Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2005/06

Segundo Exame

17 de Julho de 2006, 17 horas - salas E3, E4, E8

Duração 3horas – Não é permitida consulta de quaisquer elementos nem calculadoras programáveis

Quotação: P1: a-0.5, b-0.5, c-1, d1.5, e-1.5, f-0.5, g-1, h-1, i-2, j-1, k-2, l-0.5 P2-2, P3-2, P4-3.

P1. Neste problema pretende-se estudar a dinâmica da infecção pelo vírus HIV-1 e projectar um controlador por realimentação de variáveis de estado que permita manter a concentração de vírus num determinado valor. Considere o seguinte modelo não linear de infecção pelo HIV-1:

$$\dot{x}_1 = s - dx_1 - \alpha(1-u)x_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = \alpha(1-u)x_1x_2 - \delta x_2$$

Neste modelo, as variáveis de estado são, respectivamente:

- x_1 concentração de células sãs;
- x_2 concentração de células infectadas.

A variável manipulada é designada por u e corresponde à dose de um fármaco. As letras s, d, α, δ representam parâmetros que, para o modelo do paciente considerado têm os valores $s = 10, \quad d = 0.02, \quad \alpha = 0.001, \quad \delta = 0.24$.

Responda às seguintes perguntas:

a) O modelo tem dois pontos de equilíbrio correspondentes ao paciente saudável (ponto de equilíbrio que designaremos por P) e ao paciente infectado (ponto de equilíbrio que designaremos por Q). Escreva um sistema de duas equações algébricas cuja solução são estes dois pontos (**não** resolva as equações).

b) O ponto de equilíbrio Q (indivíduo infectado) é dado por:

$$x_{eqQ} = \begin{bmatrix} 240 \\ 21.67 \end{bmatrix}$$

Determine as coordenadas x_{eqP} do ponto de equilíbrio P (paciente são).

c) Os incrementos das variáveis de estado em torno do ponto de equilíbrio Q e de $u = 0$ satisfazem um modelo linear em que as matrizes são

$$A_Q = \begin{bmatrix} -0.0417 & -0.24 \\ 0.0217 & 0 \end{bmatrix} \qquad b_Q = \begin{bmatrix} 5.2 \\ -5.2 \end{bmatrix}$$

Determine as matrizes A_P e b_P do modelo linearizado em torno do ponto P.

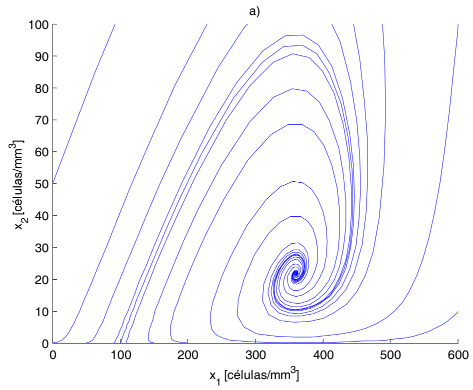
d) Calcule os valores próprios das matrizes A_P e A_Q e diga a que tipo de resposta no tempo correspondem.

e) Calcule os valores próprios da matriz A_P e esboce graficamente o comportamento local do estado do modelo não linear em torno do ponto P, indicando as trajectories de estado notáveis.

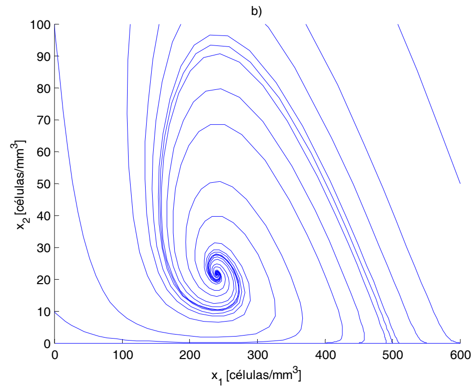
f) Considere as figuras 1a) a 1d). Diga qual a que corresponde ao retrato de fase do modelo. Justifique a sua resposta.

g) Recorrendo aos valores próprios e aos vectores próprios, escreva a solução do sistema linearizado em torno do ponto P com condição inicial (referida ao modelo incremental) $\Delta x_1(0) = 10$, $\Delta x_2(0) = 2$.

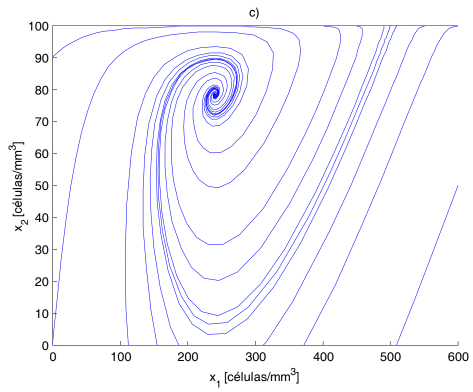
h) Considere os sistemas linearizados em torno de P e Q e de $u = 0$. Determine se cada um destes sistemas é ou não controlável.



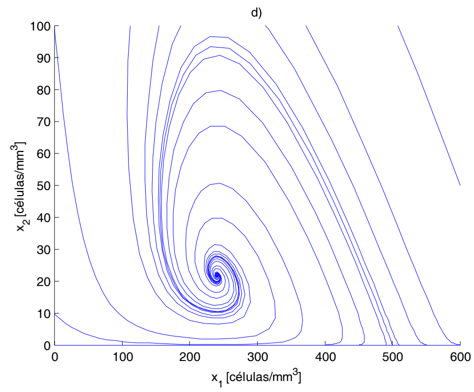
a)



b)



c)



d)

Fig. 1 – Problema 1.

i) Projecte um controlador por realimentação de variáveis de estado que permita estabilizar o estado em torno do ponto Q e de $u = 0$ por forma a que os valores próprios da dinâmica controlada sejam -0.1 e -0.2. Admita nesta alínea que tem acesso directo ao estado e que pode ter incrementos negativos na variável de controlo.

j) Suponha agora que só tem acesso à medida da concentração das células infectadas (variável x_2). A saída do sistema é assim $y = x_2$. Diga se o sistema linearizado em torno do ponto Q é observável.

k) Para o sistema linearizado da alínea j), projecte um observador assimptótico que permita estimar o estado e cujos valores próprios da dinâmica do errop sejam -0.5 e -1.

l) Explique porque é que é importante fazer o estudo da alínea i) antes do projecto do observador.

P2. Considere o sistema autónomo (sem entrada) não linear:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + 2x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -2x_1x_2^2 \end{cases}$$

a) Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov, mostre que a origem é um ponto de equilíbrio estável, pelo menos. Sugestão: use uma forma quadrática como função de Lyapunov.

b) Recorrendo ao Teorema do Conjunto Invariante mostre que a origem é um ponto de equilíbrio assimptoticamente estável.

P3. Pretende-se empurrar um carro durante um intervalo de tempo de 10 segundos por forma a maximizar

$$J(u) = x_1(10) - \frac{1}{2}\int_0^{10} u^2(t)dt$$

em que u é a força aplicada ao carro (variável manipulada) e x_1 a posição medida a partir do instante incial. Dado que se admite que o carro desliza sem atrito, as equações que descrevem o seu movimento são:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u$$

com condições iniciais nulas. Por aplicação do Princípio de Pontriagyn determine a função de controlo que optimiza J.

Ajudas úteis: As informações seguintes (que infelizmente não podem ser obtidas no net118) são úteis para resolver este problema.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x)\Big|_{x=x(T)}$$

$$H(\lambda,x,u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

P4. Considere o sistema não linear

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad x \notin R^n \tag{1}$$

em que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio isolado e f é um vector de funções contínuas com primeiras derivadas parciais contínuas numa bola centrada em torno da origem. Seja

$$f(x) = Ax + g(x)$$

em que a matriz A é dada por

$$A = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right]_{x=0}$$

e g verifica

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$$

Por outras palavras,

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2}$$

é a linearização de (1) em torno da origem.

Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov, mostre que se A tem todos os valores próprios com parte real negativa, então a origem ($x = 0$) é um ponto de equilíbrio assimptoticamente estável do sistema não linear (1).

Ajudas, umas mais úteis que outras:

i) Desigualdade de Schwarz:

$$\left|x^T y\right| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad x,\, y \in R^n$$

ii) Sendo P uma matriz de elementos reais e $x \in R^n$, tem-se

$$\|Px\| \leq \sigma_{\max} \|x\|$$

em que $\sigma_{\max}$ é o máximo valor singular da matriz P. Os valores singulares de uma matriz de elementos reais $M[m \times n]$ são definidos como

$$\sigma_i(M) := \sqrt{\lambda_i(M^T M)}$$

em que λ_i designa o valor próprio número i.

iv) Recorde que, por definição de limite, se

$$\lim_{z \to 0} h(z) = a \qquad z \in R$$

então

$$\forall_{\delta > 0},\, \exists_{\varepsilon > 0} : |z| < \varepsilon \Rightarrow |h(z) - a| < \delta$$