Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2015/2016

Segundo Teste

25 de Maio de 2016, 18h30 horas – salas EA5, EA2

Duração 2 horas

Não é permitida consulta nem uso de funcionalidades programáveis

Quotação: P1-a)1 b)3 c)2, P2-a)1 b)3 c)1, P3-5, P4-a)3 b)1.

P1. O pêndulo tem equações semelhantes a sistemas de interesse prático, por exemplo um gerador ligado a uma linha de transmissão de energia eléctrica. Considere o seguinte modelo do pêndulo descrito pelas equações não lineares de estado

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 9\sin(x_1)$$

a) Mostre que os estados $\bar{x}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\bar{x}^2 = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$ são dois pontos de equilíbrio.

b) Obtenha as equações do sistema linearizado em torno de cada um dos pontos de equilíbrio.

c) Com base nos resultados da alínea b), o que pode dizer sobre a estabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio **do sistema não linear** que são considerados na alínea a)?

P2. Neste problema tem duas alternativas, designadas A e B. A alternativa A é mais complicada mas tem um valor mais elevado (5 valores). A alternativa B vale apenas 2 valores. **Deverá indicar de modo inequívoco qual a alternativa que escolhe. Se responder a ambas, apenas será considerada a resposta a A**, não sendo a outra resposta classificada.

A) Neste problema considera-se a estabilidade de um satélite actuado por um controlador não linear. Por simplicidade, assume-se que o satélite se move apenas num plano. Seja θ o ângulo do satélite com uma direcção de referência, ω a respectiva velocidade de rotação angular e u o momento angular (variável manipulada) que é aplicado ao satélite por jactos nele colocados. O modelo de estado do satélite é assim:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = u$$

A lei de controlo calcula u em função das medidas de θ e de ω, sendo dada por

$$u = -g(\omega) - h(\theta),$$

em que as funções g e h (há muitas possibilidades) satisfazem as propriedades

$$g(0) = 0 \text{ e } \omega g(\omega) > 0 \text{ para } \omega \neq 0$$

$$h(0) = 0 \text{ e } \theta h(\theta) > 0 \text{ para } \theta \neq 0$$

a) Mostre que, com esta lei de controlo, a origem $\theta = 0$ e $\omega = 0$ (o satélite parado e virado para a direcção de referência) é um ponto de equilíbrio.

b) O que pode dizer sobre a estabilidade deste ponto de equilíbrio com base na função de Lyapunov $V(\theta,\omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \int_0^\theta h(\sigma)d\sigma$.

c) Em cada instante t, a variável manipulada $u(t)$ tem de estar entre limites de valores: $-u_{max} \leq u(t) \leq u_{max}$. Dê o exemplo de funções g e h que garantam que a origem é assimptoticamente estável e que, simultâneamente, garantam este intervalo de valores para $u(t)$.

B) Considere o sistema definido pelas equações de estado não lineares

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_1 x_2^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - x_1^2 x_2$$

Para este sistema, a origem ($x_1 = 0,\ x_2 = 0$) é um ponto de equilíbrio. Relativamente a este ponto de equilíbrio, tome como candidata a função de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

O que pode dizer sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio para o sistema não linear? Mostre todos os cálculos.

P3. Considere um sistema para a produção de energia eléctrica usando um colector solar térmico. Este aquece um fluido que circula nos painéis solares por acção de uma bomba. O fluido é usado para produzir energia eléctrica num grupo termoeléctrico. O modelo (muito simplificado) que relaciona a potência produzida x com o comando da bomba u (em unidades normalizadas, com $u = 0$ correspondendo à bomba parada e $u = 1$ correspondendo à máxima velocidade) é dado pela equação diferencial escalar

$$\frac{dx}{dt} = -0{,}2x + u$$

Partindo de uma situação em que nenhuma potência está a ser produzida (isto é, $x(0) = 0$), pretende-se escolher a função u no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 5$ que maximiza o funcional de custo

$$J(u) = \int_0^5 [x(t) - u(t)]dt, \quad 0 \le u \le 1.$$

Este funcional de custo traduz um compromisso entre produzir o máximo de energia no final do intervalo de optimização e consumir pouca energia na bomba. Por aplicação do Princípio de Pontrygin, **determine o controlo óptimo**. Esboce qualitativamente, mas indicando os pontos importantes, os gráficos da Hamoltoniana, do co-estado, do controlo óptimo e da potência produzida correspondente no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 5$.

P4. Considere um veículo que se desloca numa dada direcção, sempre para o mesmo lado, e em que a velocidade v está relacionada com a taxa de consumo de combustível u por

$$\frac{dv}{dt} = -v + u.$$

No instante inicial a velocidade é nula $v(0) = 0$. Pretende-se actuar no veículo no intervalo de tempo $[0, T]$, por forma a que a velocidade final tenha o valor

$v(T) = V_2$, por forma a minimizar a quantidade total de combustível gasta na manobra dada por

$$J(u) = \int_0^T u(t)dt.$$

Existe a restrição que deve ser respeitada

$$0 \leq u(t) \leq u_{max}$$

Acima, V_2, T e u_{max} são parâmetros com valores bem definidos e conhecidos. Deve exprimir as respostas em termos deles.

a) Usando o Princípio de Pontryagin, determine o controlo óptimo que resolve este problema. Esboce qualitativamente, mas indicando os pontos importantes, os gráficos da Hamiltoniana, do co-estado, do controlo óptimo e da velocidade correspondente.

b) Discuta a existência de solução para o problema de controlo óptimo em função do valor dos parâmetros V_2, T e u_{max}.

Ajudas úteis

$\dot{x} = -ax + b \quad a, b$ constantes

$$x(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$