Physics of Continuous Media — Test II & Exam I

Fall semester 2019

• Test II: The test consists of questions 5 to 7 and has a duration of 90 min.You may bring one A4 handwritten sheet of paper with information you consider useful.
• Exam I: The exam consists of questions 1 to 7 and has duration of 180 min. You may bring two A4 handwritten sheets of paper with information you consider useful.

• Make every exercise on a separate page and clearly state number of the exercise.
• On every sheet of paper you use, clearly state your name, your student number.
• Use blue or black ink. No pencil.
• This evaluation is an individual exercise. Communication with other students and/or use of unauthorized resources will lead to disqualification.

Física dos Meios Contínuos — 2º Teste e 1ºExame

1º Semestre 2019

• 2º Teste: O teste consiste nas questões 5 a 7 e tem a duração de 90 min. É permitida a consulta de uma folha A4 manuscrita com a informação que considerar útil.
• 1º Exame: O exame consiste nas questões 1 a 7 e tem a duração de 180 min. É permitida a consulta de duas folhas A4 manuscritas com a informação que considerar útil.

• Faça todos os exercícios numa página separada e indique claramente o número do exercíco.
• Em todas as folhas indique claramente o seu nome e o seu número de aluno.
• Use caneta de tinta azul ou preta. Não use lápis.
• Esta avaliação é um exercício individual. Comunicação com outros alunos e/ou consulta de documentos não autorizados resultará na anulação da prova.

1 .

[EN]

(a) From the equilibrium condition $\boldsymbol{f}^{(\mathrm{e})} + \boldsymbol{f} = 0$, where $\boldsymbol{f}^{(\mathrm{e})}$ is the elastic force per unit volume and $\boldsymbol{f}$ is an external body force, derive the Navier-Cauchy equation for a isotropic elastic medium

$$\boldsymbol{f} + (\lambda + \mu)\, \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\xi}\right) + \mu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} = 0$$

where $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$.

[PT]

(a) A partir da condição de equilíbrio $\boldsymbol{f}^{(\mathrm{e})} + \boldsymbol{f} = 0$, onde $\boldsymbol{f}^{(\mathrm{e})}$ é a força elástica por unidade de volume e $\boldsymbol{f}$ é a força externa aplicada no interior do corpo por unidade de volume, derive a equação de Navier-Cauchy para um meio isotrópico

$$\boldsymbol{f} + (\lambda + \mu)\, \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\xi}\right) + \mu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} = 0$$

onde $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$.

2 .

[EN]

Consider a straight beam with the axe along the x-direction. Shear forces in the positive y-direction are applied to the end surfaces of the beam and as a result, it bends. The other sides are free. One can then show that the displacement vector is given by

$$\begin{aligned}
\xi_x &= -\frac{1}{R}xy \\
\xi_y &= \frac{1}{2R}x^2 + \frac{\nu}{2R}\left(y^2 - z^2\right) \\
\xi_z &= \frac{\nu}{R}yz
\end{aligned}$$

where R is a constant.

(a) Compute the strain tensor **S**, the expansion coefficient Θ and the shear tensor $\boldsymbol{\Sigma}$.

(b) Determine the stress tensor **T** assuming the beam is made of an isotropic material.

(c) Determine the body force vector $\boldsymbol{f}$ per unit volume. Assume $\nu = \frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$ is the Poisson ratio. Is the result you obtained compatible with the statement of the problem?

[PT]

Considere um feixe com eixo ao longo da direcção x. Forças de cisalhamento na direcção y são aplicadas às superfícies do feixe e resultam numa deformação. As outra faces estão livres. Pode mostrar-se que o vector deslocamento desta deformação é dado por

$$\begin{aligned}
\xi_x &= -\frac{1}{R}xy \\
\xi_y &= \frac{1}{2R}x^2 + \frac{\nu}{2R}\left(y^2 - z^2\right) \\
\xi_z &= \frac{\nu}{R}yz
\end{aligned}$$

onde R é uma constante.

a) Calcule o tensor dos deslocamentos **S**, o coeficiente de expansão Θ, e o tensor de cisalhamento $\boldsymbol{\Sigma}$.

b) Determine o tensor das tensões **T** assumindo que o feixe é feito de um material isotrópico.

c) Determine a força por unidade de volume, $\boldsymbol{f}$, no interior do corpo. Assuma que $\nu = \frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$ é o racio de Poisson. Este resultado é compatível com o enunciado do problema?

3 .

[EN]

Consider a ball made of an isotropic elastic material with inner radius R_1 and outer radius R_2. Inside the ball a fluid is held at pressure P. The outside pressure is assumed to be negligible as well as the role of gravity. Due to the pressure force the ball gets deformed. The problem simplifies considerably assuming that, by symmetry, displacement is only along the radial direction

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_r(r)\,\mathbf{e}_r.$$

(a) Compute the strain tensor $\mathbf{S}$ and the expansion coefficient Θ as a function of ξ_r, and show that $\boldsymbol{\Sigma} = \frac{2X}{3}\left[\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi\right)\right]$, where $X(r) = \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r}{r}\right)$ is a function of r only.

(b) Show that the stress tensor is given by $\mathbf{T} = -K\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2\frac{\xi_r}{r}\right) - \frac{4X}{3}\mu\left[\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi\right)\right]$ and, based in this expression, explain why we can be simplify $\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{T} = \left[\frac{\partial}{\partial r}(T_{rr}) + \frac{(2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi})}{r}\right]\mathbf{e}_r$.

(c) It can be shown that the elastostatic equilibrium condition, $\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{T} = 0$, reduces to

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \xi_r\right)\right] = 0.$$

Show that the general solution of this equation is

$$\xi_r = Ar + \frac{B}{r^2}.$$

(d) State the boundary conditions on ξ_r. You do not have to solve the equations.

(e) Compute the thickness of the ball's wall after deformation as a function of A and B.

Formulas For a vector $\boldsymbol{v}$ and a two-tensor $\mathbf{T}$ we have

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} v = &\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\mathbf{e}_\theta v_\theta + \mathbf{e}_\phi v_\phi}{r}\right) \otimes \mathbf{e}_r \\
&+ \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\mathbf{e}_\theta v_r}{r} - \frac{\mathbf{e}_\phi v_\phi \cot\theta}{r}\right) \otimes \mathbf{e}_\theta \\
&+ \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\mathbf{e}_\phi v_r}{r} + \frac{\mathbf{e}_\phi v_\theta \cot\theta}{r}\right) \otimes \mathbf{e}_\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{T} = &\left[\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + 2\frac{T_{rr}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\cot\theta}{r}T_{r\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\left(T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}\right)\right]\mathbf{e}_r \\
&+ \left[\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + 2\frac{T_{\theta r}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\cot\theta}{r}T_{\theta\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\theta}}{r} - \frac{\cot\theta}{r}T_{\phi\phi}\right]\mathbf{e}_\theta \\
&+ \left[\frac{\partial T_{\phi r}}{\partial r} + 2\frac{T_{\phi r}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\phi}}{r} + \frac{\cot\theta}{r}\left(T_{\theta\phi} + T_{\phi\theta}\right)\right]\mathbf{e}_\phi,
\end{aligned}$$

[PT]

Considere uma bola feita de um material elástico isotrópico com um raio interno R_1 e um raio externo R_2. No interior da bola um fluído é mantido a uma pressão P. A pressão exterior é negligenciável assim como a gravidade. Devido às forças de pressão a bola sofre uma deformação. O problema simplifica-se consideravelmente assumindo que, por simetria, o deslocamento é apenas radial

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_r\left(r\right)\mathbf{e}_r.$$

(a) Calcule o tensor dos deslocamentos $\mathbf{S}$, o coeficiente de expansão Θ em função de ξ_r, e mostre que o tensor de cisalhamento é dado por $\boldsymbol{\Sigma} = \frac{2X}{3}\left[\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi\right)\right]$, onde $X\left(r\right) = \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r}{r}\right)$ é uma função só de r.

(b) Mostre que o tensor das tensões é dado por $\mathbf{T} = -K\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2\frac{\xi_r}{r}\right) - \frac{4X}{3}\mu\left[\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi\right)\right]$ e, baseando-se nesta expressão, explique porque podemos simplificar a sua divergência obtendo $\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{T} = \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(T_{rr}\right) + \frac{\left(2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi}\right)}{r}\right]\mathbf{e}_r$.

(c) Pode mostrar-se que a condição de equilíbrio elastoestático, $\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{T} = 0$, se reduz a

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \xi_r\right)\right] = 0.$$

Mostre que a solução geral desta equação é

$$\xi_r = Ar + \frac{B}{r^2}.$$

(d) Indique as condições fronteira de ξ_r. Não tem de resolver as equações.

(e) Calcule a espessura das parades da bola depois da deformação em, função de A e B.

Fórmulas Para um vector $\boldsymbol{v}$ e um dois-tensor $\mathbf{T}$ temos que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} v = & \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\mathbf{e}_\theta v_\theta + \mathbf{e}_\phi v_\phi}{r}\right) \otimes \mathbf{e}_r \\
& + \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\mathbf{e}_\theta v_r}{r} - \frac{\mathbf{e}_\phi v_\phi \cot\theta}{r}\right) \otimes \mathbf{e}_\theta \\
& + \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\mathbf{e}_\phi v_r}{r} + \frac{\mathbf{e}_\phi v_\theta \cot\theta}{r}\right) \otimes \mathbf{e}_\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{T} = & \left[\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + 2\frac{T_{rr}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\cot\theta}{r}T_{r\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\left(T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}\right)\right]\mathbf{e}_r \\
& + \left[\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + 2\frac{T_{\theta r}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\cot\theta}{r}T_{\theta\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\theta}}{r} - \frac{\cot\theta}{r}T_{\phi\phi}\right]\mathbf{e}_\theta \\
& + \left[\frac{\partial T_{\phi r}}{\partial r} + 2\frac{T_{\phi r}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\phi}}{r} + \frac{\cot\theta}{r}\left(T_{\theta\phi} + T_{\phi\theta}\right)\right]\mathbf{e}_\phi,
\end{aligned}$$

4 .

[EN]

A cone of half opening angle α and height h is made from a homogeneous material of density ρ_1 and floats in a liquid of density $\rho_0 > \rho_1$ (see figure).

Hint: The volume of a cone of height h and radius b is given by $V_{\text{cone}} = \int_0^h dz \int_0^{R(z)} \varpi d\varpi \int_0^{2\pi} d\phi$, with $R(z) = b\frac{z}{h}$. This expression can be easily generalized to compute the center of gravity.

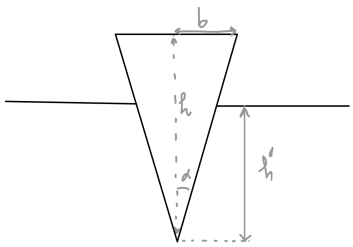
(a) Determine the volume of displaced liquid and the hight h' as a function of ρ_0/ρ_1, α e h.

(b) Compute the center of gravity, z_g.

(c) Compute buoyancy center, z_b.

(d) Compute metacenter, z_M.

(e) Determine the smallest opening angle α for which this configuration is stable.



[PT]

Um cone de ângulo α e altura h é feito de um material homogéneo de densidade ρ_1 e flutua num líquido de densidade $\rho_0 > \rho_1$ (ver figura).

Sugestão: O volume de um cone de altura h e raio b e dado por $V_{\text{cone}} = \int_0^h dz \int_0^{R(z)} \varpi d\varpi \int_0^{2\pi} d\phi$, em que $R(z) = b\frac{z}{h}$. Esta expressão pode ser generalizada de forma simples para obter o centro de gravidade.

(a) Determine o volume de líquido deslocado e a altura h' em função de ρ_0/ρ_1, α e h.

(b) Calcule, o centro de gravidade, z_g.

(c) Calcule, o centro de flutuabilidade, z_b.

(d) Calcule, o metacentro, z_M.

(e) Determine o mais pequeno valor do ângulo α que permite que a configuração seja estável.

5 .

[EN]

(a) State the conservation equations for mass and momentum for a fluid in the presence of a body force $\boldsymbol{f}$. Show that for $\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{g}$, where $\boldsymbol{g}$ is the acceleration due to gravity, and taking the stress tensor to be that of an ideal fluid, these conservation equations imply Euler's equation

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \boldsymbol{g}$$

where $\frac{d}{dt}$ is the material derivative.

(b) Show that Euler's equation can be written as

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} + \Phi\right) + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} = 0$$

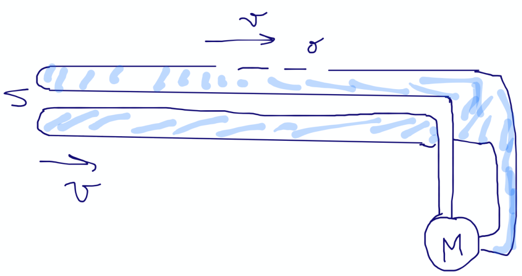
where $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$ is the gravity's acceleration, and $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$ is the vorticity. Hint: Use the identity $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}\right) - \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}$.

(c) For a steady flow of an ideal fluid the entropy per unit mass is conserved, i.e. $\frac{ds}{dt} = 0$. Show that this, together with the thermodynamic relation $du = Tds - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$, where u is the internal energy per unit mass, implies

$$\frac{d}{dt}B = 0$$

where $B = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} + \Phi + u + P/\rho$ is the Bernoulli function.

(d) For the Pitot tube in the figure the velocity vanishes at the stationary point S. Express the velocity v as a function of the pressure difference $\Delta P = P_S - P_O$ between points S and O, that is measured by the manometer M assuming Φ, u and ρ are the same in these two points.



[PT]

(a) Indique as equações de conservação de massa e momento na presença de uma força por unidade de área, $\boldsymbol{f}$, a actuar num fluído. Mostre que, para $\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{g}$, onde $\boldsymbol{g}$ é a aceleração gravítica, e assumindo a que o tensor das tensões é o de um fluído ideal, estas equações implicam a equação de Euler

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \boldsymbol{g}$$

em que $\frac{d}{dt}$ é a derivada material.

(b) Mostre que a equação de Euler pode ser escrita

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} + \Phi\right) + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} = 0$$

onde $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$ é a aceleração gravítica e $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$ a vorticidade. Sugestão: Use a identidade $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}$.

(c) Para um escoamento estacionário de um fluído ideal a entropia por unidade de massa é conservada, i.e. $\frac{ds}{dt} = 0$. Mostre que este facto em conjunto com a relação termodinâmica $du = Tds - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$, onde u é a energia interna por unidade de massa, implica

$$\frac{d}{dt}B = 0$$

onde $B = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} + \Phi + u + P/\rho$ e a função de Bernoulli.

(d) Para o tubo de Pitot na figura a velocidade anula-se no ponto de estacionariade S. Expresse a velocidade do fluido v em função da diferença de pressões $\Delta P = P_S - P_O$ entre os pontos S e O, que é medida pelo manómetro M, assumindo que Φ, u e ρ são iguais nesses dois pontos.

6 .

[EN]

Consider a planar steady flow of an incompressible and viscous fluid between infinitely extended parallel plates, driven by a pressure gradient (see figure). For simplicity we assume that there is no gravity.

(a) By symmetry considerations, show that the Navier-Stokes equations reduces to

$$\boldsymbol{\nabla} P = \eta \nabla^2 v_x(y)\,\mathbf{e}_x.$$

(b) Show that P can only be a function of x, i.e. $P = P(x)$.

(c) Show that the general solution of the Navier-Stokes equations is

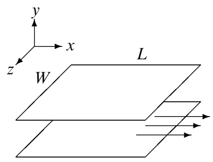
$$P = P_0 - Gx; \qquad v_x = -\frac{G}{2\eta}y^2 + Ay + B,$$

where P_0, G, A and B are constants.

(d) Assuming the plates are placed at $y = \pm a$, and that the pressure drop between the two extremities is $\Delta P = P(x=0) - P(x=L) > 0$, show that

$$P = P_0 - \frac{\Delta P}{L}x; \qquad v_x = \frac{\Delta P}{2L\eta}\left(a^2 - y^2\right).$$

(e) Compute the drag force acting on one of the plates.



[PT]

Considere um escoamento planar de um fluido incompressível e viscoso entre duas placas infinitas e paralelas derivado de um gradiente de pressão (ver figura). Assuma que não há gravidade.

(a) Por considerações de simetria, mostre que a equação de Navier-Stokes se pode reduzir a

$$\boldsymbol{\nabla} P = \eta \nabla^2 v_x(y)\,\mathbf{e}_x.$$

(b) Moste que P pode apenas ser uma função de x, i.e. $P = P(x)$.

(c) Mostre que a solução geral das equações de Navier-Stokes é dada por:

$$P = P_0 - Gx; \qquad v_x = -\frac{G}{2\eta}y^2 + Ay + B,$$

onde P_0, G, A e B são constantes.

(d) Assumindo que as placas estão situadas à cota $y = \pm a$, e que a diferença de pressão entre as duas extremidades é $\Delta P = P(x=0) - P(x=L) > 0$, mostre que

$$P = P_0 - \frac{\Delta P}{L}x; \qquad v_x = \frac{\Delta P}{2L\eta}\left(a^2 - y^2\right).$$

(e) Calcule a força de arrasto aplicada numa das placas.

7 .

[EN]

Consider two circular plates of radius a at a distance d (see figure), bathed in an incompressible oil of mass density ρ_0 and viscosity η. The right plate is rotating with constant angular velocity while the other is fixed.

(a) Find the condition for creeping (or viscous) flow between the plates. What limitation does this condition set on d?

(b) Show that the fields

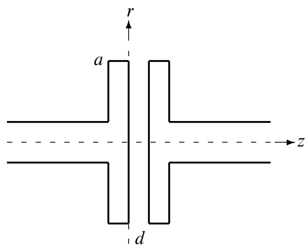
$$\boldsymbol{v} = (-y, x, 0)z\frac{\Omega}{d}; \qquad P = 0,$$

satisfy the Navier-Stokes equations for creeping flow in the gap as well as the boundary conditions on the plates.

(c) Calculate the stress tensor in the gap.

(d) Calculate the couple (turning moment of force) on the fixed plane.

(e) State the expression for the dissipated power deposited in the oil as a function of $\mathbf{T}$ and $\boldsymbol{v}$. You are not asked to compute it.



[PT]

Considere duas placas circulares de raio a a uma distância d (ver figura), imersas num óleo incompressíveis de densidade ρ_0 e viscosidade η. A placa da direita está a rodar com uma velocidade angular constante e a da esquerda está parada.

(a) Encontre a condição para que o escoamento entre as placas seja viscoso. Qual é a limitação que esta condição impõe a d?

(b) Mostre que os campos

$$\boldsymbol{v} = (-y, x, 0)z\frac{\Omega}{d}; \qquad P = 0,$$

satisfazem as equações de Navier-Stokes para um fluido viscoso no intervalo entre as placas assim como as condições fronteira nas placas.

(c) Calcule o tensor das tensões no intervalo.

(d) Calcule o momento da força aplicada à placa fixa.

(e) Indique a expressão para a potência dissipada que é depositada no óleo em função de $\mathbf{T}$ e $\boldsymbol{v}$. Não lhe é pedido que calcule esta quantidade.