Cálculo Diferencial e Integral I

Exame, 1º Teste, 2º Teste -28 de janeiro de 2020 - 8:00h-Versão A

MEMec, LENO

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I (6 val./3 val.) 1ºTeste/Exame

1. Determine em $\overline{\mathbb{R}}$, se existirem, os limites das sucessões

$$x_n = \frac{n\sqrt{n^2+n}}{n^2+\sqrt{(n+1)(n^3+n)}}\,, \qquad y_n = \frac{(2n)!2^n\, n^n}{(3n)!}\,.$$

2. Considere a sucessão u_n definida por:

$$0 < u_1 < 1, \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{3+u_n}\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Mostre por indução matemática que $0 < u_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$.

ii) Verifique que a sucessão u_n é contrativa.

iii) A sucessão u_n é convergente? Justifique. Determine, caso exista, o limite da sucessão u_n .

II (14 val./7 val.) 1ºTeste/Exame

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + e^{-1-x^2}\,, & \text{se } x \leq 0; \\ \ln|\operatorname{sh} x|\,, & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

i) A função f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

ii) Defina a função derivada de f.

iii) Analise a monotonia de f e conclua se em $\mathbb{R}^-$ a função f tem pontos de inflexão.

iv) Justifique a existência da função inversa de f quando restrita a $\mathbb{R}^+$. Determine a derivada da função inversa de f em $f(\ln 2)$.

2. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites seguintes:

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2 - x^2}{\ln(1+x^3)}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\ln(\cos x)}}\,.$$

3. Seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável em $]a,b[$. Se $g(a)$ e $g(b)$ têm sinais diferentes e $g'(x) \neq 0$ para $x \in]a,b[$, mostre que a equação

$$g(x) = 0$$

tem uma única solução $x_1 \in]a,b[$.

4. Recorrendo ao teorema de Lagrange em $[m, m+1]$, $m \in \mathbb{N}$, conclua que

$$\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}\,.$$

III (11 val./5,5 val.) 2ºTeste/Exame

1. Determine o valor dos integrais

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\,, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{8}{(x+2)(4+x^2)}\,dx\,.$$

2. Determine a área da região plana limitada pelos gráficos das funções

$$y = 2 - x\,, \qquad y = x^2 + 3x + 2$$

3. Considere a função $G : [-2,2] \to \mathbb{R}$

$$G(x) = \int_0^x 3x\sqrt{4-t^2}\,dt$$

i) Mostre que G é diferenciável em $]-2,2[$ e determine $G'(x)$.

ii) Determine $G(1)$, usando a mudança de variável $t = 2\operatorname{sen} u$.

4. Seja a função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que existem em $[a,b]$ as funções h', h'',...,$h^{(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$ e $h^{(n-1)}$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Mostre que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\int_a^b h(x)\,dx = h(a)(b-a) + \ldots + \frac{h^{(n-1)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{h^{(n)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\,.$$

IV (9 val./4,5 val.) 2ºTeste/Exame

1. Analise a natureza das seguintes séries numéricas:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{3^{n+1}}\,, \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!n^n}\,, \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1}}.$$

2. Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+2)!}\right)(x+1)^{n+3}\,.$$

i) Indique o domínio de convergência da série.

ii) Determine a soma da série em $x = 0$ recorrendo à sua sucessão das somas parciais.

3. Considere a função $s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$s(x) = e^{x+1} + \frac{x}{x+2}\,,$$

Defina a função s por uma série de Taylor em potências de $x-1$ num intervalo de $\mathbb{R}^+$, justificando a escolha desse intervalo.

4. Sendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica de termos não negativos divergente mostre que é também divergente a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$