DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

TODOS OS CURSOS

1º semestre – 2018/2019
30/01/2019 – **11:30**

Duração: 90 minutos **1º Teste C**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. Numa unidade fabril 10% das peças produzidas são defeituosas. Todas as peças produzidas são avaliadas por um inspetor. Este classifica como defeituosas 90% das peças efetivamente defeituosas e 20% das peças realmente não defeituosas.

(a) Qual é a probabilidade de uma peça escolhida ao acaso ser classificada como defeituosa pelo inspetor? (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
$D = \{$peça efetivamente defeituosa$\}$	$P(D) = 0.1$
$C = \{$peça classificada como defeituosa pelo inspetor$\}$	
	$P(C \mid D) = 0.90$
	$P(C \mid \overline{D}] = 0.20$

- **Probabilidade pedida**
  Pela lei da probabilidade total, temos

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \mid D) \times P(D) + P(C \mid \overline{D}) \times P(\overline{D}) \\ &= 0.90 \times 0.10 + 0.20 \times (1 - 0.10) \\ &= 0.27. \end{aligned}$$

(b) Sabendo que uma peça escolhida ao acaso foi classificada como defeituosa pelo inspetor, qual é a probabilidade de essa peça ser efetivamente defeituosa? (2.5)

- **Prob. pedida**
  Invocando o teorema de Bayes, segue-se

$$\begin{aligned} P(D \mid C) &= \frac{P(C \mid D) \times P(D)}{P(C)} \\ &\overset{(a)}{=} \frac{0.90 \times 0.10}{0.27} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. Uma fábrica possui duas linhas de montagem, A e B. Os números de avarias diárias nas linhas de montagem A e B são variáveis aleatórias independentes, com distribuição de Poisson e valores esperados iguais a 1.3 e 0.7 (respetivamente).

(a) Qual é a probabilidade de o número total de avarias diárias nas linhas de montagem A e B não exceder 2? (3.0)

- **V.a.**
  X_i = no. avarias diárias na linha de montagem i, $i = A, B$
- **Distribuição de** X_i, $i = A, B$
  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$
  onde $\lambda_A = 1.3$ e $\lambda_B = 0.7$.
  $X_A \perp\!\!\!\perp X_B$

- **Variável aleatória de interesse**
  $Y = X_A + X_B =$ no. total de avarias diárias nas linhas de montagem A e B

- **Distribuição exacta de** $Y = X_A + X_B$
  Y é a soma de duas v.a. independentes com distribuição de Poisson, logo Y possui também distribuição de Poisson:

  $$Y \sim \text{Poisson}(\lambda_A + \lambda_B),$$

  onde $\lambda_A + \lambda_B = 2$.

- **F.p. de** Y
  $P(Y = y) = [\frac{e^{-(\lambda_A+\lambda_B)}\,(\lambda_A+\lambda_B)^y}{y!} =]\,\frac{e^{-2}\,2^y}{y!}, \quad y = 0, 1, \ldots$

- **Prob. pedida**

  $$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-2}\,2^y}{y!} \\ &= F_{Poisson(2)}(2) \\ &\stackrel{tabela/calc.}{=} 0.6767. \end{aligned}$$

(b) Sabendo que num dado dia ocorreu uma única avaria no conjunto das linhas de montagem A e B, calcule a probabilidade de essa avaria ter ocorrido na linha de montagem A. (2.0)

- **Prob. pedida**

  $$\begin{aligned} P(X_A = 1 \mid X_A + X_B = 1) &= \frac{P(X_A = 1,\, X_A + X_B = 1)}{P(X_A + X_B = 1)} \\ &= \frac{P(X_A = 1,\, X_B = 0)}{P(X_A + X_B = 1)} \\ &\stackrel{X_A \perp\!\!\!\perp X_B}{=} \frac{P(X_A = 1) \times P(X_B = 0)}{P(X_A + X_B = 1)} \end{aligned}$$

- **F.p. de** X_i, $i = A, B$
  $P(X_i = x) = \frac{e^{-\lambda_i}\,\lambda_i^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots,$ onde $\lambda_A = 1.3$ e $\lambda_B = 0.7$.

- **F.p. de** Y
  $P(Y = y) = [\frac{e^{-(\lambda_A+\lambda_B)}\,(\lambda_A+\lambda_B)^y}{y!} =]\,\frac{e^{-2}\,2^y}{y!}, \quad y = 0, 1, \ldots$

- **Prob. pedida** (cont.)

  $$\begin{aligned} P(X_A = 1 \mid X_A + X_B = 1) &= \frac{P(X_A = 1) \times P(X_B = 0)}{P(X_A + X_B = 1)} \\ &= \frac{\frac{e^{-1.3}\,1.3^1}{1!} \times \frac{e^{-0.7}\,0.7^0}{0!}}{\frac{e^{-2}\,2^1}{1!}} \qquad [= \frac{\frac{e^{-\lambda_A}\,\lambda_A^1}{1!} \times \frac{e^{-\lambda_B}\,\lambda_B^0}{0!}}{\frac{e^{-(\lambda_A+\lambda_B)}\,(\lambda_A+\lambda_B)^1}{1!}}] \\ &= \frac{1.3}{2} \qquad [= \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}] \\ &= 0.65. \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. Considere que a variável aleatória X representa a velocidade média (em km/h) de veículos em circulação nas autoestradas portuguesas e admita que X possui distribuição normal com valor esperado e variância iguais a 135 e 100 (respetivamente).

(a) Calcule a probabilidade de um veículo circular a uma velocidade média superior a 150 km/h, sabendo que foi selecionado casualmente de entre os 50% de veículos com maior velocidade média de circulação nas autoestradas portuguesas. (2.5)

- **V.a. de interesse**
  X = velocidade média (em km/h) de veículos em circulação nas autoestradas portuguesas

- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$
  onde $\quad \mu = 135 \quad$ e $\quad \sigma^2 = 10^2$.

- **Prob. pedida**
  Ao representarmos a mediana da v.a. X por $me(X)$ e atendermos que $me(X) = \mu$ e $P(X \leq me(X)] = P(X \geq me(X)] = 0.5$, temos

$$\begin{aligned}
P[X > 150 \mid X > me(X)] &= P(X > 150 \mid X > \mu) \\
&= \frac{P(X > 150,\, X > \mu)}{P(X > \mu)} \\
&= \frac{P(X > 150)}{P(X > 135)} \\
&= \frac{1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \equiv \frac{X-135}{10} \leq \frac{150-135}{10}\right)}{1 - P(X \leq \mu)} \\
&= \frac{1 - \Phi(1.5)}{1 - 0.5} \\
&\overset{tabela/calc.}{=} \frac{1 - 0.9332}{0.5} \\
&= 0.1336.
\end{aligned}$$

(b) Admitindo que as velocidades médias de veículos distintos em circulação nas autoestradas portuguesas são variáveis independentes, calcule a probabilidade de o valor absoluto da diferença entre as velocidades médias de dois desses veículos exceder 20 km/h. (2.5)

- **V.a.**
  X_i = velocidade média (em km/h) do veículo i que circula nas autoestradas port., $\quad i = 1,2$

- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X, \quad i = 1,2$
  $E(X_i) = E(X) = \mu = 135, \quad i = 1,2$
  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = 10^2, \quad i = 1,2$

- **V.a. de interesse**
  $Y = X_1 - X_2$ = diferença entre as velocidades médias de dois desses veículos...

- **Distribuição exacta de $Y = X_1 - X_2$**
  Y é uma combinação linear de duas v.a. independentes com distribuição normal, logo Y possui também distribuição normal. Com efeito,

$$Y \sim \text{Normal}(E(Y), V(Y)),$$

  onde:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) \overset{X_i \sim X}{=} E(X) - E(X) = 0; \\
V(Y) &= V(X_1 - X_2) \overset{X_i\, indep.}{=} V(X_1) + V(X_2) \overset{X_i \sim X}{=} 2 \times V(X) = 200.
\end{aligned}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(|Y| > 20) &= P(Y < -20) + P(Y > 20) \\
&= P\left(\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \equiv \frac{Y-0}{\sqrt{200}} \leq \frac{-20-0}{\sqrt{200}}\right) + P\left(\frac{Y-0}{\sqrt{200}} \geq \frac{20-0}{\sqrt{200}}\right) \\
&= \Phi\left(-\frac{20}{\sqrt{200}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{200}}\right) \\
&= 2 \times \left[1 - \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{200}}\right)\right] \qquad [\overset{calc.}{=} 0.1573] \\
&\simeq 2 \times [1 - \Phi(1.41)] \\
&\overset{tabela}{=} 2 \times (1 - 0.9207)
\end{aligned}$$

$$P(|Y| > 20) \quad = \quad 0.1586.$$

[Alternativamente, poderíamos invocar a simetria da f.d.p. de Y e acrescentar que $P(|Y| > 20) = P(Y < -20) + P(Y > 20) = 2 \times P(Y > 20) = \ldots$.]

2. Considere que as variáveis aleatórias X e Y representam, respetivamente, o número de filhos e o número de assoalhadas do alojamento de uma família residente em determinada zona metropolitana. Admita que o par aleatório (X, Y) possui função de probabilidade conjunta:

	Y		
X	2	3	4
0	0.04	0.05	0.03
1	0.05	0.09	0.14
2	0.02	0.14	0.22
3	0	0.05	0.17

(a) Averigúe se X e Y são variáveis aleatórias dependentes. (1.5)

- **Par aleatório** (X, Y)
  X = número de filhos da família residente...
  Y = número de assoalhadas do respectivo alojamento
- **F.p. conjunta e f.p. marginais**
  $P(X = x, Y = y)$, $P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$ e $P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$ encontram-se sumariadas na tabela seguinte:

	Y			
X	2	3	4	$P(X = x)$
0	0.04	0.05	0.03	0.12
1	0.05	0.09	0.14	0.28
2	0.02	0.14	0.22	0.38
3	0	0.05	0.17	0.22
$P(Y = y)$	0.11	0.33	0.56	1

- **Dependência entre X e Y**
  X e Y são v.a. DEPENDENTES sse

  $$P(X = x, Y = y) \neq P(X = x) \times P(Y = y), \quad \text{para algum } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

  Ora, por um lado

  $$P(X = 0, Y = 2) = 0.04,$$

  por outro lado

  $$\begin{aligned} P(X = 0) \times P(Y = 2) &= 0.12 \times 0.11 \\ &= 0.0132. \end{aligned}$$

  Deste modo conclui-se que

  $$P(X = 0, Y = 2) \neq P(X = 0) \times P(Y = 2),$$

  pelo que X e Y são v.a. DEPENDENTES.
  [Alternativamente, poderia considerar-se $P(X = 3, Y = 2) = 0 \neq P(X = 3) \times P(Y = 2) > 0$.]

(b) Calcule a covariância entre X e Y, sabendo que $Var(X) = 0.89$, $Var(Y) = 0.4675$ e a correlação entre X e Y é aproximadamente igual a 0.364319. (1.0)

- **Covariância pedida**

$$
\begin{aligned}
corr(X,Y) &= \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}} \\
cov(X,Y) &= corr(X,Y)\times\sqrt{V(X)\times V(Y)} \\
&\simeq 0.364319\times\sqrt{0.89\times 0.4675} \\
&\simeq 0.235.
\end{aligned}
$$

(c) Obtenha a probabilidade de uma família selecionada casualmente dessa zona metropolitana ter mais de 1 filho. Reavalie a probabilidade do acontecimento anterior, sabendo que o número de assoalhadas do alojamento dessa família é superior a 2. (2.5)

- **F.p. de** X

$$
\begin{aligned}
P(X=x) &= \sum_{y=2}^{4} P(X=x,Y=y) \\
&\overset{(a)}{=} \begin{cases} 0.12, & x=0 \\ 0.28, & x=1 \\ 0.38, & x=2 \\ 0.22, & x=3 \\ 0, & \text{restantes valores de } x \end{cases}
\end{aligned}
$$

- **Prob. pedida**

$$
\begin{aligned}
P(X>1) &= P(X=2)+P(X=3) \\
&= 0.38+0.22 \\
&= 0.60
\end{aligned}
$$

- **F.p. de** Y

$$
\begin{aligned}
P(Y=y) &= \sum_{x=0}^{3} P(X=x,Y=y) \\
&\overset{(a)}{=} \begin{cases} 0.11, & y=2 \\ 0.33, & y=3 \\ 0.56, & y=4 \\ 0, & \text{restantes valores de } y \end{cases}
\end{aligned}
$$

- **F.p. de** $X \mid Y>2$

$$
\begin{aligned}
P(X=x\mid Y>2) &= \frac{P(X=x,Y>2)}{P(Y>2)} \\
&= \frac{P(X=x,Y=3)+P(X=x,Y=4)}{P(Y=3)+P(Y=4)} \\
&\overset{(a)}{=} \begin{cases} \frac{0.05+0.03}{0.33+0.56} = \frac{8}{89} \simeq 0.089888, & x=0 \\ \frac{0.09+0.14}{0.89} = \frac{23}{89} \simeq 0.258427, & x=1 \\ \frac{0.14+0.22}{0.89} = \frac{36}{89} \simeq 0.404494, & x=2 \\ \frac{0.05+0.17}{0.89} = \frac{22}{89} \simeq 0.247191, & x=3 \\ 0, & \text{restantes valores de } 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- **Prob. pedida** (cont.)

$$
\begin{aligned}
P(X>1\mid Y>2) &= P(X=2\mid Y>2)+P(X=3\mid Y>2) \\
&= \frac{36}{89}+\frac{22}{89} \\
&= \frac{58}{89} \\
&\simeq 0.651685.
\end{aligned}
$$

[Alternativamente, poderíamos não definir a f.p. de $X \mid Y>2$:

$$
P(X>1\mid Y>2) = \frac{P(X>1,Y>2)}{P(Y>2)}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X>1 \mid Y>2) &= \frac{P(X=2,Y=3)+P(X=2,Y=4)+P(X=3,Y=3)+P(X=3,Y=4)}{P(Y=3)+P(Y=4)} \\
&= \frac{0.14+0.22+0.05+0.17}{0.33+0.56} \\
&= \frac{0.58}{0.89} \\
&= \frac{58}{89} \\
&\simeq 0.651685.]
\end{aligned}
$$