

Physics of Continuous Media — Test I

Fall semester 2019

- This exam consists of 5 questions.
- Make every exercise on a separate sheet.
- On every sheet, clearly state: number of the exercise, your name, your student number.
- Use blue or black ink. No pencil.

Física dos Meios Contínuos — Teste I

1º Semestre 2019

- Este exame consiste em 5 questões.
- Faça todos os exercícios numa folha separada.
- Em todas as folhas indique claramente: o número do exercício, o seu nome e o seu número de aluno.
- Use caneta de tinta azul ou preta. Não use lápis.

1 Concepts / Conceitos

[EN]

a) Show that the boundary conditions of the stress tensor, \mathbf{T} , are such that $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ is continuous function across any surface Σ , where \mathbf{n} is the normal vector to the surface. [Hint: integrate $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ on a volume surrounding Σ .]

[PT]

a) Mostre que as condições fronteira do tensor das tensões, \mathbf{T} , são tais que $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ é uma função contínua em qualquer superfície Σ , onde \mathbf{n} é o vector normal à superfície. [Sugestão: integre $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ num volume que contenha a superfície Σ .]

2 Relation between strain and tension / Relação entre tensores do deslocamento e das tensões

[EN]

A body made from isotropic elastic material is subjected to a body force $\mathbf{f} = kxy\mathbf{e}_z$, where k is a constant, has a displacement field

$$\begin{aligned}\xi_x &= Ax^2yz, \\ \xi_y &= Bxy^2z, \\ \xi_z &= Cxyz^2.\end{aligned}$$

- a) Compute the strain tensor \mathbf{S} , the expansion coefficient Θ and the shear tensor $\mathbf{\Sigma}$
- d) Determine the stress tensor \mathbf{T}
- e) State the conditions on the values of A , B , and C such that the stress tensor corresponds to an equilibrium state. [Note that you are not required to solve these equations.]

[PT]

Um corpo de um material elástico e isotrópico, submetido a uma força de volume $\mathbf{f} = kxy\mathbf{e}_z$, onde k é uma constante, tem o seguinte vector de deslocamentos

$$\begin{aligned}\xi_x &= Ax^2yz, \\ \xi_y &= Bxy^2z, \\ \xi_z &= Cxyz^2.\end{aligned}$$

- a) Calcule o tensor dos deslocamentos \mathbf{S} , coeficiente de expansão Θ e o tensor de cisalhamento $\mathbf{\Sigma}$.
- d) Determine o tensor das tensões \mathbf{T}
- e) Indique as condições impostas a A , B , e C , tais que o tensor das tensões corresponda a um estado de equilíbrio. [Note que não lhe é pedido que resolva estas equações explicitamente.]

3 Elastostatic Problem / Problema Elastoestático

[EN]

Consider the uniform settling of an isotropic elastic material subjected to a constant gravitational acceleration $\mathbf{g} = -|g|\mathbf{e}_z$. Assume uniform conditions along the $x - y$ plane. The material is placed on a box with infinitely slippery walls, such that no force is realized tangential to the walls. In this way, displacement can only happen along the z direction, i.e.

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_z \mathbf{e}_z.$$

At the bottom, $z = 0$, the material is bounded by an supporting surface that does not allow any displacement. The top the material is left free to move under an applied pressure P . For $P = 0$ and in the absence of gravity the top the material reaches a hight of $z = h$.

a) Compute the strain tensor \mathbf{S} , the expansion coefficient Θ , the shear tensor $\boldsymbol{\Sigma}$ and the stress tensor \mathbf{T} as a function of ξ_z .

b) Show that the Navier-Cauchy equation reduces to

$$\partial_z^2 \xi_z = \left(K + \frac{4\mu}{3} \right)^{-1} \rho |g|$$

c) State the boundary conditions on ξ_z .

d) Determine ξ_z and sketch it as a function of z .

e) Determine the height of the deformed body.

[PT]

Considere o deslocamento uniforme de um material elástico e isotrópico sob acção da gravidade $\mathbf{g} = -|g|\mathbf{e}_z$. Assuma condições uniformes no plano $x - y$. O material é colocado numa caixa com paredes infinitamente escorregadias, tal que nenhuma força é realizada tangencialmente às paredes. Deste modo, o deslocamento pode acontecer sómente da direcção z , isto é

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_z \mathbf{e}_z.$$

No fundo da caixa, $z = 0$, o material está limitado por uma superfície que não permite deslocamento. No topo da caixa o material é livre de se deslocar sub uma pressão aplicada P . Para $P = 0$ e na ausência de gravidade o topo do material atinge uma altura h .

a) Calcule o tensor dos deslocamentos \mathbf{S} , o coeficiente de expansão Θ , o tensor de cisalhamento $\boldsymbol{\Sigma}$ e o tensor das tensões \mathbf{T} em função de ξ_z .

b) Mostre que a equação de Navier-Cauchy equation se reduz a

$$\partial_z^2 \xi_z = \left(K + \frac{4\mu}{3} \right)^{-1} \rho |g|$$

c) Indique as condições fronteira de ξ_z .

d) Determine ξ_z e desenhe esquematicamente esta quantidade em função de z .

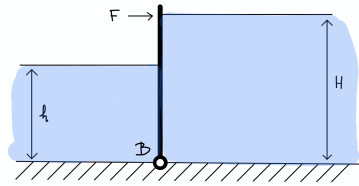
e) Determine a altura do corpo deformado.

4 Fluids under gravity / Flúidos num campo gravítico

[EN]

A vertical lock gate in the figure is $L_y = 4\text{m}$ wide into the paper and separates water levels of $h = 2\text{m}$ and $H = 3\text{m}$, respectively. Consider $\gamma_{\text{water}} = \rho |g| = 9790\text{N/m}^3$.

- Compute the force per unit area applied to the gate as a function of the height.
- Determine the momentum of the force with respect to B .
- Determine the force F applied at height H that is required to keep the gate stationary.



[PT]

A superfície vertical da figura tem $L_y = 4\text{m}$ de largura na direção perpendicular ao papel e separa dois reservatórios de água de níveis $h = 2\text{m}$ and $H = 3\text{m}$, respectivamente. Considere $\gamma_{\text{water}} = \rho |g| = 9790\text{N/m}^3$.

- Calcule a força por unidade de área aplicada à superfície em função da altura.
- Determine o momento da força com respeito ao eixo B .
- Determine a força F aplicada a uma altura H que é necessária para manter o sistema estacionário.

5 Stability of Floating Bodies / Estabilidade de Corpos Flutuantes

[EN]

Consider a block of length L , height H , length W and density ρ_1 floating vertically on a fluid of density ρ_0 .

- (a) Determine the volume of the displaced fluid V' .
- (b) Determine the buoyancy center.
- (c) Determine the metacenters with respect to the two horizontal directions.
- (d) Determine the stability conditions.

[PT]

Considere um bloco de comprimento L , altura H , largura W e densidade ρ_1 flutuando verticalmente num fluido de densidade ρ_0 .

- (a) Determine o volume de fluido deslocado V' .
- (b) Determine o centro de flutuabilidade.
- (c) Determine os meta-centros com respeito às duas direcções horizontais.
- (d) Determine as condições de estabilidade.