CEE - 1.º Teste - Algumas soluções

P1) a) $x_1 = y$

$x_2 = \dot{y}$

$\dot{x}_1 = x_2$

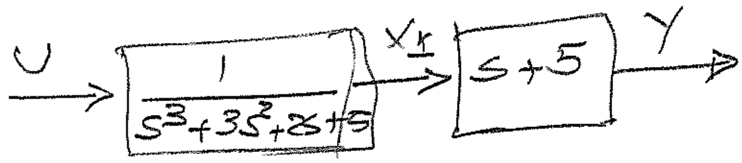
$s^2 Y + 2sY + 2Y = U$

$\dot{x}_2 = -2x_2 - 2x_1 + u$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

b)



$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = x_3$

$\dot{x}_3 = -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + u$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \hline x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = x_5$$

$$\dot{x}_5 = -5x_3 - 2x_4 - 3x_5 + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \hline \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

P2) 3)

$\dot{v} = -av + ch$

$\dot{h} = kh - dv$

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & c \\ -d & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix}$$

$a = 1 \qquad c = 0,1$

$d = 0,5 \qquad K = 2$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0,1 \\ -0,5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -0,1 \\ 0,5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda - 2) + 0,05 =$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 1,95$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 1,95}}{2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1 + 2,9665}{2} = 1,9832 = \lambda_1 \\ \dfrac{1 - 2,9665}{2} = -0,9832 = \lambda_2 \end{cases}$$

$$(\lambda_i + 1) - 0,1\, v_2^i = 0$$

$$v_2^i = 10(\lambda_i + 1)$$

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 29,832 \end{bmatrix}$$

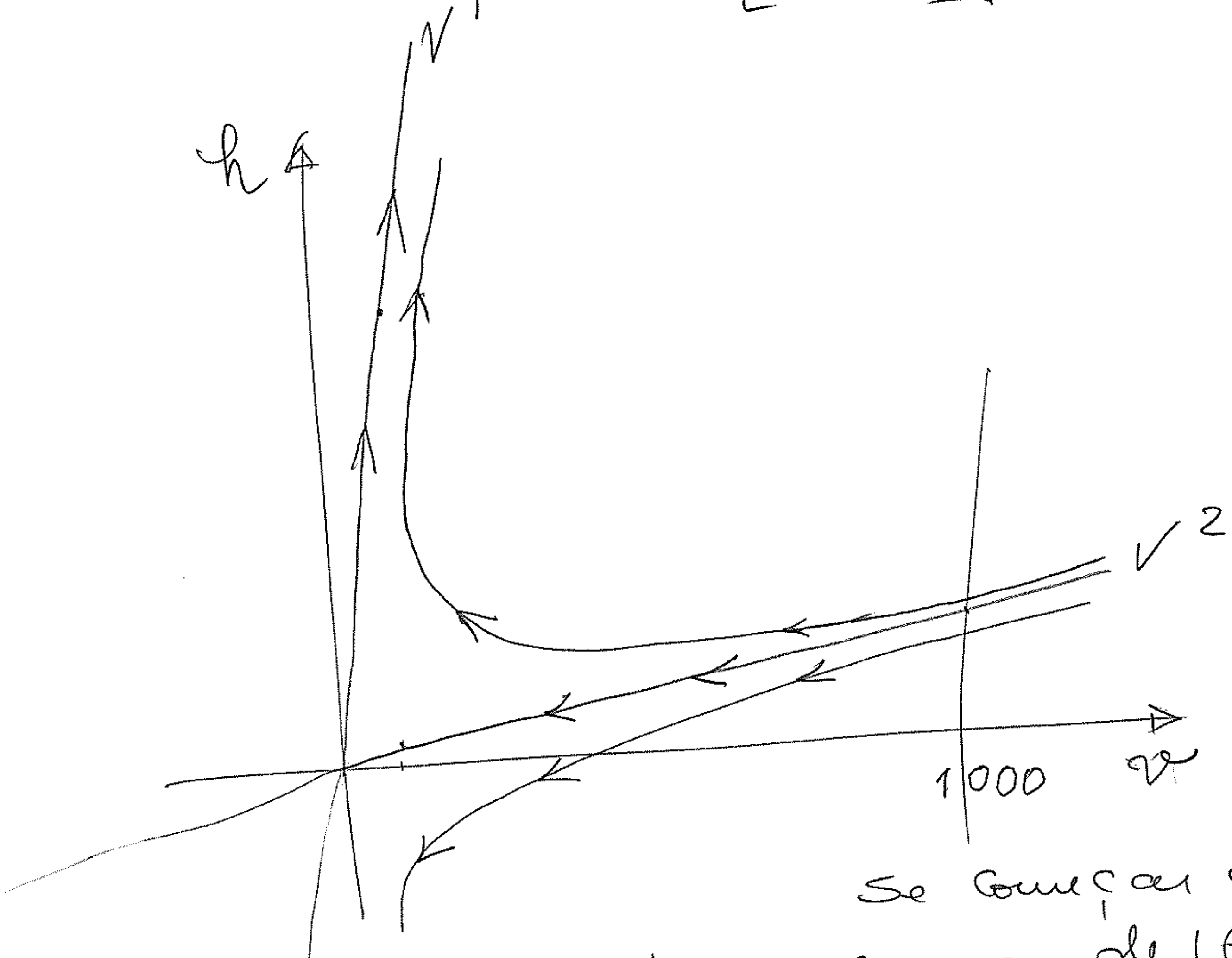
$i = 1$

$$v_2^1 = 10 \times (1,9832 + 1) = 29,832$$

$i = 2$

$v_2^2 = 10(-0,9832+1) = 0,168$

$$v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,168 \end{bmatrix}$$



Se começar c/ menos de 168 h humanos extinguem-se
Se começar c/ mais de 168 h que o número de humanos que o de vampiros diminui ligeiramente e depois aumenta

Quando passa muito tempo haverá 29,832 h por cada vampiro.
dado que a trajectória tende a ficar alinhada com V_1.

P4 -

a) Realização de estados do sistema ampliado com o integrador:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \begin{bmatrix} x \\ \hline x_I \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix}}_{\bar{B}} u$$

$x \rightarrow$ estado de Σ

$x_I \rightarrow$ " do integrador

Matriz de controlabilidade do sistema aumentado:

$$\mathcal{C}(\bar{A}, \bar{B}) = \left[\bar{B} \mid \bar{A}\bar{B} \mid \bar{A}^2\bar{B} \mid \dots \; \bar{A}^{n+1}\bar{B} \right]$$

$n = \dim x \qquad \dim x_I = 1$

$$\bar{A}\bar{B} = \begin{bmatrix} A & B \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}^2\bar{B} = \bar{A}(\bar{A}\bar{B}) = \begin{bmatrix} A & B \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}^3\bar{B} = \bar{A}(\bar{A}^2 B) = \begin{bmatrix} A & B \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2B \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}(\bar{A}, \bar{B}) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & B & AB & \dots & A^n B \\ \hline 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right]$$

Sendo (A, B) controlável, as primeiras

n linhas de $\mathcal{C}(\bar{A}, \bar{B})$ geram
um espaço de dimensão n. A última
linha é um vector que não está
neste espaço pelo que

$$\text{Car}\ \mathcal{C}(\bar{A}, \bar{B}) = n+1$$

o que mostra que o sistema
aumentado é controlável.

$$\dot{x} = Ax + Bx_I$$

$$\dot{x}_I = x_I + u$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bx_I + L(y - C\hat{x})$$

$$u = -K\hat{x} - K_I x_I$$

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} - LC\tilde{x}$$

$$\dot{x} = Ax + Bx_I$$

$$\dot{x}_I = x_I - K(x - \tilde{x}) - K_I x_I$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ -K & 1 - K_I & K \\ 0 & 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & -B & 0 \\ K & s - 1 K_I & K \\ 0 & 0 & sI - A + LC \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ K & s - K_I \end{bmatrix}}_{\text{Pólos do controlador}} \cdot \underbrace{\det (sI - A + LC)}_{\text{Pólos do observador}}$$