TÉCNICO LISBOA

**Mestrado Integrado em**

**Engenharia Electrotécnica e de Computadores**

# Controlo Em Espaço de Estados

**2014/2015**

# Exame

19 de Junho de 2015, 15h00 horas – salas F3, F2

**Duração 3 horas**

**Não é permitida consulta nem uso de calculadoras programáveis**

**Quotação:** P1- 11 (2 em b),c),i) e 1 nas restantes), P2 a)2 b)1 P3)3 P4)3.

**P1.** O vírus HIV-1 ataca o sistema imunitário. De uma maneira simplificada, podemos caracterizar a infecção através das células do sistema imunitário sãs (ainda não afectadas pelo vírus) e pelas células infectadas (modificadas pelo vírus). Neste problema pretende-se estudar a dinâmica da infecção pelo vírus HIV-1 e projectar um controlador por realimentação de variáveis de estado que permita manter a concentração de vírus num determinado valor, através da aplicação de um fármaco ao indivíduo infectado. Considere o seguinte modelo não linear de infecção pelo HIV-1:

$$\dot{x}_1 = s - dx_1 - \alpha(1-u)x_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = \alpha(1-u)x_1x_2 - \delta x_2$$

Neste modelo, as variáveis de estado são, respectivamente:

- $x_1$ concentração de células sãs;
- $x_2$ concentração de células infectadas.

A variável manipulada é designada por $u$ e corresponde à dose de um fármaco que é aplicado ao paciente. As letras $s, d, \alpha, \delta$ representam parâmetros que, para o modelo do paciente considerado têm os valores $s = 10, \quad d = 0.02, \quad \alpha = 0.001, \quad \delta = 0.24$.

Responda às seguintes perguntas:

a) Na ausência de terapia ($u = 0$), o modelo tem dois pontos de equilíbrio correspondentes ao paciente saudável (ponto de equilíbrio que designaremos por P) e ao paciente infectado (ponto de equilíbrio que designaremos por Q). Escreva um sistema de duas equações algébricas cuja solução são estes dois pontos (**não** resolva as equações).

b) O ponto de equilíbrio Q (correspondente ao estado de equilíbrio de um indivíduo infectado) é dado por

$$x_{eqQ} = \begin{bmatrix} 240 \\ 21.67 \end{bmatrix}$$

Determine as coordenadas $x_{eqP}$ do ponto de equilíbrio P (o outro ponto de equilíbrio, correspondente ao estado de equilíbrio de um paciente são).

c) Os incrementos das variáveis de estado em torno do ponto de equilíbrio Q e de $u = 0$ satisfazem um modelo linear em que as matrizes são

$$A_Q = \begin{bmatrix} -0.0417 & -0.24 \\ 0.0217 & 0 \end{bmatrix} \qquad b_Q = \begin{bmatrix} 5.2 \\ -5.2 \end{bmatrix}$$

Determine as matrizes $A_P$ e $b_P$ do modelo linearizado em torno do ponto P.

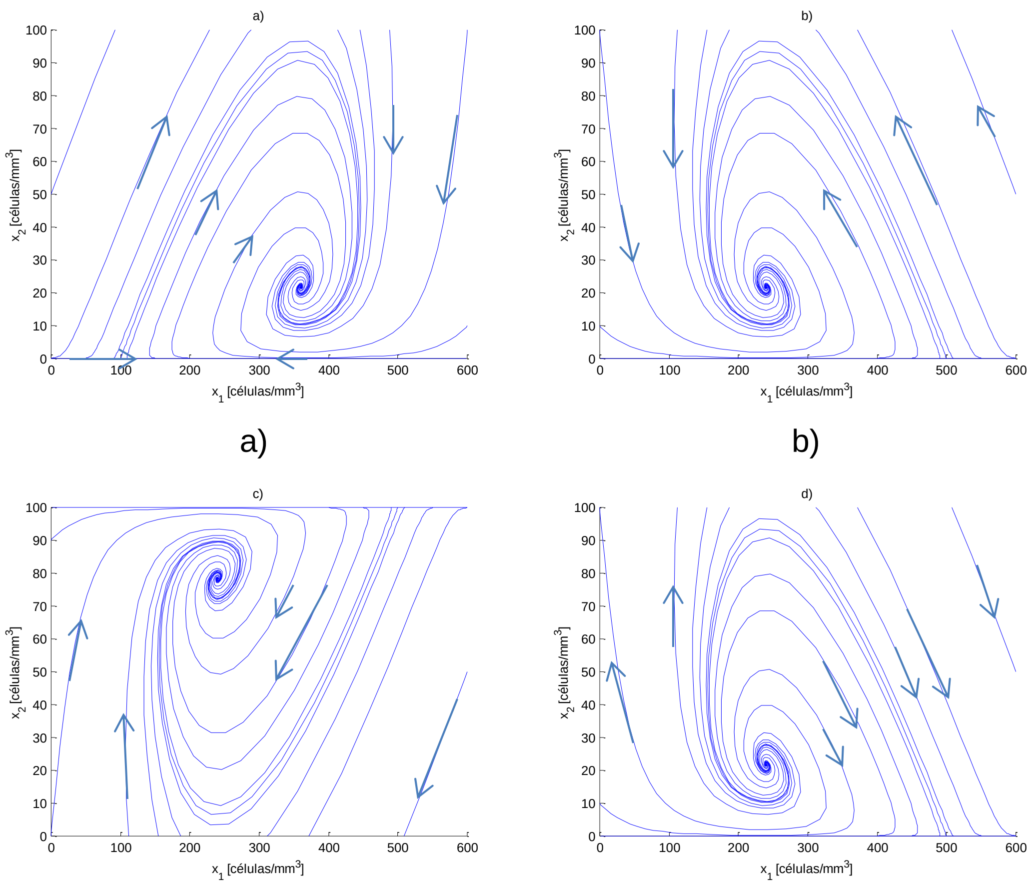
d) Calcule os valores próprios das matrizes $A_P$ e $A_Q$ e diga para cada uma a que tipo de resposta no tempo correspondem (se o ponto de equilíbrio é estável ou instável, se a resposta é ou não oscilatória e se tende ou não para zero quando o tempo aumenta).

e) Calcule os vectores próprios da matriz $A_P$ e esboce graficamente de modo aproximado o comportamento local das trajectórias no plano de estado do modelo não linear em torno do ponto P. Suponha $u = 0$.

f) Considere as figuras 1a) a 1d). Diga qual é a que corresponde ao retrato de fase do modelo. Justifique a sua resposta.

g) Recorrendo aos valores próprios e aos vectores próprios, escreva a solução do sistema linearizado para incrementos com componentes $\Delta x_1$ e $\Delta x_2$ em torno do ponto P com condição inicial (referida ao modelo incremental) $\Delta x_1(0) = 10$, $\Delta x_2(0) = 2$.

h) Considere o sistema linearizado em torno de Q e de $u = 0$. Determine se este sistema linearizado é ou não controlável.




a) b)

c) d)

Fig. 1 – Problema 1.

i) Projecte um controlador por realimentação de variáveis de estado que permita estabilizar o estado em torno do ponto Q e do controlo de equilíbrio $u = 0$ por forma a que os valores próprios da dinâmica controlada sejam -0.1 e -0.2.

Admita nesta alínea que tem acesso directo ao estado e que pode ter incrementos negativos na variável de controlo (quer dizer, que $\Delta u$ pode ser negativo).

**P2.** a) Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov, mostre que a origem (0, 0) do sistema seguinte é um ponto de equilíbrio assimptoticamente estável:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1^3 - 2x_1x_2^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2^3 \end{cases}$$

b) Considere agora o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1^3 + 2x_1x_2^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2^3 \end{cases}$$

Demonstre que a origem é instável com o teorema de instabilidade de Lyapunov.

**P3.** Considere um veículo que se desloca sem atrito numa única direcção e em que se despreza a dinâmica do motor. A equação diferencial que o representa é

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad x(o) = 0.$$

A variável $x(t)$ representa a coordenada do veículo no instante $t$, e $u(t)$ é o comando do veículo (variável manipulada).

Recorrendo ao Princípio de Pontryagin, calcule $u(t)$, $0 \le t \le 10$ que maximiza o funcional

$$J(u) = x(10) - \frac{1}{2}\int_0^{10} u^2(t)dt.$$

*Ajuda:*

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda,x,u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

**P4.** Considere um robot que se move de acordo com o modelo de estado

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = u$$

A variável $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ representa o estado do veículo no instante $t$, e $u(t)$ (escalar) é o comando do robot (variável manipulada).

Recorrendo ao Princípio de Pontryagin, calcule a função de controlo que permite transferir o estado do valor inicial

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

para o valor final em $t = T = 2$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

minimizando o funcional de custo

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt.$$

Quer dizer: pretende-se calcular a lei de controlo que pára o robot em 2 segundos consumindo o mínimo de energia.