Cálculo Diferencial e Integral I

2ºteste - MEMec, LENO - versão A

6 de janeiro de 2020 - 9 horas

I (10 val.)

1. Determine o valor dos integrais:

$$\text{i)} \quad \int_0^1 x^3 e^{x^2}\, dx \,, \qquad\qquad \text{ii)} \quad \int_0^1 \frac{x}{(x+2)^2(x+1)}\, dx$$

Resolução.

(i) Integrando por partes,

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}.2xe^{x^2}\, dx = \left[\frac{x^2 e^{x^2}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 xe^{x^2}\, dx = \frac{e}{2} - \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

(ii)

A função integranda é uma função racional própria que se decompõe em fracções simples, obtendo-se:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+2)^2(x+1)}\, dx = \int_0^1 \frac{A_1}{(x+2)^2}\, dx + \int_0^1 \frac{A_2}{x+2}\, dx + \int_0^1 \frac{B}{x+1}\, dx$$

A determinação das constantes A_1, A_2, B é feita pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$x = A_1(x+1) + A_2(x+2)(x+1) + B(x+2)^2\,, \quad \text{ou seja} \quad 0x^2 + x + 0 = (A_2+B)x^2 + (A_1+3A_2+4B)x + A_1 + 2A_2 + 4B\,.$$

Assim com $A_1 = 2$, $A_2 = 1$ e $B = -1$, tem-se

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+2)^2(x+1)}\, dx = \left[-\frac{2}{x+2}\right]_0^1 + [\ln(x+2)]_0^1 - [\ln(x+1)]_0^1 = \frac{1}{3} + \ln\left(\frac{3}{4}\right)\,,$$

▪

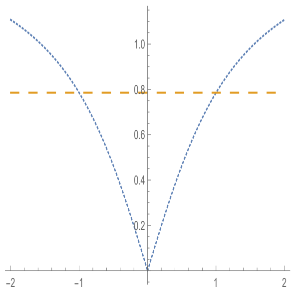
2. Designando por A a região limitada pelas linhas de equação

$$y = |\operatorname{arctg} x| \quad \text{e} \quad y = \frac{\pi}{4}\,,$$

esboce graficamente a região A e calcule a área de A.

Resolução.

A figura seguinte descreve a fronteira da região em questão



Se $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} x$ tem-se $x = 1$ e se $\frac{\pi}{4} = -\operatorname{arctg} x$ tem-se $x = -1$, obtendo-se para a área da região plana

$$A = \int_{-1}^{0} \left(\frac{\pi}{4} - (-\operatorname{arctg} x)\right)\, dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{\pi}{4} - (\operatorname{arctg} x)\right)\, dx = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{\pi}{4} - (\operatorname{arctg} x)\right)\, dx\,,$$

uma vez que

$$\int_{-1}^{0} \left(\frac{\pi}{4} - (-\operatorname{arctg} x)\right)\, dx = -\int_{1}^{0} \left(\frac{\pi}{4} + (\operatorname{arctg}(-u))\right)\, du\,.$$

Ora primitivando por partes $P(\operatorname{arctg} x) = x \operatorname{arctg} x - P(\frac{x}{1+x^2}) = x \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ vindo

$$\int_{0}^{1} \left(\frac{\pi}{4} - (\operatorname{arctg} x)\right)\, dx = \left[\frac{\pi}{4}x - (x \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2})\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}\,.$$

Em conclusão $A = \ln 2$.

▪

3. Seja a função

$$F(x) = \int_0^{2x} \frac{1}{4+t+2\sqrt{2+t}}dt\,, \qquad x \in]-1/2, +\infty[\,.$$

i) Determine, usando a mudança de variável $\sqrt{2+t} = u$, o valor de F em $x = 1$.

ii) Escreva o polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x - 1$ associado à função F.

Resolução.

i) $F(1) = \displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{4+t+2\sqrt{2+t}}dt$.
Integrando por substituição, usando a mudança de variável, $\sqrt{2+t} = u$, tem-se $t = u^2 - 1 = \varphi(u)$, $\varphi'(u) = 2u$ e

$$\int_0^{2} \frac{1}{4+t+2\sqrt{2+t}}dt = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{2u}{2+u^2+2u}\, du = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{2u+2}{2+u^2+2u}\, du - \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{2}{1+(u+1)^2}\, du =$$

$$= \left[\ln|2+u^2+2u|\right]_{\sqrt{2}}^{2} - \left[2\operatorname{arctg}(u+1)\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \ln(10) - \ln(2(2+\sqrt{2})) - 2\operatorname{arctg}(3) + 2\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2})$$

ii) O polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x - 1$ associado à função F é:

$$P_2(x) = F(1) + F'(1)(x-1) - F''(1)\frac{(x-1)^2}{2!}$$

Quanto aos coeficientes:
Usando o resultado da alínea anterior, $F(1) = \ln\frac{5}{2+\sqrt{2}} - 2(\operatorname{arctg}(3) - \operatorname{arctg}(1+\sqrt{2}))$.
Como $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \frac{1}{4+t+2\sqrt{2+t}}dt$, $\quad x \in]-1/2, +\infty[$, F é diferenciável, resultando da composição de funções diferenciáveis, e

$$F'(x) = \frac{2}{4+2x+2\sqrt{2+2x}}\,,$$

$$F''(x) = \frac{-2\left(4+2x+2\sqrt{2+2x}\right)'}{(4+2x+2\sqrt{2+2x})^2} = \frac{-4\left(1+\frac{1}{\sqrt{2+2x}}\right)}{(4+2x+2\sqrt{2+2x})^2}\,.$$

Vindo $F'(1) = \frac{1}{5}$, $F''(1) = -\frac{3}{50}$

▪

II (10 val.)

1. Analise a natureza de cada uma das séries seguintes e indique a soma de uma delas

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} \quad , \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} \quad , \quad \text{iii)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)^{1/3}}{n^2(n+2)^{1/2}}\,.$$

Resolução.

i) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão $R = \frac{2}{3} < 1$ e cuja soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2\,.$$

ii) Considere-se $a_n = \dfrac{(n+1)^2}{2^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+2/n}{1+1/n}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

vem do critério de D'Alembert que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}$ é convergente.

iii) A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)^{1/3}}{n^2(n+2)^{1/2}}$ é convergente pelo critério de comparação, uma vez que, considerando as sucessões $a_n = \dfrac{(n+1)^{1/3}}{n^2(n+2)^{1/2}}$ e $b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{13}{6}}}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in \mathbb{R}^+\,,$$

sendo ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergentes, pois a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = \frac{13}{6} > 1$.

▪

2. Considere a série de potências que tem por soma a função $\operatorname{sen} x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}\,.$$

i) Indique, justificando, o domínio de convergência da série indicada.

ii) Escreva a série de potências de x associado à função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_1^{e^{x^2}} \frac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t} dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Resolução.

i) Determinemos o raio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$. Sendo $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$,

$$r_1 = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \lim(2n+3)(2n+2) = +\infty\,.$$

A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

ii) Considere-se $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$G(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t} dt\ , \qquad x \in \mathbb{R}_+\,.$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo Integral, uma vez que $\dfrac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t} \in C(\mathbb{R}_+)$, G é uma função diferenciável em $\mathbb{R}_+$, e sendo

$$g(x) = G\left(e^{x^2}\right) = \int_1^{e^{x^2}} \frac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t} dt\ , \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

composição de funções diferenciáveis, g é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$,

$$g'(x) = \left(Ge^{x^2}\right)' = (e^{x^2})'\, G'(e^{x^2}) = 2xe^{x^2}\,.\,\frac{\operatorname{sen}(\ln e^{x^2})}{e^{x^2}} \;=\; 2x\operatorname{sen}(x^2) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{4n+3}\,,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n\, x^{4n+4}}{(2n+1)!(4n+4)} + C$$

Como $g(0) = 0$ vem que $C = 0\,$,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\, x^{4(n+1)}\,.$$

▪

3. Seja a função $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{1}{x-3} + \ln|1+x|$$

i) Determine o desenvolvimento em série de Taylor em potências de x da função derivada de h indicando o intervalo de convergência dessa série.

ii) Sendo para $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

Mostre que a série de Taylor de $L :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $L(x) = \ln(1+x)$ converge para a função L.
Sugestão: Analise separadamente $x \in]0,1[$ *e* $x \in]-1,0[$

Resolução.

i)

$$h'(x) = \left(\frac{1}{x-3}\right)' + \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x)^n$$

A série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x)^n$ converge absolutamente se $|x|<1$, i.e $-1<x<1$.

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^n$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ converge absolutamente se $|\frac{x}{3}|<1$, i.e $-3<x<3$.

A série $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\right)'=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}$ também converge absolutamente em $-3<x<3$.

Como a soma de séries convergentes é convergente, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}-n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}+(-1)^n\right)x^n\,,$$

converge para $x\in]-1,1[$.
Assim para $x\in]-1,1[$

$$h'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}+(-1)^n\right)x^n\,.$$

ii) Se

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt=\;0$$

a série de Taylor de L converge para a função L.
Para $x\in]0,1[$, tem-se

$$\left|\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt\right|\le\int_0^x t^n dt=\frac{x^{n+1}}{1+n}\longrightarrow_{n\to+\infty}\;0$$

Para $x\in]-1,0[$, tem-se

$$\left|\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt\right|=\left|\int_0^{-x}\frac{(-1)^{n+1}u^n}{1-u}du\right|\le\int_0^{-x}\frac{u^n}{1+x}du=\frac{1}{1+x}\frac{(-x)^{n+1}}{1+n}\longrightarrow_{n\to+\infty}\;0\,.$$

A série de Taylor de L converge para a função L.

■