

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2014/2015

1º Teste, versão B

(CURSOS: LEAN, LEGM, LMAC, MEB_{10M}, MEC, MEFT, MEMEC)

11 de Abril de 2015, 9h

Duração: 1h 30m

1. Considere a função complexa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z + iy) = 4x^2 - 2y + \beta y^2 + iv(x, y)$$

em que β é uma constante real e $v(x, y)$ uma função de classe C^2 em \mathbb{R}^2 .

- (1 val) (a) Calcule os valores de β para os quais a função $4x^2 - 2y + \beta y^2$ é harmónica em \mathbb{R}^2 .
(1 val) (b) Para $\beta = -4$, determine a função $v(x, y)$ de modo a que f seja analítica em \mathbb{C} e $f(1) = 4$.
(1 val) (c) Sendo f a função que determinou na alínea anterior, calcule

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z) - f(z)}{z - 1} dz$$

em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2015\}$ percorrida uma vez em sentido directo.

2. Considere a função $f(z) = \frac{z + 3}{2 - z}$.

- (1 val) (a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função f em torno de $z_0 = -3$, indicando a sua região de convergência.
(1 val) (b) Determine o desenvolvimento em série de Laurent da função f válido para $|z + 3| > 5$, e calcule

$$\oint_{|z+3|=7} \frac{f(z)}{(z+3)^5} dz$$

sendo a circunferência percorrida uma vez no sentido inverso.

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{\cos(z - 2i) - 1}{z - 2i} + \frac{\sinh(z + i)}{(z^2 + 4)^2} + (z + 2i) \cos\left(\frac{1}{z + 2i}\right).$$

- (1.5 val) a) Determine e classifique as singularidades de f , e calcule os respectivos resíduos.
(0.5 val) b) Calcule

$$\oint_{\gamma} f(z) dz,$$

onde $\gamma = \{z(t) = 2i + 5e^{it}, t \in [0, 4\pi]\}$, percorrida no sentido horário.

(2 val) 4. Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)} dx$.

(1 val) 5. Diga, justificando cuidadosamente, qual é o valor do seguinte integral:

$$\oint_{|z-2|=1} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^i dz.$$

em que a potência de expoente i se refere ao valor principal do logaritmo.