{\varepsilon} \longrightarrow \dot{\tilde{\varepsilon}} = -\dot{\hat{\varepsilon}}$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}} = \gamma\alpha v^2 e$$

$$\hat{\varepsilon}(t) = \hat{\varepsilon}(0) + \gamma\alpha\int_0^t v^2(\tau)\,d\tau$$

Com esta lei de ajuste de $\tilde{\mathcal{E}}$, é 3/

$$\dot{V} = -Ke^2 \leq 0 \qquad (***)$$

d) Todas as trajectórias de (*), (**) tendem para o maior conjunto invariante contido no conjunto em que $\dot{V}=0$. Por outro lado, por (***) este conjunto é caracterizado por $\{(e, \tilde{\mathcal{E}});\ e=0\}$.

Para além disso, dado que para $e=0$, $\tilde{\mathcal{E}}=0$, por (*) e (**) é $\dot{e}=0$ e $\dot{\tilde{\mathcal{E}}}=0$ pelo menos a origem é um ponto do conjunto invariante, ou seja, o conjunto invariante não é vazio.

P2 B)

a)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - x_2^2 & 1-2x_1x_2 \\ -1-2x_1x_2 & -x_1^2-3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm j$$

Conclusão: Como os valores próprios

são imaginários puros não podemos dizer nada sobre a estabilidade do sistema não linear.

b) $\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 =$

$= \cancel{x_1 x_2} - x_1^2 (x_1^2 + x_2^2) - \cancel{x_1 x_2} - x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)$

$= -(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0$ para $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Isto garante que a origem do sistema não linear é assimptoticamente estável.

P3) a) $f = -0{,}1x + u \qquad f_x = -0{,}1$

$L = -0{,}6u \qquad L_x = 0$

$\psi = x(10) \qquad \psi_x \big|_{x = x(T)} = 1$

$\dot{\lambda} = 0{,}1\lambda \qquad \lambda(10) = 1$

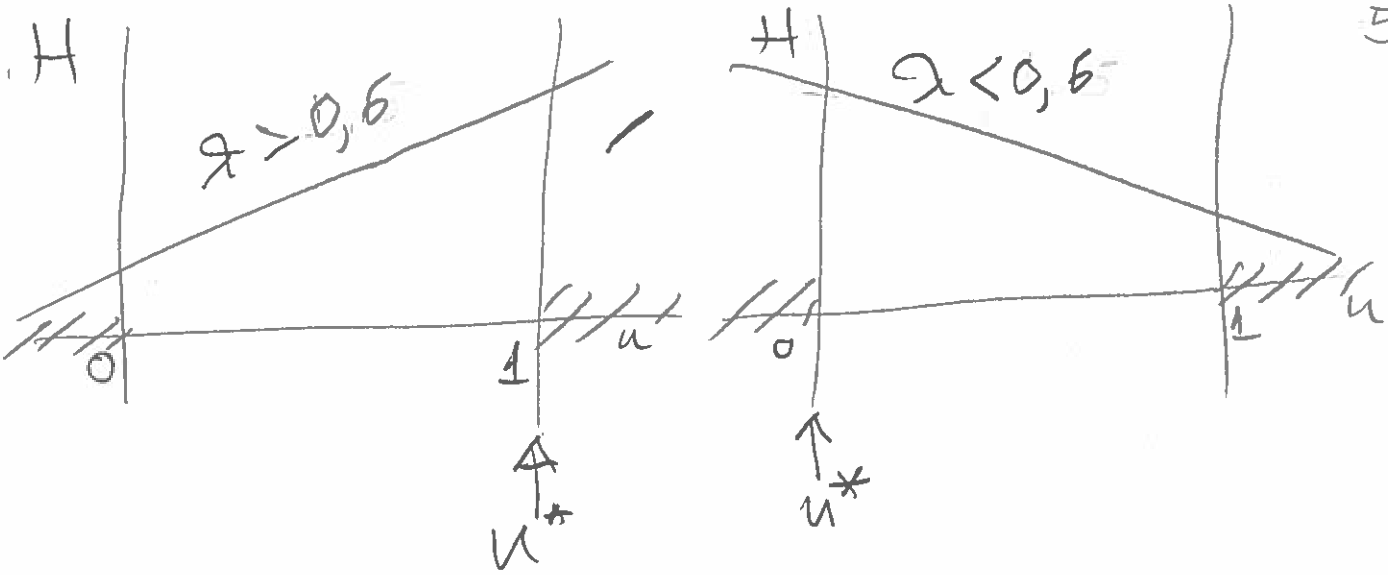
$\lambda(t) = c\, e^{0{,}1t}$

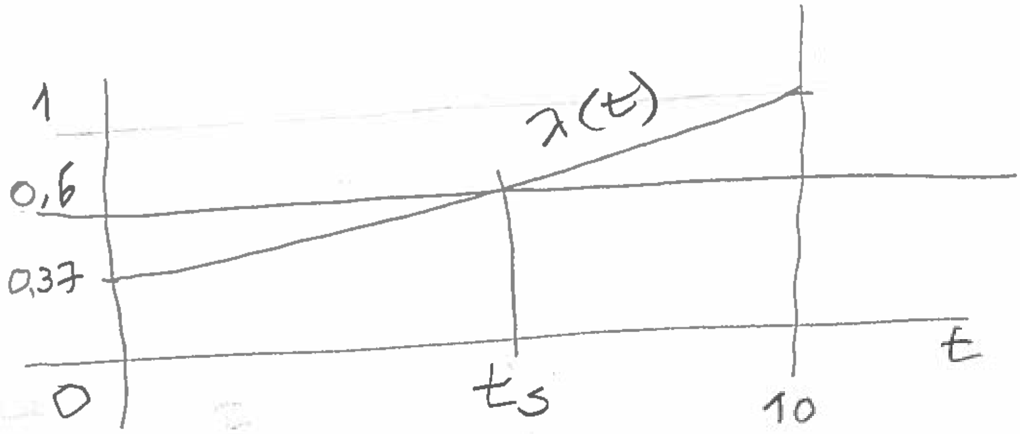
$\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\lambda(10)} = c\, e \implies c = \frac{1}{e} = 0{,}37$

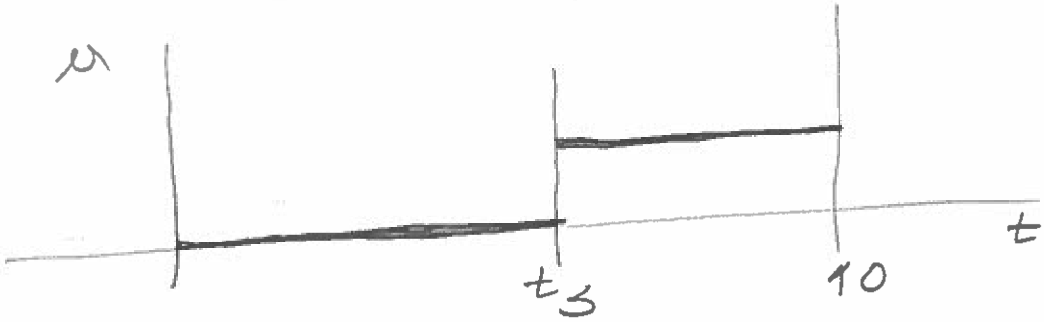
$\lambda(t) = 0{,}37\, e^{0{,}1t}$

$H = \lambda(-0{,}1x + u) - 1{,}5u$

$H = -0{,}1\lambda x + (\lambda - 0{,}6)u$



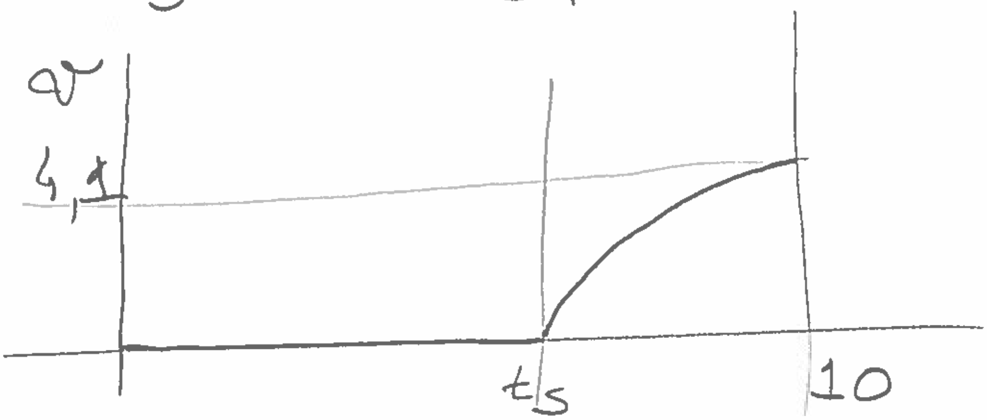




$$0{,}37\, e^{0{,}1 t_s} = 0{,}6$$

$$0{,}1\, t_s = \ln \frac{60}{37}$$

$$t_s = 10 \ln \frac{60}{37} = 10 \ln 1{,}62 = 4{,}8$$



$$\dot{v} = -0{,}1\, v + u$$

$$\bar{v} = 10\,\bar{u} \qquad \bar{u} = 1 \Rightarrow \bar{v} = 10$$

$$v(t) = 10 + c\, e^{-0{,}1 t}$$

$$v(0) = 10 + c = 0 \Rightarrow c = -10$$

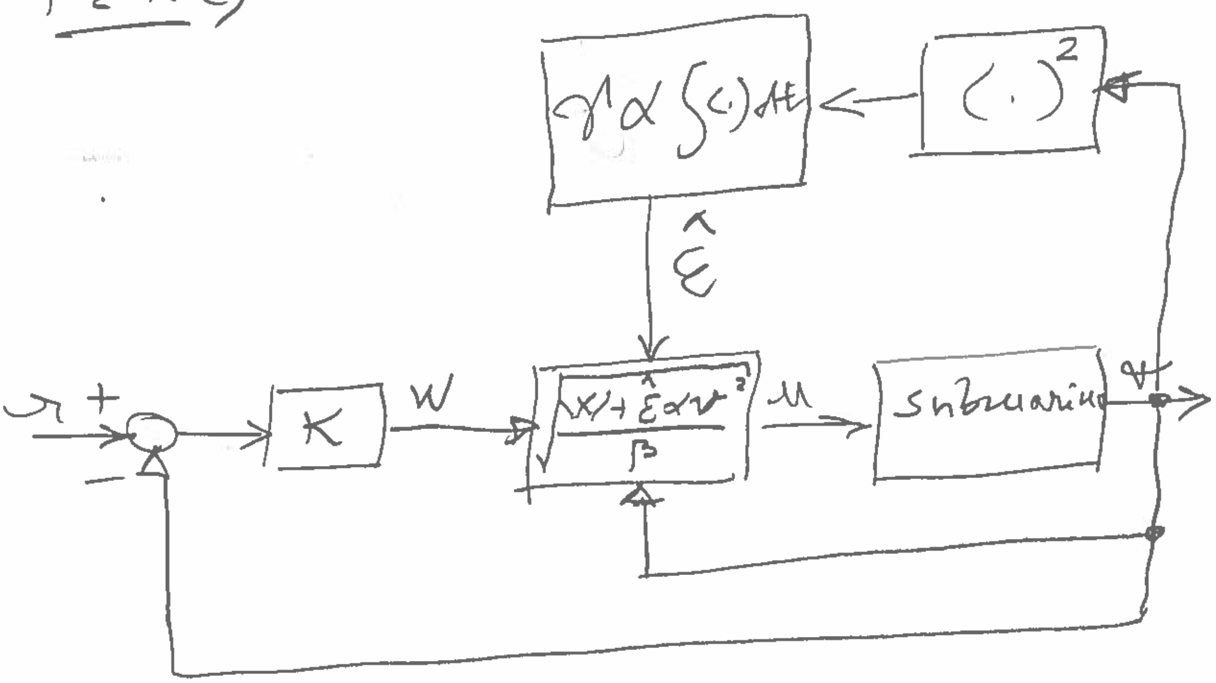
No intervalo $[t_s, 10]$ é

$$v(t) = 10\left(1 - e^{-0{,}1(t - t_s)}\right)$$

$$v(10) = 10\left(1 - e^{-0{,}1(10 - 4{,}8)}\right)$$

$$= 10\left(1 - e^{-0{,}52}\right) = 4{,}1$$

P2 A-e)



P4 a) Vectores próprios associados a A)

$$\lambda_i v_1^i - v_2^i = 0$$

$$v_1^i = t \qquad v_2^i = \lambda_i$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

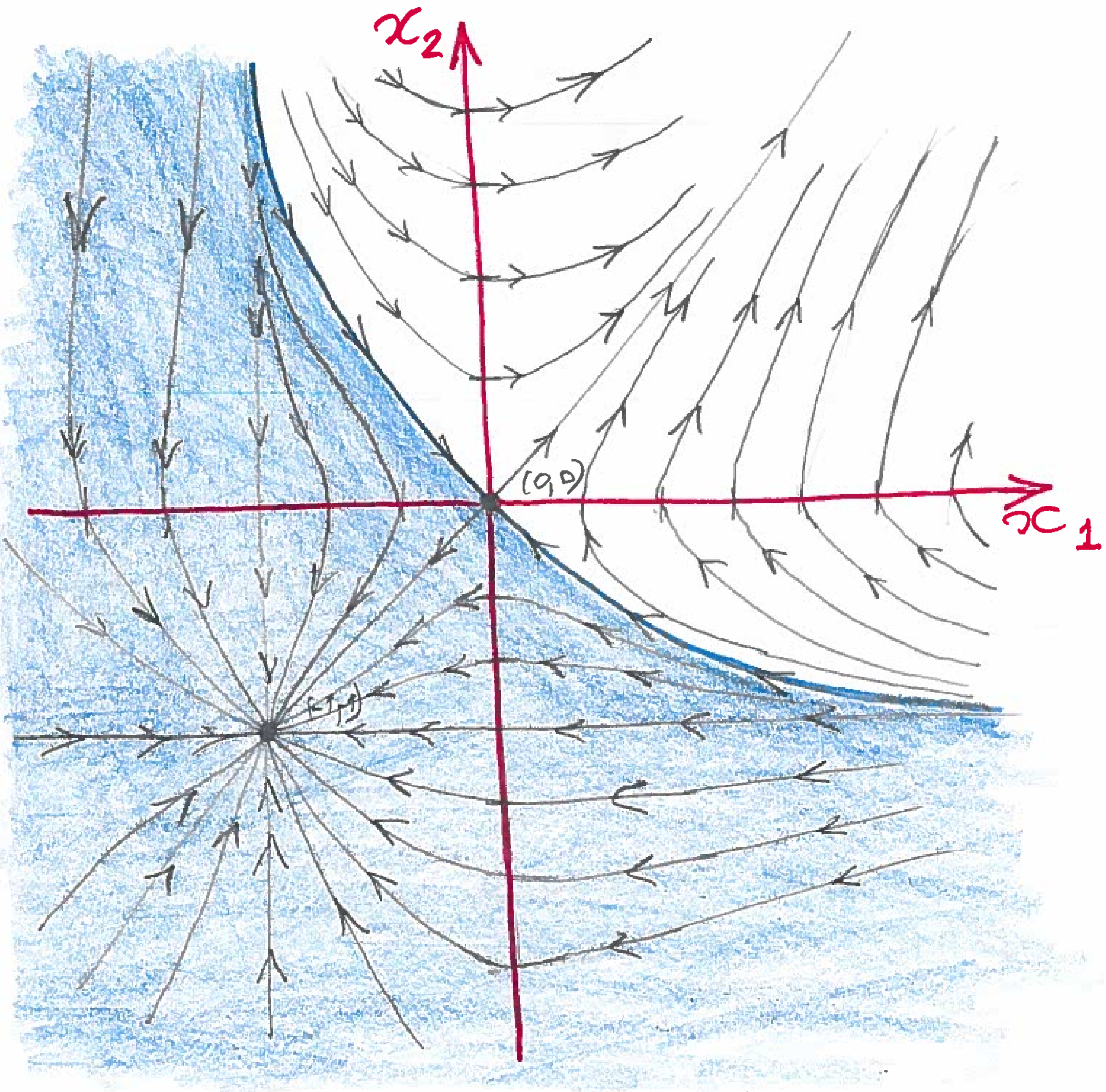
b) Estão ligadas pela mudança de variável no tempo $t = -\tau$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{dx}{d\tau}$$

$$\frac{da}{d\tau} = -f(a)$$

Para passar de um retrato de fase ao outro troca-se o sentido das setas.

c)



- As trajectórias cruzam os eixos sempre ora perpendicular.
- Não há cruzamento de trajectórias