Mestrado Integrado em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2013/2014

Exame

20 de Junho de 2014, 15 horas – salas Ea1, Ea2, E1

Duração 3 horas

Não é permitida consulta nem calculadoras programáveis

Quotação: P1-a,b,c)1,d)2 **P2**-a,b)1.5,c)1 **P3**-a,b,c)1 **P4**-a,b,c,d)1 **P5**-4

P1. Considere o modelo simplificado da suspensão activa de um automóvel. A massa m do carro está ligada à estrada através de um amortecedor representada pela mola de coeficiente K e por um elemento de atrito de coeficiente β. Para além disso, a suspensão é activa, existindo a possibilidade de actuar no carro com uma força vertical u.

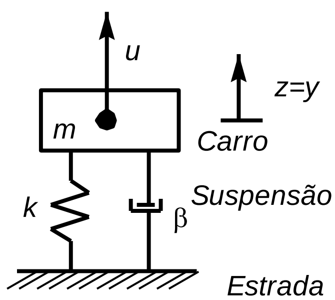

Figura P1-1. Problema P1. Modelo simplificado da suspensão activa de um automóvel.

Considera-se que a suspensão parte de uma situação de equilíbrio, em que o peso da massa do carro é equilibrado pela mola. A partir desta situação, consideram-se desvios incrementais z da variação da posição da massa do carro, medidos no referencial indicado na figura. Aplicando a lei de Newton, a equação que traduz o movimento vertical do carro é

$$m\ddot{z} = -\beta\dot{z} - Kz + u$$

a) Tome como variáveis de estado a posição $x_1 = z$ e a velocidade $x_2 = \dot{z}$. Escreva na forma matricial as equações de estado da suspensão activa. Utilize os seguintes valores numéricos, num dado sistema de unidades: $m = 1$, $K = 1$ e deixe as equações em função do parâmetro β.

b) Deduza uma expressão para os valores próprios do sistema em função do coeficiente de atrito β.

c) Indique a gama de valores de β para as quais a resposta no tempo do movimento da massa do carro a uma condição inicial não nula é uma oscilação de amplitude decrescente.

d) Considere agora a situação em que $\beta = 8$ e em que a entrada é sempre nula ($u(t) = 0$ para todo o t). Calcule o estado do sistema em função do tempo quando a condição inicial é

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

P2. Considere de novo a suspensão activa do problema P1. Pretende-se projectar um controlador que calcule a força u a aplicar ao carro por forma a que o sistema controlado tenha uma dinâmica especificada. Responda às seguintes perguntas:

a) Supondo que tem acesso à medida do estado, projecte um controlador tal que o sistema em cadeia fechada tenha os pólos em -1 e -2.

b) Projecte os ganhos do observador tal que a dinâmica do erro tenha os pólos em -6 e -7.

c) Escreva as equações que permitem calcular o contro u em função da saída medida y para este caso particular e represente-as através de um diagrama de blocos (apenas com integradores, ganhos e pontos de soma algébrica) **usando apenas blocos escalares**.

P3. Considere o sistema linear e invariante no tempo descrito pelo modelo de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}4 & -1{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [0{,}8 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

a) Diga justificadamente se é controlável.

b) Diga justificadamente se é observável.

c) Dê uma interpretação em termos da função de transferência.

P4. Considere o sistema da fig. P4-1 que representa um controlador de caudal com uma válvula não linear.

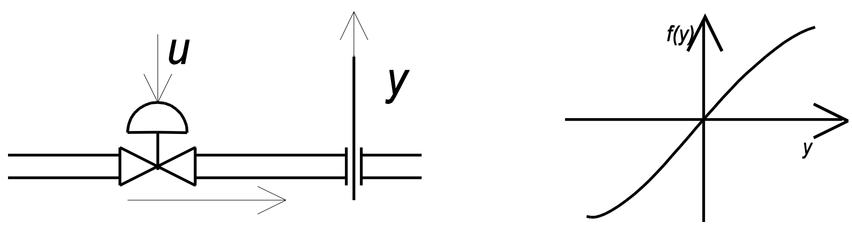

Fig. P4-1: Problema P14. Válvula não linear para controlo de caudal.

A válvula é descrita pelo modelo não linear de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dt} = u - \theta \ f(y)$$

em que u é a posição da válvula (variável manipulada), y é o caudal (variável a controlar), a função não linear $f(.)$ é conhecida, estando representada na fig.3, e o parâmetro θ é desconhecido. Pretende-se:

a) Determine uma retroacção estática da saída tal que, admitindo um conhecimento perfeito de θ, o sistema (válvula+realimentação) se comporte como um integrador.

b) Determine uma lei de controlo linear a aplicar ao integrador assim resultante, que leve a que, supondo conhecimento perfeito de θ, o erro de seguimento $e(t) = h(t) - r$ do sistema controlado tenda para zero com uma constante de tempo de 1 segundo.

c) Recorrendo ao Segundo Método de Lyapunov, obtenha uma lei de ajuste do parâmetro θ que garanta que o sistema global é estável.

d) Diga justificadamente se pode ou não garantir que o erro de seguimento $e(t) = h(t) - r$ tende para zero quando t tende para infinito.

P5. Considere um míssil que pretende atingir um alvo. O alvo desloca-se em linha recta, para a direita, com velocidade constante. A velocidade do míssil relativamente ao alvo segundo a horizontal é V, constante, e x_2 segundo a vertical. No instante $t = 0$ a distância, medida segundo a horizontal entre o míssil e o alvo é D. O tempo que o míssil demora a atingir o alvo é $T = \frac{D}{V}$. A distância do míssil ao alvo segundo a vertical é x_1. A dinâmica vertical do míssil é

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u$$

em que u é a variável manipulada, dada pela componente vertical da aceleração do míssil. Não há restrições em u.

Determine a força de propulsão vertical u do míssil no intervalo de tempo $[0, T]$ por forma a minimizar o funcional

$$J(u) = \frac{1}{2} x_1^2(T) + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(\tau) d\tau$$

Neste funcional de custo, o primeiro termo pesa o erro vertical quando a distância horizontal se anula e o segundo termo pesa a energia gasta na manobra. Exprima o controlo óptimo u como função do tempo t, do tempo gasto na manobra T e das condições iniciais do estado $x_1(0)$ e $x_2(0)$.

Ajuda:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

$$J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u) dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t))$$

$$\lambda'(T) = \Psi_x(x)\Big|_{x=x(T)}$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$