Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2012/2013

Primeiro Teste

17 de Abril de 2013, 20 horas - salas F2,F3,F4,Fa1

Duração 2 horas

Não é permitida consulta nem calculadoras programáveis

Quotação: P1 a)2 b)2 c)1, P2a)1 b)2 c)1 d)1 e)1 P3 a)2 b)1 c)1 d)1 P4 a)2 b)2.

P1. Obtenha modelos de estado equivalentes às seguintes funções de transferência:

a) $G_1(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 2}$

b) $G_2(s) = \dfrac{s+5}{s^3 + 3s^2 + 2s + 5}$

c) A série de dois sistemas descritos nas alíneas anteriores, em que a entrada do sistema 1 é a saída do sistema 2. Atenção o estado deste novo sistema deve ser constituído pela concatenação dos estados que definiu nas alíneas a) e b).

P2. Como é bem conhecido, os vampiros são muito abundantes na Tansilvânia. Alimentam-se de sangue de seres humanos que sugam com mais ou menos sofisticação, tal como se mostra na figura ao lado.

Ao sugarem as suas vítimas humanas, os vampiros transformam-nas, por sua vez, em vampiros. Designando por h o número de humanos e por v o número de vampiros de uma dada região, tem-se assim o seguinte modelo linear para a interacção entre humanos e vampiros

$$\frac{dv}{dt} = -av + ch$$

$$\frac{dh}{dt} = kh - dv\ ,$$

em que o tempo t se exprime em [ano] e a, c, k e d são parâmetros. Na primeira equação, o termo associado ao parâmetro a representa a eliminação dos vampiros por factores como a exposição ao alho e à luz solar, o serem espetados no coração com cruzes de pau ou atingidos por uma bala de prata. O termo associado ao parâmetro c traduz o aumento do número de vampiros através da transformação dos humanos por eles mordidos. O parâmetro k é a taxa de crescimento exponencial da população humana e o termo associado ao parâmetro d traduz a perda de humanos que se transformam em vampiros. Aturados estudos dos vampirologistas da Transilvânia permitiram concluir que, para a população considerada, estes parâmetros assumem os valores numéricos $a=1$, $c=0{,}1$, $k=2$ e $d=0{,}5$. Responda às seguintes perguntas:

a) Represente o modelo de interacção humanos/vampiros na forma $\frac{dx}{dt} = Ax$ em que o estado é $x = [v \quad h]^T$ Calcule os valores próprios e os vectores próprios da matriz A com os valores numéricos indicados acima para os parâmetros.

b) Suponha que a condição inicial é de $v(0) = 1000$ vampiros. Mostre que, partindo desta quantidade de vampiros, existe uma quantidade M tal que, se o número de humanos for inferior a M, então os humanos extinguem-se mas que, se o número inicial de humanos for superior a M, então quando o tempo passa, quer o número de humanos quer o de vampiros diminui primeiro, aumentando posteriormente. Determine M. Justifique a sua resposta com base num esboço das trajectórias no plano de estado.

c) Suponha que existem inicialmente 1000 vampiros e 300 humanos. Sem usar a matriz de transição, mostre que, quando passa muito tempo, haverá aproximadamente 2983 humanos por cada 100 vampiros.

d) Usando o método que preferir, calcule e^{At} (matriz de transição).

e) Sabendo que $x(4)=\begin{bmatrix}1000\\200\end{bmatrix}$ calcule $x(5)$.

P3. Um permutador de calor permite transferir calor de um fluido (fonte de calor) para outro que se pretende aquecer. Consta normalmente de dois circuitos separados. Num dos circuitos circula o fluido a aquecer e noutro (que o envolve por forma a permitir a transferência de calor), o fluido que constitui a fonte de calor (por exemplo, vapor). Regulando o caudal de fluido quente, varia-se a quantidade de energia transmitida por unidade de tempo ao fluido a aquecer, o que permite regular a sua temperatura. A fig. P3-1 mostra uma visão esquemática de um permutador de calor.

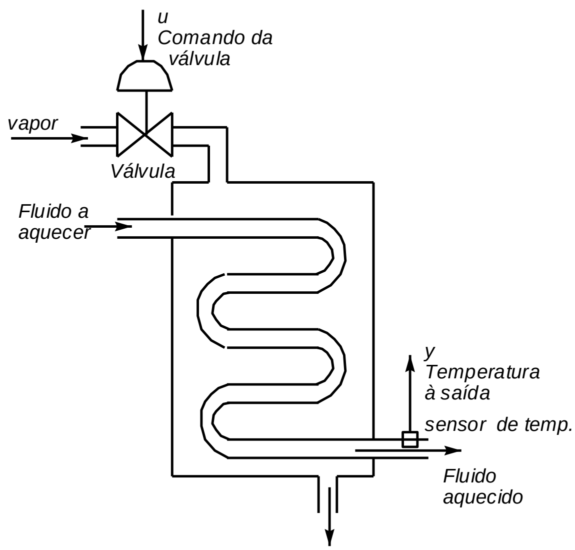

Fig. P3-1 Esquema de um permutador de calor.

Neste problema pretende-se projectar um controlador por realimentação de variáveis de estado para regular a temperatura de saída do fluído por actuação na válvula do vapor. Para tal, conhece-se o seguinte modelo de estado que relaciona incrementos no comando da válvula u em torno de um ponto de trabalho, com os incrementos y da temperatura do fluido à saída:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-0.017 & 0.017\\0 & -0.1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0.1\end{bmatrix}u(t) \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)$$

Responda às seguintes questões:

a) Projecte um regulador por realimentação de variáveis de estado que coloque os pólos da cadeia fechada em $-0.05 \pm j0.087$

b) Diga justificadamente se o modelo é controlável

c) Projecte um observador assimptótico que coloque os pólos do erro de estimação de estado em $-0.15 \pm j0.26$

d) Diga justificadamente se o modelo é observável

P4. Considere o sistema Σ ampliado com um integrador colocado à entrada e em série, que se mostra na figura P4-1.

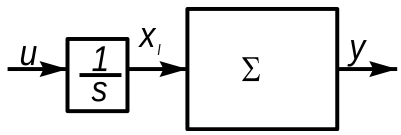

Fig. 4-1. Sistema ampliado com um integrador em série.

O sistema Σ tem entrada igual à saída x_I do integrador e tem um modelo de estado descrito na forma standard por matrizes A, b, c e um estado designado por x. A saída do integrador x_I é igual ao integral da entrada u.

a) Supondo que o modelo de estado de Σ é controlável (ou seja, o par (A,b) é controlável), mostre que o sistema Σ ampliado com o integrador também é controlável quando se toma como estado $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}$.

b) Defina um observador para estimar apenas x. Designe por $\hat{x}$ a estimativa dada por este observador. Dado o controlo $u = -K\hat{x} - K_I x_I$ mostre que tem lugar um Teorema de Separação, que permite impor os pólos do observador separadamente dos do controlador.