TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2014/2015

1º Teste, versão A

(Cursos: LEAN, LEGM, LMAC, MEBiom, MEC, MEFT, MEMec)

11 de Abril de 2015, 9h

Duração: 1h 30m

1. Considere a função complexa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x + \mathrm{i}y) = \alpha x^2 + 5y - 2y^2 + \mathrm{i}v(x, y)$$

em que α é uma constante real e $v(x, y)$ uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.

(1 val) (a) Calcule os valores de α para os quais a função $\alpha x^2 + 5y - 2y^2$ é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

(1 val) (b) Para $\alpha = 2$, determine a função $v(x, y)$ de modo a que f seja analítica em $\mathbb{C}$ e $f(1) = 2$.

(1 val) (c) Sendo f a função que determinou na alínea anterior, calcule

$$\oint_\gamma \frac{f(z) + f'(z)}{z - 1}\, dz$$

em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 2015\}$ percorrida uma vez em sentido directo.

2. Considere a função $f(z) = \dfrac{z - 3}{2 + z}$.

(1 val) (a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função f em torno de $z_0 = 3$, indicando a sua região de convergência.

(1 val) (b) Determine o desenvolvimento em série de Laurent da função f válido para $|z - 3| > 5$, e calcule

$$\oint_{|z-3|=7} \frac{f(z)}{(z - 3)^4}\, dz$$

sendo a circunferência percorrida uma vez no sentido inverso.

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{e^{z-\mathrm{i}} - 1}{z - \mathrm{i}} + \frac{\sinh(z + 2)}{(z^2 + 1)^2} + (z + \mathrm{i}) \cos\left(\frac{1}{z + \mathrm{i}}\right).$$

(1.5 val) a) Determine e classifique as singularidades de f, e calcule os respectivos resíduos.

(0.5 val) b) Calcule

$$\oint_\gamma f(z)\, dz,$$

onde $\gamma = \{z(t) = \mathrm{i} + 3e^{\mathrm{i}t},\ t \in [0, 4\pi]\}$, percorrida no sentido directo.

(2 val) 4. Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)(x^2 + 16)}\, dx.$

(1 val) 5. Diga, justificando cuidadosamente, qual é o valor do seguinte integral:

$$\oint_{|z-2|=1} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\mathrm{i}} dz\,.$$

em que a potência de expoente i se refere ao valor principal do logaritmo.