Licenciatura em Engenharia Electrotécnica

e de Computadores

Controlo Em Espaço de Estados

2006/07

Primeiro Exame

2 de Julho de 2007, 17 horas - salas F2, F3, F4

Duração 3 horas

Não é permitida consulta nem calculadoras programáveis

Quotação: P1-5, P2-5, P3-3, P4-2, P5-2, P6-3.

P1. Considere o sistema linear e invariante de 2ª ordem, descrito pela equação

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Responda sucessivamente às seguintes perguntas:

a) Calcule os valores próprios e os vectores próprios da matriz A.

b) Com base nos valores próprios e nos vectores próprios escreva a solução da equação diferencial quando a condição inicial é $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$

c) Indique uma condição inicial tal que o estado do sistema tenda para zero quando o tempo $t \to \infty$.

d) Esboce graficamente o retrato de fase do sistema representado pela equação diferencial.

e) Recorrendo a um método à sua escolha, calcule a matriz exponencial e^{At}.

P2. Considere o sistema cujo diagrama de blocos se mostra na figura P2-1.

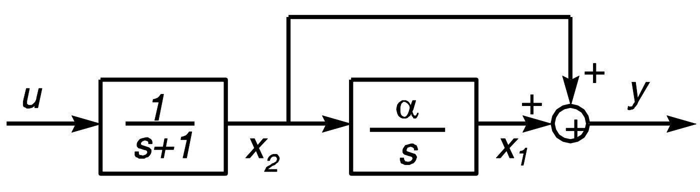

Fig. P2-1: Problema P2.

a) Obtenha uma representação de estado de 2ª ordem do sistema. Tome como variáveis de estado x_1 e x_2, indicadas na figura.

b) Diga para que valores do parâmetro α, tomando como variáveis de estado x_1 e x_2, é possível dimensionar os ganhos de uma realimentação linear de todas as variáveis de estado (RLVE) por forma a posicionar arbitrariamente os pólos do sistema em cadeia fechada. Não calcule explicitamente o polinómio característico da cadeia fechada.

c) Para $\alpha = 2$, dimensione os ganhos da RLVE por forma a que os pólos da cadeia fechada se situem em $-4 \pm j$. Suponha, nesta alínea, que tem acesso à medida directa de x_1 e x_2.

d) Suponha agora que não tem acesso à medida directa de x_1 e x_2. Diga para que valores de α é que o sistema é tal que satisfaz a condição de ser possível dimensionar um observador assimptótico do estado por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero tão depressa quanto se queira.

e) Para $\alpha = 2$ escreva as equações e projecte os ganhos de um observador por forma a que o erro na estimativa do estado tenda para zero, com valores próprios em $-10 \pm j$ da equação de erro.

P3. Atenção: Neste problema tem dois enunciados alternativos. A primeira alternativa corresponde à quotação completa (3 valores). A segunda corresponde a uma quotação máxima de 1 valor nesta pergunta. Indique claramente na sua resposta qual a alternativa que escolhe. Se responder às duas alternativas, mesmo que parcialmente, apenas será classificada a primeira.

Alternativa P3A) (3 valores) Considere o sistema da fig. 3 que representa um controlador de caudal com uma válvula não linear, em que y é a medida de caudal que atravessa a válvula (saída do sistema) e u é o comando do posicionador de válvula (variável manipulada).

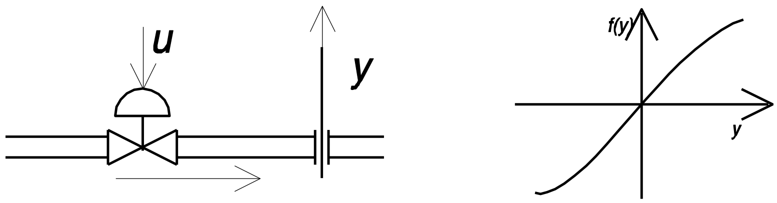

Fig. P3-1: Problema 3.

A válvula é descrita pelo modelo não linear de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dt} = u - \theta \ f(y)$$

em que a função não linear $f(.)$ é conhecida, estando representada na fig. P3-1 (à cdireita), e o parâmetro θ é desconhecido.

Pretende-se:

a) Determine uma retroacção estática da saída tal que, admitindo um conhecimento perfeito de θ, o sistema (válvula+realimentação) se comporte como um integrador.

b) Determine uma lei de controlo linear a aplicar ao integrador assim resultante, que leve a que, supondo conhecimento perfeito de θ, o erro de seguimento $e(t) = r - y(t)$ do sistema controlado tenda para zero com uma constante de tempo de 1 segundo. Admite-se que a referência r é constante.

c) Recorrendo ao Segundo Método de Lyapunov, obtenha uma lei de ajuste do parâmetro θ que garanta que o sistema global é estável.

d) Diga justificadamente se pode ou não garantir que o erro de seguimento $e(t)$ tende para zero quando t tende para infinito.

Alternativa P3B) (1 valor)

Considere o sistema autónomo (isto é, sem entrada), de 2ª ordem, descrito pelo sistema de equações não lineares

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

a) Mostre que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema. Obtenha as equações do sistema linearizado em torno da origem. Classifique a origem em termos dos valores próprios do sistema linearizado. Diga o que pode concluir daqui sobre o comportamento em torno da origem do sistema não linear.

b) Recorrendo ao 2º Método de Lyapunov, e tomando como candidata a função de Lyapunov a função $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$, o que pode dizer sobre a origem do sistema não linear?

P4. Considere a figura P4-1 que representa um sistema de controlo realimentado em que o actuador tem uma saturação.

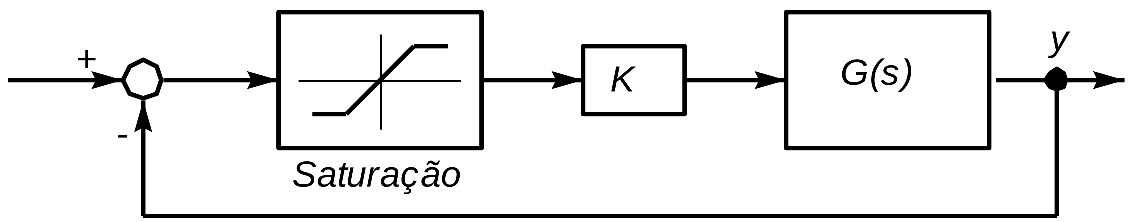

Fig. 4-1. Problema 4.

A função de transferência $G(s)$ é dada por

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

A saturação deixa passar sinais entre -2 e 2 (dito de outro modo, o nível de saturação é $S = 2$) com ganho 1, dando um valor constante fora deste intervalo. Sabe-se que a função descritiva da saturação tem fase nula, sendo o seu módulo N, para amplitudes X da entrada superiores ao nível de saturação S, dado pelo gráfico da figura 4-2. Para valores inferiores é $N = 1$.

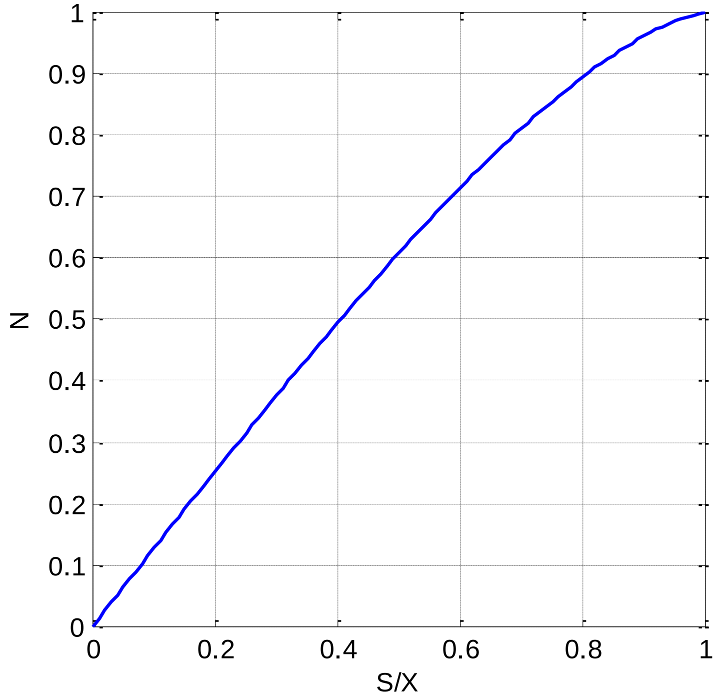

Fig. 4-2. Problema 4. Função descritiva da saturação.

Utilize o Método da Função Descritiva para responder às seguintes questões:

a) Supondo que o ganho K pode tomar valores positivos, discuta qualitativamente a possibilidade de existência de oscilações de amplitude constante.

b) Para $K = 4$ calcule uma estimativa da frequência e amplitude dessas oscilações.

P5. Pretende-se controlar o sistema escalar descrito pela equação diferencial

$$\dot{x} = x + u$$

em que x e u são funções escalares do tempo, sendo x o estado (que se admite acessível para medida) e u a variável manipulada. Pretende-se que x “siga” a referência constante r, pelo que a variável manipulada é escolhida por forma a minimizar

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(e^2(t) + u^2(t)\right) dt$$

em que $e(t) = r - x(t)$ é o erro de seguimento.

Pretende-se: Por aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin, obtenha uma lei de controlo por realimentação por forma a minimizar J. Assuma que, em cada instante de tempo t, o estado $x(t)$ e o co-estado $\lambda(t)$ estão relacionados por

$$\lambda(t) = -p\,x(t) + g$$

em que p e g são constantes que deve determinar.

Alternativa: Em alternativa ao problema acima, pode resolver o seguinte problema, que **tem apenas 1 valor de cotação**. Se resolver a alternativa deverá indicá-lo no início da sua resolução. Se resolver ambos os enunciados (original e alternativa), apenas será considerado o enunciado alternativo. O enunciado alternativo é

Por aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin, obtenha uma lei de controlo por realimentação por forma a minimizar

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^2(t) + u^2(t)\right)dt$$

Assuma que, em cada instante de tempo t, o estado $x(t)$ e o co-estado $\lambda(t)$ estão relacionados por

$$\lambda(t) = -p\,x(t)$$

em que p é uma constante que deve determinar.

Ajudas úteis: As informações seguintes são úteis para resolver este problema.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x)\Big|_{x=x(T)}$$

$$H(\lambda,x,u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

P6. Considere o modelo de estado descrito pelas equações

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu$$
$$y = Cx$$

em que o par (A, C) é observável. Seja

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n+1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n$$

o polinómio característico da matriz A.

Deduza o correspondente à fórmula de Bass-Gura para o dimensionamento dos ganhos de um observador assimptótico que coloque os valores próprios da matriz da dinâmica do erro nas raízes de um polinómio especificado

$$\alpha(s) = s^n + \alpha_1 s^{n+1} + \alpha_2 s^{n-2} + \ldots + \alpha_n$$

Ajudas: A transformação de coordenadas que leva o modelo de estado genérico nas coordenadas x à forma canónica do observador é

$$x_o = Tx$$

em que x_o é o vector de estado na forma canónica do observador e

$$T = MO(A,C)$$

sendo $O(A,C)$ a matrz de observabilidade associada ao par (A,C) e

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

em que os a_i são os coeficientes do polinómio característico do sistema em cadeia aberta. A forma canónica do observador de uma função de transferência

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_n}$$

é tal como se mostra na figura P6-1.

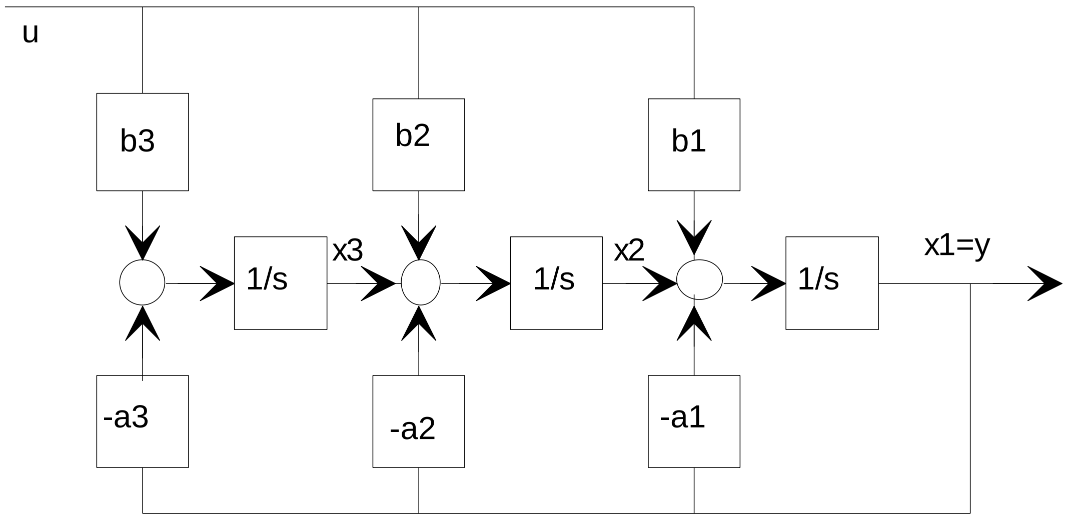

Fig. P6-1 – Problema P6. Realização de estado na forma canónica do observador.