

O princípio dos trabalhos virtuais e a teoria das peças lineares

1 Introdução

O *princípio dos trabalhos virtuais* na sua forma mais simples surge como uma forma alternativa de escrever equações de equilíbrio. Por exemplo, nas disciplinas que estudam a *mecânica dos corpos rígidos*, mostrou-se que um sistema mecânico (entendido como uma estrutura hipostática constituída por um conjunto de barras rígidas) está em equilíbrio se for nulo o trabalho virtual total das forças aplicadas, para qualquer deslocamento virtual (e infinitesimal) compatível com as ligações.

Mas, de um modo mais geral, o princípio dos trabalhos virtuais, sendo deduzido a partir quer de equações de equilíbrio quer de equações de compatibilidade cinemática, pode ser utilizado como forma alternativa de escrever as equações de equilíbrio *ou* equações de compatibilidade cinemática. Por vezes, é feita a distinção entre *princípio dos deslocamentos virtuais* e *princípio das forças virtuais*, consoante o fim em mente, mas aqui não será feita tal distinção, preferindo a designação mais geral *princípio dos trabalhos virtuais* ou, simplesmente, PTV.

Aliás, a opção em classificar o PTV como *princípio* e não como *teorema*, como por vezes se faz, tem por objectivo reforçar a ideia de que entre (i) as equações de equilíbrio, (ii) as equações de compatibilidade cinemática e (iii) a equação do PTV, quaisquer dois itens podem ser tomados como fundamentais, sendo o terceiro item dedutível a partir deles.

No âmbito da *mecânica dos corpos deformáveis* em geral e da *resistência de materiais* em particular, o PTV é particularmente útil em três aplicações:

- (i) na formulação do *método dos elementos finitos*. Neste caso, a equação do PTV serve de base à forma fraca de equilíbrio que permite transformar um problema contínuo num problema discreto. O método dos elementos finitos é hoje a ferramenta por excelência da mecânica computacional, pois permite encontrar soluções aproximadas — cujo grau de precisão aumenta com o número de variáveis consideradas no problema discreto — para problemas muito complexos.
- (ii) no estabelecimento do *método da carga unitária*. Este método permite o cálculo de deslocamentos na análise linear de estruturas, recorrendo apenas a soluções equilibradas completadas com as apropriadas leis constitutivas. Embora possa ser formulado no contexto dos corpos contínuos em geral, é especialmente no contexto da teoria das peças lineares estudada na disciplina de Resistência de Materiais que o método da carga unitária adquire especial relevância.
- (iii) no cálculo da carga de colapso no âmbito da *análise limite de estruturas elastoplásticas*. Para um determinado mecanismo de colapso, a equação do PTV permite escrever *uma única equação de equilíbrio* relacionando a carga de colapso com os esforços das secções plastificadas que participam nesse mecanismo.

Estes apontamentos têm por principal objectivo a segunda das aplicações mencionadas, estando organizados da forma que em seguida se descreve. Na secção 2 relembram-se as equações da teoria da elasticidade e deduz-se a partir delas o princípio dos trabalhos virtuais para

um corpo contínuo, na secção 3 resumem-se as grandezas fundamentais da teoria das peças lineares e as principais equações que as regem, para, na secção 4, se obter a expressão do PTV adequada a uma estrutura constituída por peças lineares.¹ As secções seguintes constituem, de algum modo, aplicações dessa expressão do PTV: nas secções 5 e 6 formula-se e exemplifica-se o método da carga unitária para peças lineares, na secção 7 obtém-se a expressão da energia de deformação para peças lineares e finalmente, na secção 8, demonstram-se os teoremas de reciprocidade e descrevem-se as suas principais aplicações.

Em todos estes apontamentos, admitem-se sempre as hipóteses da linearidade física e geométrica. Sabe-se que, nessas condições, o problema da elasticidade tem solução única² e que, além disso, o comportamento do contínuo/barra/estrutura em consideração pode ser determinado através de uma análise linear, onde é sempre válido o princípio da sobreposição.

2 Contínuo

2.1 As equações da teoria da elasticidade

Considere-se um corpo elástico linear de volume V e superfície lateral S , a qual está dividida em duas partes designadas por S_u (onde são conhecidos os deslocamentos) e S_t (onde são conhecidas as tensões de fronteira) — ver figura 1. O corpo está solicitado por forças de massa \mathbf{X} e forças distribuídas (ou tensões) \mathbf{t} aplicadas na fronteira S_t . A normal exterior em cada ponto de S_t é designada por \mathbf{n} . Na fronteira S_u são impostos deslocamentos $\tilde{\mathbf{u}}$. Em muitos casos, S_u corresponde aos apoios do corpo, situação em que se terá simplesmente $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$.

O problema fundamental da teoria da elasticidade consiste em determinar o campo elástico, isto é, quais os campos de deslocamentos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ e de tensões $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ que satisfazem as seguintes equações:

No volume V:

$$\text{relações deformações deslocamentos:} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\text{relações constitutivas:} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$\text{equilíbrio no interior} \quad \sigma_{ij,i} + X_j = 0$$

Na fronteira:

$$\text{cinemática } (S_u): \quad u_i = \tilde{u}_i$$

$$\text{estática } (S_t): \quad \sigma_{ij} n_i = t_j$$

As constantes elásticas C_{ijkl} representam a proporcionalidade entre cada uma das componentes do tensor das tensões σ_{ij} e cada uma das componentes do tensor das deformações ε_{kl} . As relações constitutivas apresentadas constituem portanto a forma mais geral de uma lei elástica linear. No capítulo referente às relações constitutivas mostrou-se que, atendendo à simetria dos tensores das tensões e das deformações, se verificam as *pequenas simetrias*

$$C_{ijkl} = C_{jikl}$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

¹As secções 2 e 3 repetem matéria abordada em capítulos anteriores da Resistência de Materiais e servem fundamentalmente para recordar os conceitos e equações nos quais se alicerçam estes apontamentos e, ainda, estabelecer a notação aqui utilizada. Podem ser omitidos numa leitura mais apressada. A excepção é talvez a secção 3.5 onde se faz uma abordagem um pouco mais geral na definição das medidas de deformação ao nível da secção.

²Em rigor, é necessário também admitir que as condições de fronteira impedem os deslocamentos de corpo rígido e, ainda, que o material é estável, isto é, que apresenta constantes elásticas que tornam a energia de deformação sempre positiva.

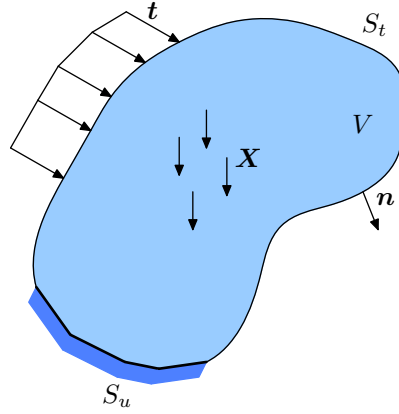


Figura 1: Corpo contínuo

e as constantes elásticas dependem de 36 parâmetros. Se o material for hiperelástico, isto é, for possível definir uma função (densidade) de energia de deformação $W(\varepsilon_{ij})$, a partir da qual se podem obter as tensões elásticas $\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$, verifica-se adicionalmente a grande simetria

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

Neste caso, as constantes elásticas dependem apenas de 21 parâmetros. Se, adicionalmente, se admitir que o material é isotrópico (comporta-se de igual modo em todas as direcções), é possível escrever as relações constitutivas apenas em função de dois parâmetros — o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν — e a lei constitutiva é expressa por uma das formas alternativas

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

2.2 O princípio dos trabalhos virtuais para um contínuo

O princípio dos trabalhos virtuais baseia-se na consideração de duas soluções distintas para o campo elástico: uma equilibrada e outra compatível. Na verdade, trata-se de duas soluções parciais, no sentido em que cada uma das soluções envolve apenas algumas das variáveis que constituem o campo elástico e satisfaz apenas algumas das equações.

Assim, a *solução equilibrada*, cujas variáveis são aqui referenciadas pela sobreposição de uma barra, envolve um campo de tensões $\bar{\sigma}$ em equilíbrio com as forças aplicadas \bar{X} e \bar{t} , isto é, verificam-se as equações de equilíbrio no domínio e na fronteira:

$$\text{equilíbrio no interior} \quad \bar{\sigma}_{ij,i} + \bar{X}_j = 0 \quad (1)$$

$$\text{equilíbrio na fronteira estática } (S_t): \quad \bar{\sigma}_{ij} n_i = \bar{t}_j \quad (2)$$

Em contrapartida, a *solução compatível*, cujas variáveis são aqui representadas sem a adição de qualquer sinal especial, envolve um campo de deformações ε gerado por um campo de deslocamentos u compatível com as ligações exteriores,³ isto é, verificam-se as equações de compatibilidade no domínio e na fronteira:

$$\text{relações deformações deslocamentos:} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

$$\text{compatibilidade na fronteira cinemática } (S_u): \quad u_i = 0 \quad (4)$$

³Por simplicidade, não se consideram aqui deslocamentos impostos.

A solução equilibrada é dita *estaticamente admissível* no sentido em que satisfaz todas as equações de equilíbrio, enquanto que a solução compatível é dita *cinematicamente admissível* já que cumpre todos os vínculos cimenmáticos (ligações ao exterior e a compatibilidade interior⁴).

Não existe necessariamente qualquer relação entre estas duas soluções para além de ambas se referirem ao mesmo corpo, podendo admitir-se que as duas soluções resultam da aplicação de diferentes sollicitações. Por esta razão, se prefere sobrepor uma barra a tudo o que diga respeito à solução equilibrada, de modo a que a distinção entre as soluções equilibrada e compatível seja evidente. Note-se ainda que tratando-se de soluções distintas, a relação constitutiva entre deformações e tensões é irrelevante, não desempenhando qualquer papel no princípio dos trabalhos virtuais.

Para deduzir a expressão do princípio dos trabalhos virtuais, comece-se por multiplicar a equação de equilíbrio no interior (1) pelo campo de deslocamentos u e integre-se em todo o volume

$$\int_V (\bar{\sigma}_{ij,i} + \bar{X}_j) u_j dV = 0$$

Aplicando o teorema da divergência (ver anexo) tem-se

$$\int_S \bar{\sigma}_{ij} u_j n_i dS - \int_V \bar{\sigma}_{ij} u_{j,i} dV + \int_V \bar{X}_j u_j dV = 0 \quad (5)$$

Nesta equação, o integral de superfície pode ser dividido pela fronteira estática e pela cinemática, procedimento que quando complementado com as equações (2) e (4)⁵ permite escrever

$$\int_S \bar{\sigma}_{ij} u_j n_i dS = \int_{S_u} \bar{\sigma}_{ij} n_i u_j dS + \int_{S_t} \bar{\sigma}_{ij} n_i u_j dS = \int_{S_t} \bar{t}_j u_j dS$$

Atente-se agora na função integranda, do segundo integral presente na equação (5). Sendo o tensor das tensões $\bar{\sigma}_{ij}$ simétrico, decompondo o gradiente das deformações $u_{j,i}$ nas suas parcelas simétrica e anti-simétrica, e tendo em conta que é nula a dupla contracção de um tensor simétrico com um anti-simétrico tem-se

$$\bar{\sigma}_{ij} u_{j,i} = \bar{\sigma}_{ij} (\varepsilon_{ji} + \omega_{ji}) = \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}$$

A equação (5) dá assim origem a

$$\int_V \bar{X}_j u_j dV + \int_{S_t} \bar{t}_j u_j dS - \int_V \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0$$

ou, posto de outro modo, o trabalho total produzido pelas forças exteriores e interiores do sistema equilibrado nos deslocamentos e deformações do sistema compatível é nulo:

$$W_{ext} + W_{int} = 0 \quad (6)$$

com

$$W_{ext} = \int_V \bar{X}_j u_j dV + \int_{S_t} \bar{t}_j u_j dS \quad (7)$$

$$W_{int} = - \int_V \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (8)$$

⁴A compatibilidade interior verifica-se sempre que exista um campo de deslocamentos contínuo. Sempre que, como aqui acontece, o campo de deformações é obtido por derivação do campo de deslocamentos (isto é, utilizando as relações deformações deslocamentos), esta compatibilidade está automaticamente satisfeita. Assim, as condições de integrabilidade do campo de deformações, frequentemente também designadas por equações de compatibilidade, não são aqui necessárias.

⁵Na presença de deslocamentos impostos não seria possível anular o integral em S_u . Quando o PTV é usado como equação de equilíbrio, como acontece no método dos elementos finitos, o sistema compatível consiste num campo de *deslocamentos virtuais* que corresponde a uma *variação* dos deslocamentos e, nesse caso, tem-se $\delta u_i = 0$ mesmo quando $\tilde{u}_i \neq 0$. Já o mesmo não pode ser invocado no estabelecimento do método da carga unitária.

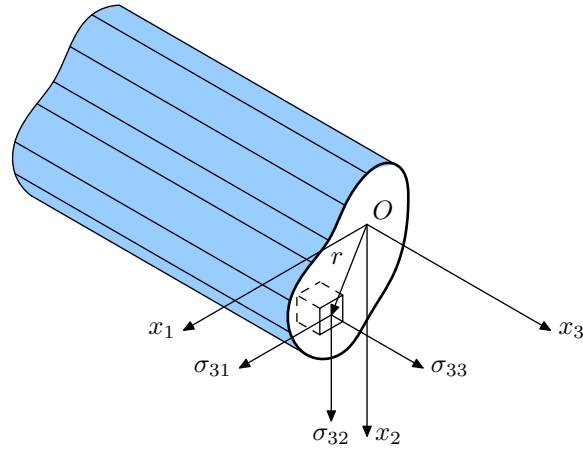


Figura 2: Peça linear

3 Peças lineares

3.1 O conceito de uma peça linear

Uma peça linear é um corpo que se caracteriza por ter uma das dimensões muito maior que as restantes. Pode ser encarada como um corpo que é gerado pelo movimento de uma figura plana — a *secção transversal* — ao longo de uma linha — o *eixo*. Admite-se que a secção transversal está sempre contida no plano perpendicular ao eixo e que as suas dimensões são muito menores que as do eixo.

Se o eixo for rectilíneo e a secção transversal for constante, a peça linear é designada por *barra prismática*. Neste caso, é habitual considerar um referencial local para a barra na qual o eixo x_3 identifica cada secção transversal, enquanto que a posição de cada ponto é referenciado pelo vector $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. A figura 2 ilustra o conceito. Para já, a localização da origem do referencial — o ponto O — no plano da secção transversal é arbitrária.

3.2 Esforços

Corte-se uma peça linear por uma secção transversal e considere-se a face exposta cuja normal exterior é \mathbf{e}_3 . Em cada ponto da secção transversal, é possível identificar um vector tensão cujas componentes correspondem à terceira linha do tensor das tensões (ver figura 2)

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{e}_3)} = \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3$$

Os elementos de redução destas tensões calculados no centro da secção transversal são obtidos por integração na área A de cada secção,

$$\mathbf{R} = \int_A \boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{e}_3)} dA = \int_A (\sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3) dA = V_1\mathbf{e}_1 + V_2\mathbf{e}_2 + N\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{M} = \int_A \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{e}_3)} dA = \int_A \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} dA = M_1\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_2 + T\mathbf{e}_3$$

As três componentes da resultante e do momento resultante constituem, portanto, seis *esforços* — dois esforços transversos, um esforço normal, dois momentos flectores e um momento torsor:

$$V_1 = \int_A \sigma_{31} dA \quad V_2 = \int_A \sigma_{32} dA \quad N = \int_A \sigma_{33} dA \quad (9)$$

$$M_1 = \int_A \sigma_{33} x_2 dA \quad M_2 = \int_A -\sigma_{33} x_1 dA \quad T = \int_A (\sigma_{32} x_1 - \sigma_{31} x_2) dA \quad (10)$$

3.3 Cargas

Também é possível reduzir todas as cargas de vão ao eixo da peça linear. Definam-se \mathbf{p} e \mathbf{m} como a resultante e o momento resultante das cargas aplicadas numa secção transversal (compreendendo as forças de massa e as forças distribuídas aplicadas na fronteira)

$$\mathbf{p} = \int_A \mathbf{X} dA + \int_\Gamma \mathbf{t} d\Gamma = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + p_3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{m} = \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{X} dA + \int_\Gamma \mathbf{r} \times \mathbf{t} d\Gamma = m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2 + m_3 \mathbf{e}_3$$

onde Γ representa a linha que constitui o perímetro de A .

As componentes destes vectores são obtidas a partir de um cálculo análogo ao dos esforços, sendo dadas por

$$p_1 = \int_A X_1 dA + \int_\Gamma t_1 d\Gamma \quad (11)$$

$$p_2 = \int_A X_2 dA + \int_\Gamma t_2 d\Gamma \quad (12)$$

$$p_3 = \int_A X_3 dA + \int_\Gamma t_3 d\Gamma \quad (13)$$

e

$$m_1 = \int_A X_3 x_2 dA + \int_\Gamma t_3 x_2 d\Gamma \quad (14)$$

$$m_2 = \int_A -X_3 x_1 dA + \int_\Gamma -t_3 x_1 d\Gamma \quad (15)$$

$$m_3 = \int_A (X_2 x_1 - X_1 x_2) dA + \int_\Gamma (t_2 x_1 - t_1 x_2) d\Gamma \quad (16)$$

Numa formulação de corpo contínuo todas as cargas aplicadas são ou forças de massa (volumicas) ou forças distribuídas na fronteira (de superfície, portanto). Na idealização de peça linear, estas cargas transformam-se em cargas distribuídas: forças distribuídas \mathbf{p} ou momentos distribuídos \mathbf{m} , ambos por metro linear. É possível levar a abstracção um pouco mais longe e representar cargas distribuídas de intensidade elevada mas distribuídas num curto comprimento apenas pela suas resultantes. Surgem assim as cargas concentradas (forças e momentos), as quais podem actuar no vão de uma barra ou num nó, onde concorrem uma ou várias barras.

3.4 Equilíbrio

Considere-se o troço infinitesimal de uma barra representado na figura 3. Escrevendo o equilíbrio de forças e momentos pode escrever-se após desprezar infinitésimos de ordem superior

$$-\mathbf{R} + \mathbf{R} + d\mathbf{R} + \mathbf{p} dx_3 = \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{M} + \mathbf{M} + d\mathbf{M} + dx_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{R} + \mathbf{m} dx_3 = \mathbf{0}$$

Simplificando termos, dividindo por dx_3 e identificando as derivadas $\frac{d(\cdot)}{dx_3}$ por $(\cdot)_{,3}$ obtém-se então

$$\mathbf{R}_{,3} + \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_{,3} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{R} + \mathbf{m} = \mathbf{0}$$

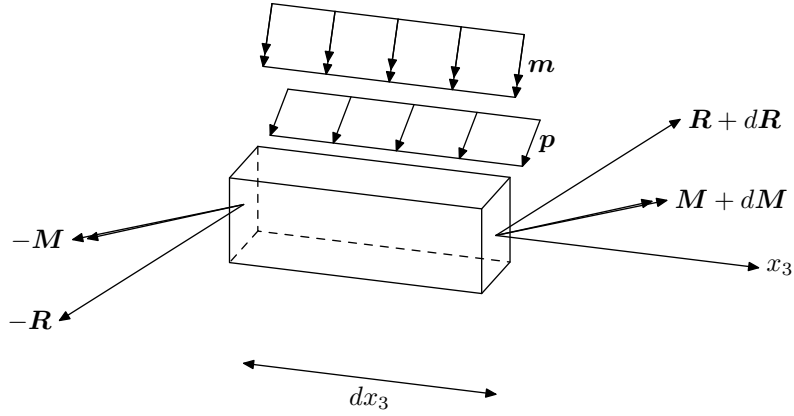


Figura 3: Equilíbrio de um trecho infinitesimal de uma barra

ou, em componentes,

$$V_{1,3} + p_1 = 0 \quad (17)$$

$$V_{2,3} + p_2 = 0 \quad (18)$$

$$N_{,3} + p_3 = 0 \quad (19)$$

$$M_{1,3} - V_2 + m_1 = 0 \quad (20)$$

$$M_{2,3} + V_1 + m_2 = 0 \quad (21)$$

$$T_{,3} + m_3 = 0 \quad (22)$$

Se houver cargas concentradas de vão, existem descontinuidades no andamento dos diagramas de esforços, cujo valor é simétrico do valor aplicado.⁶

3.5 Cinemática

Admita-se que o campo de deslocamentos pode ser descrito por uma translação $\mathbf{u}^0(x_3)$ e uma rotação $\theta(x_3)$, o que significa que se supõe que cada secção se mantém rígida.

Esta hipótese é uma aproximação já que as secções de uma peça linear quando submetidas a esforços deformam-se em geral. Por exemplo, as tensões normais σ_{33} que resultam da aplicação de um esforço axial ou de um momento flector provocam a deformação da secção no seu próprio plano sempre que o coeficiente de Poisson é não nulo. Por outro lado, as tensões tangenciais σ_{31} e σ_{32} provocadas por um esforço transversal ou momento torsor implicam quase sempre o empenamento da secção — a torção de secções com simetria de revolução é a notável excepção.

Porém, numa peça linear, é razoavelmente seguro considerar que os deslocamentos associados à deformação das secções transversais são de magnitude bastante inferior aos deslocamentos descritos pelo movimento de corpo rígido dessas secções. Assim, para efeitos de cálculo de deslocamentos através do PTV (método da carga unitária), pode adoptar-se esta descrição simplificada do movimento. No entanto, é importante observar desde já que esta hipótese da secção

⁶É útil identificar as 6 equações de equilíbrio relativas a um nó genérico, nas quais intervêm os esforços de extremidade das barras que nele concorrem e as cargas concentradas aplicadas no próprio nó. Há que ter em atenção que os esforços dizem respeito ao referencial local da barra, o qual, em geral, é diferente de barra para barra e diferente do referencial global. Assim seja \mathbf{A}_b o tensor de rotação que permite escrever os vectores dos esforços \mathbf{R}_b e \mathbf{M}_b da barra b no referencial global, sejam n_{bi} e n_{bt} , respectivamente, o número de barras que se iniciam e que terminam num nó e sejam \mathbf{P}^N e \mathbf{M}^N , respectivamente, os vectores de força e momento concentrados aplicados nesse nó. O equilíbrio de forças e de momentos nesse nó revela que

$$\mathbf{P}^N + \sum_{b=1}^{n_{bi}} \mathbf{A}_b \mathbf{R}_b - \sum_{b=1}^{n_{bt}} \mathbf{A}_b \mathbf{R}_b = 0 \quad \mathbf{M}^N + \sum_{b=1}^{n_{bi}} \mathbf{A}_b \mathbf{M}_b - \sum_{b=1}^{n_{bt}} \mathbf{A}_b \mathbf{M}_b = 0$$

se manter rígida não pode ser admitida para o estabelecimento da lei constitutiva ao nível da secção, como se explica mais à frente, na secção 3.6.

Tem-se, então, que o deslocamento de um ponto genérico as secção, de coordenadas x_1 e x_2 , é dado por

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} = \begin{Bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^0 - \theta_3 x_2 \\ u_2^0 + \theta_3 x_1 \\ u_3^0 + \theta_1 x_2 - \theta_2 x_1 \end{Bmatrix}$$

ou seja

$$u_1 = u_1^0 - \theta_3 x_2 \quad (23)$$

$$u_2 = u_2^0 + \theta_3 x_1 \quad (24)$$

$$u_3 = u_3^0 + \theta_1 x_2 - \theta_2 x_1 \quad (25)$$

O campo de deformações é obtido aplicando as relações deformações-deslocamentos, dadas peças equações (3). Há que ter em atenção que como \mathbf{u}^0 e $\boldsymbol{\theta}$ são vectores que dependem apenas de x_3 , são nulas as suas derivadas em ordem a x_1 e x_2 . Tem-se então

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} = 0$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} = 0$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3} = u_{3,3}^0 + \theta_{1,3} x_2 - \theta_{2,3} x_1$$

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} = -\theta_3 + \theta_3 = 0$$

$$\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} = u_{1,3} + u_{3,1} = u_{1,3}^0 - \theta_{3,3} x_2 - \theta_2$$

$$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = u_{2,3} + u_{3,2} = u_{2,3}^0 + \theta_{3,3} x_1 + \theta_1$$

Definindo as seguintes quantidades — designadas por *medidas de deformação da secção* ou *deformações generalizadas* —

$$\varepsilon = u_{3,3}^0 \quad (26)$$

$$\gamma'_1 = u_{1,3}^0 - \theta_2 \quad (27)$$

$$\gamma'_2 = u_{2,3}^0 + \theta_1 \quad (28)$$

$$\frac{1}{R_1} = \theta_{1,3} \quad (29)$$

$$\frac{1}{R_2} = \theta_{2,3} \quad (30)$$

$$\alpha = \theta_{3,3} \quad (31)$$

pode escrever-se

$$\varepsilon_{11} = 0 \quad (32)$$

$$\varepsilon_{22} = 0 \quad (33)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon + \frac{1}{R_1} x_2 - \frac{1}{R_2} x_1 \quad (34)$$

$$\gamma_{12} = 0 \quad (35)$$

$$\gamma_{13} = \gamma'_1 - \alpha x_2 \quad (36)$$

$$\gamma_{23} = \gamma'_2 + \alpha x_1 \quad (37)$$

As medidas de deformação ε , $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ e α são interpretadas, respectivamente, como a extensão axial, as (duas) curvaturas de flexão e a curvatura de torção (a variação do ângulo de torção

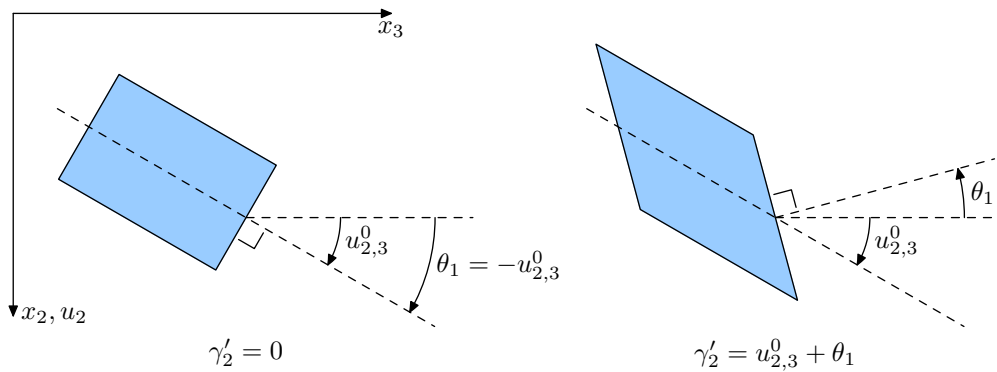


Figura 4: Interpretação de γ'_2

por unidade de comprimento), conforme foi visto em pormenor nos capítulos da Resistência de Materiais dedicados à tracção, flexão e torção. Já as medidas γ'_1 e γ'_2 , representam a deformação por esforço transversal e necessitam de uma explicação adicional.

A figura 4 fornece uma interpretação de γ'_2 para um troço de peça linear sujeito a movimentos no plano x_2x_3 (logo $\alpha = 0$) e onde se admite que as secções se mantêm rígidas, de acordo com os pressupostos admitidos na presente abordagem.⁷ No diagrama da esquerda mostra-se um troço de peça linear no qual $\theta_1 = -u_{2,3}^0$ e onde, portanto, as distorções γ_{23} são nulas. Em contrapartida, no diagrama da direita tanto $u_{2,3}^0$ como θ_1 são não nulos (e positivos), podendo observar-se que as distorções $\gamma_{23} = \gamma'_2$ são obtidas pela sua soma, de acordo com a equação (28). Uma interpretação análoga podia ser feita para γ'_1 .

3.6 Lei constitutiva ao nível da secção

Se admitir a hipótese da secção rígida é uma simplificação legítima do ponto vista estritamente cinemático, já o mesmo não acontece no estabelecimento de leis constitutivas ao nível da secção. Como é discutido noutros capítulos da Resistência de Materiais, a obtenção da relação entre esforços e as correspondentes medidas de deformação da secção necessita em geral de algumas hipóteses sobre o campo de deslocamentos devidamente complementadas com hipóteses directas sobre o campo de tensões.

Por exemplo, no estudo do comportamento das secções submetidas a esforços de tracção e/ou de flexão é habitual admitir a *hipótese de Navier*

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0 \quad (38)$$

a qual na presença de tensões σ_{33} não nulas implica forçosamente a deformação da secção no seu próprio plano por efeito de Poisson. Apenas com este conjunto misto de hipóteses se pode obter valores da rigidez axial EA e da rigidez de flexão EI que sejam (correctamente) independentes do valor do coeficiente de Poisson.

Já no estudo da torção é fundamental a consideração do empenamento da secção, sem o qual se deduziria (i) uma rigidez de torção GJ muito superior à real para a generalidade das secções e (ii) uma distribuição de tensões tangenciais com a forma totalmente errada (linhas de tensão cruzando o contorno da secção transversal). Considerações semelhantes podem ser tecidas no estudo do corte, particularmente as que dizem respeito à forma da distribuição de tensões tangenciais.

⁷Esta hipótese implica que as deformações γ_{23} sejam uniformes na secção, e, se admitirmos o comportamento elástico, também tensões σ_{23} uniformes na secção, o que, na prática, corresponde a admitir válida a *teoria elementar do corte*. Na verdade, o esforço transversal provoca sempre o empenamento das secções e as deformações γ_{23} e as tensões σ_{23} nunca são constantes. Mas, conforme estudado no capítulo dedicado ao corte, é possível estabelecer uma equivalência (energética) entre a deformabilidade real do eixo e a prevista pela teoria elementar do corte. Ver também, discussão na secção 3.6.

É interessante observar que o número de medidas de deformação da secção coincide com o número de esforços. Na verdade, o estudo dos capítulos precedentes da Resistência de Materiais revelou que, admitindo um material elástico linear isotrópico e escolhendo judiciosamente o referencial que serve de base à definição dos esforços, se tem

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \quad (39)$$

$$\gamma'_1 = \frac{V_1}{GA'_1} \quad (40)$$

$$\gamma'_2 = \frac{V_2}{GA'_2} \quad (41)$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{M_1}{EI_{11}} \quad (42)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{M_2}{EI_{22}} \quad (43)$$

$$\alpha = \frac{T}{GJ} \quad (44)$$

onde E é o *módulo de elasticidade* e $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o *módulo de distorção*.

Estas equações mostram que o comportamento da secção face aos 6 esforços está completamente desacoplado, isto é, cada medida de deformação depende unicamente do esforço que lhe está associado. Infelizmente, no caso de secções gerais, esta forma simples das leis constitutivas ao nível da secção exige a consideração de mais do que um referencial. De facto, o desacoplamento entre o esforço axial e os dois momentos flectores (esforços associados às tensões normais) exige a adopção do referencial dos eixos principais centrais de inércia, ao passo que o desacoplamento entre o momento torsor e os dois esforços transversos (esforços associados às tensões tangenciais) exige que o momento torsor esteja referido ao centro de corte⁸. Apenas para secções bi-simétricas, onde existe coincidência entre os centros de gravidade e de corte, é possível a consideração de apenas um referencial.

4 Expressão do PTV para peças lineares

A expressão do PTV para estruturas constituídas por peças lineares pode ser obtida de duas formas alternativas: ou a partir da equação diferencial de equilíbrio de uma peça linear, ou a partir da equação do PTV para um contínuo.

4.1 A partir da equação diferencial de equilíbrio

Considere-se uma distribuição de esforços equilibrada, isto é, respeitando as equações (17) a (22). Por outro lado, considere-se um campo de deslocamentos compatível em que o movimento de cada secção transversal é caracterizado pelas três componentes do vector deslocamento \mathbf{u} e do vector de rotação infinitesimal $\boldsymbol{\theta}$. Como é usual no princípio dos trabalhos virtuais, admite-se que a solução equilibrada e compatível sejam totalmente distintas, pelo que se identificarão todas as variáveis estáticas pela sobreposição de uma barra.

⁸De igual modo, as distorções γ'_1 e γ'_2 calculadas por (40) e (41) representam a deformabilidade do eixo que contém os centros de corte, isto é, por exemplo, ter-se-á

$$\gamma'_2 = \frac{V_2}{GA'_2} = u_{2,3}^C + \theta_1$$

Multipliquem-se as seis equações de equilíbrio pelas seis variáveis cinemáticas⁹ e integre-se no comprimento da peça linear, obtendo-se

$$\int_0^L \left[(\bar{V}_{1,3} + \bar{p}_1) u_1 + (\bar{V}_{2,3} + \bar{p}_2) u_2 + (\bar{N}_{,3} + \bar{p}_3) u_3 + \right. \\ \left. (\bar{M}_{1,3} - \bar{V}_2 + \bar{m}_1) \theta_1 + (\bar{M}_{2,3} - \bar{V}_1 + \bar{m}_2) \theta_2 + (\bar{T}_{,3} + \bar{m}_3) \theta_3 \right] dx_3 = 0$$

Integrando por partes todas as parcelas que envolvem derivadas longitudinais de esforços obtém-se

$$\int_0^L (\bar{p}_1 u_1 + \bar{p}_2 u_2 + \bar{p}_3 u_3 + \bar{m}_1 \theta_1 + \bar{m}_2 \theta_2 + \bar{m}_3 \theta_3) dx_3 \\ + [\bar{V}_1 u_1]_0^L + [\bar{V}_2 u_2]_0^L + [\bar{N} u_3]_0^L + [\bar{M}_1 \theta_1]_0^L + [\bar{M}_2 \theta_1]_0^L + [\bar{T} \theta_3]_0^L \\ - \int_0^L \left[\bar{V}_1 (u_{1,3} - \theta_2) + \bar{V}_2 (u_{2,3} + \theta_1) + \bar{N} u_{3,3} + \bar{M}_1 \theta_{1,3} + \bar{M}_2 \theta_{2,3} + \bar{T} \theta_{3,3} \right] dx_3 = 0$$

A primeira linha é claramente o trabalho das cargas de vão, a segunda linha é o trabalho dos esforços de extremidade e a última é o trabalho das forças interiores.

Numa estrutura composta por várias barras, há que somar a contribuição de todas as barras, podendo concluir-se que o total do trabalho dos esforços de extremidade é simplesmente o trabalho das forças exteriores nodais — lembre-se a nota de rodapé 6.

Assim, pode escrever-se

$$W_{ext} + W_{int} = 0$$

com

$$W_{int} = - \sum_{\text{barras}} \int_0^L \left[\bar{V}_1 \gamma'_1 + \bar{V}_2 \gamma'_2 + \bar{N} \epsilon + \bar{M}_1 \frac{1}{R_1} + \bar{M}_2 \frac{1}{R_2} + \bar{T} \alpha \right] dx_3 \quad (45)$$

$$W_{ext} = \sum_{\text{nós}} \left(\bar{\mathbf{P}}^N \cdot \mathbf{u}^N + \bar{\mathbf{M}}^N \cdot \boldsymbol{\theta}^N \right) + \sum_{\text{barras}} \int_0^L (\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u} + \bar{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\theta}) dx_3 \quad (46)$$

onde foram usadas as definições (26) a (31) e $\bar{\mathbf{P}}^N$ e $\bar{\mathbf{M}}^N$ representam as forças e momentos concentrados que realizam trabalho nos deslocamentos e rotações nodais \mathbf{u}^N e $\boldsymbol{\theta}^N$. As forças, momentos, deslocamentos e rotações nodais são em geral expressos num referencial global, o qual não coincide necessariamente com os referenciais locais das barras que concorrem no nó.

4.2 A partir da equação do PTV para um contínuo

Seguindo esta via, há que calcular cada um dos termos da equação (6) em termos das variáveis unidimensionais da teoria das peças lineares.

Na expressão do trabalho das forças interiores para um contínuo (8), a integração do volume pode ser encarada como a integração longitudinal de uma integração na secção transversal,

$$W_{int} = - \int_V \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV = - \sum_{\text{barras}} \int_0^L \int_A \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dA dx_3$$

⁹Numa teoria unidimensional, não há a necessidade de distinguir entre o deslocamento do centro da secção \mathbf{u}^0 e o deslocamento de um ponto genérico da secção \mathbf{u} . Assim, designa-se o movimento da secção simplesmente por \mathbf{u} quando, para manter uma total consistência com a secção 4.2, seria mais apropriado manter o índice superior O .

Considere-se o integral de área, admitindo que o campo de deformações compatível na peça linear é o definido pelas expressões (32) a (37) e que o campo de tensões equilibrado respeita a hipótese de Navier definida pelas equações (38). Tem-se então

$$\int_A \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dA = \int_A \left[\bar{\sigma}_{33} \left(\varepsilon + \frac{1}{R_1} x_2 - \frac{1}{R_2} x_1 \right) + \bar{\sigma}_{31} (\gamma'_1 - \alpha x_2) + \bar{\sigma}_{32} (\gamma'_2 + \alpha x_1) \right] dA$$

Reagrupando termos (tendo em conta a simetria do tensor das tensões) e passando as medidas de deformação da secção para fora dos integrais de área tem-se

$$\begin{aligned} \int_A \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dA &= \gamma'_1 \int_A \bar{\sigma}_{31} dA + \gamma'_2 \int_A \bar{\sigma}_{32} dA + \varepsilon \int_A \bar{\sigma}_{33} dA \\ &+ \frac{1}{R_1} \int_A \bar{\sigma}_{33} x_2 dA + \frac{1}{R_2} \int_A -\bar{\sigma}_{33} x_1 dA + \alpha \int_A (\bar{\sigma}_{32} x_1 - \bar{\sigma}_{31} x_2) dA \end{aligned}$$

Tendo em conta as definições de esforços (9) e (10), esta expressão simplifica-se para

$$\int_A \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dA = \gamma'_1 \bar{V}_1 + \gamma'_2 \bar{V}_2 + \varepsilon \bar{N} + \frac{1}{R_1} \bar{M}_1 + \frac{1}{R_2} \bar{M}_2 + \alpha \bar{T}$$

Somando a contribuição de todas as barras tem-se

$$W_{int} = - \sum_{\text{barras}} \int_0^L \left(\gamma'_1 \bar{V}_1 + \gamma'_2 \bar{V}_2 + \varepsilon \bar{N} + \frac{1}{R_1} \bar{M}_1 + \frac{1}{R_2} \bar{M}_2 + \alpha \bar{T} \right) dx_3 \quad (47)$$

Já o trabalho das forças exteriores, numa determinada barra, é obtido inserindo (23) a (25) na expressão (7)

$$\begin{aligned} W_{ext} &= \int_V \bar{X}_j u_j dV + \int_{S_t} \bar{t}_j u_j dS \\ &= \int_0^L \int_A \left[\bar{X}_1 (u_1^0 - \theta_3 x_2) + \bar{X}_2 (u_2^0 + \theta_3 x_1) + \bar{X}_3 (u_3^0 + \theta_1 x_2 - \theta_2 x_1) \right] dA dx_3 \\ &+ \int_0^L \int_\Gamma \left[\bar{t}_1 (u_1^0 - \theta_3 x_2) + \bar{t}_2 (u_2^0 + \theta_3 x_1) + \bar{t}_3 (u_3^0 + \theta_1 x_2 - \theta_2 x_1) \right] d\Gamma dx_3 \end{aligned}$$

Reordenando termos e entrando em conta com as equações (11) a (16) conclui-se que

$$\begin{aligned} W_{ext} &= \int_0^L (u_1^0 \bar{p}_1 + u_2^0 \bar{p}_2 + u_3^0 \bar{p}_3 + \theta_1 \bar{m}_1 + \theta_2 \bar{m}_2 + \theta_3 \bar{m}_3) dx_3 \\ &= \int_0^L (\mathbf{u}^0 \cdot \bar{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\theta} \cdot \bar{\mathbf{m}}) dx_3 \end{aligned}$$

Na expressão precedente, apenas foram contabilizadas cargas (forças e momentos) distribuídas. Se algumas dessas cargas actuarem numa zona muito localizada junto a um nó, é possível admitir que o campo de deslocamentos é localmente aproximado por um movimento de corpo rígido dado por

$$\mathbf{u}^0(x_3) = \mathbf{u}^N + \boldsymbol{\theta}^N \times \overrightarrow{N\hat{O}} \quad \boldsymbol{\theta}(x_3) = \boldsymbol{\theta}^N$$

onde \mathbf{u}^N e $\boldsymbol{\theta}^N$ são o deslocamento e a rotação do nó em causa e $\overrightarrow{N\hat{O}} = \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^N$. O trabalho destas forças (na vizinhança de N) pode então ser escrito como

$$\begin{aligned} W_{ext}^{vizN} &= \int_0^L \left(\mathbf{u}^N \cdot \bar{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\theta}^N \times \overrightarrow{N\hat{O}} \cdot \bar{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\theta}^N \cdot \bar{\mathbf{m}} \right) dx_3 \\ &= \mathbf{u}^N \cdot \int_0^L \bar{\mathbf{p}} dx_3 + \boldsymbol{\theta}^N \cdot \int_0^L \left(\bar{\mathbf{m}} + \overrightarrow{N\hat{O}} \times \bar{\mathbf{p}} \right) dx_3 \\ &= \mathbf{u}^N \cdot \bar{\mathbf{P}}^N + \boldsymbol{\theta}^N \cdot \bar{\mathbf{M}}^N \end{aligned}$$

tendo-se tirado partido da igualdade $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, válida para quaisquer três vectores, e do facto de \mathbf{u}^N e $\boldsymbol{\theta}^N$ poderem passar para fora do integral por não dependerem de x_3 . Na expressão final $\bar{\mathbf{P}}^N$ e $\bar{\mathbf{M}}^N$ são a resultante e o momento resultante das cargas distribuídas actuando na vizinhança do nó N . A força $\bar{\mathbf{P}}^N$ e o momento $\bar{\mathbf{M}}^N$ podem então ser encarados como uma força concentrada e um momento concentrado aplicados no ponto N .

Somando agora a contribuição de todas as cargas distribuídas em barras e de todas as cargas concentradas em nós, escreve-se finalmente

$$W_{ext} = \sum_{\text{nós}} \left(\mathbf{u}^N \cdot \bar{\mathbf{P}}^N + \boldsymbol{\theta}^N \cdot \bar{\mathbf{M}}^N \right) + \sum_{\text{barras}} \int_0^L (\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\theta} \cdot \bar{\mathbf{m}}) dx_3 \quad (48)$$

Pode observar-se que as equações (45) e (46) coincidem com as equações (47) e (48).

5 O método da carga unitária

5.1 Escolha das soluções equilibrada e compatível

A equação do PTV escrita para peças lineares pode agora ser utilizada para estabelecer o método da carga unitária, o qual permite obter deslocamentos (ou rotações) em estruturas elásticas de uma forma simples.

Comece-se por recordar que na equação do PTV (seja a versão para corpos contínuos ou para peças lineares) figuram duas soluções: uma equilibrada (identificada por uma barra sobreposta) e uma compatível (sem barra). No método da carga unitária admite-se que (i) a *solução compatível* é a *real* — no fim de contas, queremos calcular os deslocamentos reais —, e que (ii) a *solução equilibrada* envolve apenas uma força aplicada de valor unitário — a carga unitária $\bar{\mathbf{I}}$ que dá o nome ao método — com a direcção e sentido do deslocamento que se pretende calcular.

Sendo a solução compatível a solução real, é necessário conhecer as medidas de deformação da secção em todas as secções transversais de todas as barras da estrutura. Ora, admitindo o comportamento elástico da estrutura, essas medidas de deformação podem ser calculadas recorrendo às equações (39) a (44) se, bem entendido, forem conhecidos os diagramas de esforços reais, N , V_1 , V_2 , M_1 , M_2 e T . Se se tratar de uma estrutura isostática os diagramas de esforços reais podem ser facilmente obtidos a partir do carregamento real da estrutura, exclusivamente com base em equações de equilíbrio. Já para estruturas hiperestáticas é necessário primeiro levantar a hiperestaticidade, por exemplo recorrendo ao método das forças.¹⁰

Por outro lado, para a solução equilibrada, é necessário encontrar uma distribuição de esforços \bar{N} , \bar{V}_1 , \bar{V}_2 , \bar{M}_1 , \bar{M}_2 e \bar{T} que equilibrem a carga unitária. Chama-se a atenção de que estes diagramas de esforços *apenas* necessitam de ser equilibrados. Embora numa estrutura isostática a solução equilibrada seja obviamente única, já o mesmo não acontece em estruturas hiperestáticas, onde existem diversas soluções equilibradas possíveis. Na prática, numa estrutura n vezes hiperestática é possível arbitrar n valores das reacções (ou de esforços internos), geralmente para o valor nulo, e calcular os diagramas de esforços correspondentes por equilíbrio.¹¹

Face a estes pressupostos, o trabalho das forças exteriores é apenas o trabalho da carga unitária, isto é

$$W_{ext} = \bar{\mathbf{I}} \delta$$

onde δ é o deslocamento real (compatível) do ponto onde está aplicada a carga unitária na direcção e sentido desta.

¹⁰Por sua vez, a equação do método das forças requer o cálculo de deslocamentos no sistema base isostático, os quais por sua vez são geralmente também calculados através da aplicação do método da carga unitária.

¹¹É claro que só se podem arbitrar valores onde haja redundância de ligações.

Por outro lado, se todas as secções forem bi-simétricas, ou de um modo mais geral se existir coincidência entre os centros de gravidade e de corte,¹² é possível introduzir as equações (39) a (44) na equação (45) (ou na equação (47)) e obter

$$W_{int} = - \sum_{\text{barras}} \int_0^L \left[\bar{V}_1 \gamma'_1 + \bar{V}_2 \gamma'_2 + \bar{N} \epsilon + \bar{M}_1 \frac{1}{R_1} + \bar{M}_2 \frac{1}{R_2} + \bar{T} \alpha \right] dx_3 \quad (49)$$

$$= - \sum_{\text{barras}} \int_0^L \left[\bar{V}_1 \frac{V_1}{GA'_1} + \bar{V}_2 \frac{V_2}{GA'_2} + \bar{N} \frac{N}{EA} + \bar{M}_1 \frac{M_1}{EI_1} + \bar{M}_2 \frac{M_2}{EI_2} + \bar{T} \frac{T}{GJ} \right] dx_3 \quad (50)$$

A equação do PTV, afirmando que o trabalho total é nulo, equação (6), permite então chegar à equação do método da carga unitária

$$\bar{1} \delta = \sum_{\text{barras}} \int_0^L \left[\frac{\bar{V}_1 V_1}{GA'_1} + \frac{\bar{V}_2 V_2}{GA'_2} + \frac{\bar{N} N}{EA} + \frac{\bar{M}_1 M_1}{EI_1} + \frac{\bar{M}_2 M_2}{EI_2} + \frac{\bar{T} T}{GJ} \right] dx_3 \quad (51)$$

O lado esquerdo desta equação vale obviamente δ , já que o valor da carga unitária é, como o nome indica, unitário. No entanto é habitual manter o valor $\bar{1}$ nesta equação, para melhor transmitir a ideia de que os esforços \bar{N} , \bar{V}_1 , \bar{V}_2 , \bar{M}_1 , \bar{M}_2 e \bar{T} estão em equilíbrio com uma carga unitária.

A vantagem do método da carga unitária pode agora ser apreciada: para o cálculo de deslocamentos em estruturas no regime elástico, apenas é necessário o conhecimento de variáveis estáticas — os esforços —, complementadas com as propriedades elásticas das secções.¹³ Em particular, é desnecessário a consideração de equações cinemáticas compatibilizando deslocamentos, equações essas que são potencialmente bastante complicadas se estivermos a analisar uma estrutura com várias barras inclinadas. Em contrapartida, é fundamental que os diagramas de esforços — os reais e os que equilibram a carga unitária — sejam correctamente determinados.

5.2 Escrita dos termos associados a tensões tangenciais referidos ao centro de corte

Relembre-se que a equação do PTV para um contínuo é obtida exclusivamente a partir de equações de equilíbrio e de equações de compatibilidade. São, portanto, totalmente independentes do tipo de leis constitutivas. Naturalmente essa independência é mantida quando se especializa a equação do PTV para uma estrutura constituída por peças lineares, como se acabou de fazer. Isto significa que é arbitrário o referencial escolhido para a definição dos esforços e medidas de deformação presentes na expressão do trabalho das forças interiores — equações (45) ou (46). No entanto, pela forma como essas equações foram deduzidas, é evidente que deve ser usado um único referencial em relação ao qual todos os esforços e medidas de deformação são referidos.

¹²As razões para esta restrição são explicadas na secção 5.2.

¹³O método da carga unitária, tal como aqui apresentado, foi formulado admitindo a validade das leis constitutivas ao nível da secção. Estas leis são obtidas admitindo reunidas um certo número de condições ideais, tais como flexão pura ou torção uniforme, de modo a que a deformação da secção no seu próprio plano ou o empenamento desta se possam dar livremente sem implicar o aparecimento de tensões adicionais. De um modo geral, é razoável admitir que mesmo quando essas condições ideais não se verificam, as equações (39) a (44) podem ainda assim ser utilizadas como boas aproximações. Mas, como é evidente, os deslocamentos calculados através do método da carga unitária reflectem sempre os erros inerentes às aproximações cometidas nas leis constitutivas.

Por outro lado, o campo de deslocamentos considerado na secção 3.5 e usado na secção 4.2 corresponde apenas ao movimento de corpo rígido de cada secção. Como tal, os deslocamentos obtidos através do método da carga unitária correspondem também apenas ao movimento de corpo rígido da secção e *nunca incluem* os deslocamentos adicionais correspondentes à deformação da secção. Por exemplo, não é possível utilizar a equação (51) para calcular o valor do empenamento num ponto de uma secção, mesmo que se trate de um problema de torção uniforme onde a equação (44) possa ser considerada como exacta.

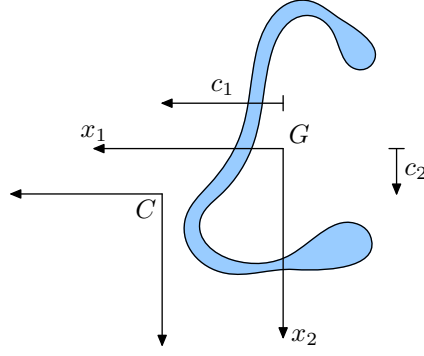


Figura 5: Secção com centro de gravidade (G) e centro de corte (C) não coincidentes

Acontece que a equação (51) do método da carga unitária necessita também das relações elásticas. Como discutido na secção 3.6, para que a lei constitutiva no caso de secções gerais apresente a forma mais simples possível, é necessário calcular os momentos flectores e o momento torsor em relação a pontos diferentes. Detectado este aparente conflito, interessa pois generalizar a equação do método da carga unitária para secções onde os centros de gravidade e de corte não coincidam.

Considere-se uma secção geral, representada na figura 5, no qual a posição do centro de corte C relativamente ao centro de gravidade G é definida por

$$\overrightarrow{GC} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2$$

O deslocamento de C pode ser calculado a partir do deslocamento de G e da rotação da secção θ , recorrendo às equações (23) a (25) (basta substituir O por G e o ponto genérico por C), ou seja

$$u_1^C = u_1^G - \theta_3 c_2$$

$$u_2^C = u_2^G + \theta_3 c_1$$

$$u_3^C = u_3^G + \theta_1 c_2 - \theta_2 c_1$$

Derivando estas equações em ordem a x_3 e recordando as equações (29) a (31), obtém-se

$$u_{1,3}^C = u_{1,3}^G - \alpha c_2 \quad (52)$$

$$u_{2,3}^C = u_{2,3}^G + \alpha c_1 \quad (53)$$

$$u_{3,3}^C = u_{3,3}^G + \frac{1}{R_1} c_2 - \frac{1}{R_2} c_1 \quad (54)$$

Se agora escrevermos as medidas de deformação (26) a (28), tomando por base a rotação da secção θ e o deslocamento do centro de gravidade \mathbf{u}^G ou, em alternativa, a rotação θ e o deslocamento do centro de corte \mathbf{u}^C , temos

$$\gamma_1^G = u_{1,3}^G - \theta_2 \quad \gamma_1^C = u_{1,3}^C - \theta_2 \quad (55)$$

$$\gamma_2^G = u_{2,3}^G + \theta_1 \quad \gamma_2^C = u_{2,3}^C + \theta_1 \quad (56)$$

$$\varepsilon^G = u_{3,3}^G \quad \varepsilon^C = u_{3,3}^C \quad (57)$$

Já, as expressões das curvaturas de flexão $\frac{1}{R_1}$ e $\frac{1}{R_2}$ e a curvatura de torção α , definidas nas equações (29) a (31) não se alteram, uma vez que só dependem das derivadas de θ . Combinando a equação (52) com as equações (55), a equação (53) com as equações (56) e a equação (54)

com as equações (57), pode escrever-se

$$\begin{aligned}\gamma_1^G - \gamma_1^C &= u_{1,3}^G - u_{1,3}^C = u_{1,3}^G - u_{1,3}^G + \alpha c_2 = \alpha c_2 \\ \gamma_2^G - \gamma_2^C &= u_{2,3}^G - u_{2,3}^C = u_{2,3}^G - u_{2,3}^G - \alpha c_1 = -\alpha c_1 \\ \varepsilon^G - \varepsilon^C &= u_{3,3}^G - u_{3,3}^C = -\frac{1}{R_1}c_2 + \frac{1}{R_2}c_1\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\gamma_1^G &= \gamma_1^C + \alpha c_2 \\ \gamma_2^G &= \gamma_2^C - \alpha c_1 \\ \varepsilon^G &= \varepsilon^C - \frac{1}{R_1}c_2 + \frac{1}{R_2}c_1\end{aligned}$$

As duas primeiras destas equações serão úteis para o presente objectivo.

Do ponto de vista da solução equilibrada, os esforços calculados no centro de corte relacionam-se, evidentemente, com os calculados no centro de gravidade. Enquanto que a resultante $\bar{\mathbf{R}}$ e as suas componentes \bar{V}_1 , \bar{V}_2 e \bar{N} são independentes da origem do referencial, o mesmo não acontece com o vector momento resultante $\bar{\mathbf{M}}$ e suas componentes \bar{M}_1 , \bar{M}_2 e \bar{T} , sendo essencial a indicação do ponto onde são calculados. A relação entre $\bar{\mathbf{M}}^C$ e $\bar{\mathbf{M}}^G$ é dada por

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}^C &= \bar{\mathbf{M}}^G + \overrightarrow{CG} \times \bar{\mathbf{R}} = \bar{M}_1^G \mathbf{e}_1 + \bar{M}_2^G \mathbf{e}_2 + \bar{T}^G \mathbf{e}_3 + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -c_1 & -c_2 & 0 \\ \bar{V}_1 & \bar{V}_2 & \bar{N} \end{vmatrix} \\ &= (\bar{M}_1^G - c_2 \bar{N})\mathbf{e}_1 + (\bar{M}_2^G + c_1 \bar{N})\mathbf{e}_2 + (\bar{T}^G - c_1 \bar{V}_2 + c_2 \bar{V}_1)\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

tendo-se portanto

$$\begin{aligned}\bar{M}_1^C &= \bar{M}_1^G - c_2 \bar{N} \\ \bar{M}_2^C &= \bar{M}_2^G + c_1 \bar{N} \\ \bar{T}^C &= \bar{T}^G - c_1 \bar{V}_2 + c_2 \bar{V}_1\end{aligned}$$

Destas equações, apenas a última será necessária, já de seguida.

O trabalho das forças interiores tomando como base o centro de gravidade é

$$W_{int} = - \sum_{\text{barras}} \int_0^L \left[\bar{V}_1 \gamma_1^G + \bar{V}_2 \gamma_2^G + \bar{N} \varepsilon^G + \bar{M}_1^G \frac{1}{R_1} + \bar{M}_2^G \frac{1}{R_2} + \bar{T}^G \alpha \right] dx_3$$

Os termos associados a tensões tangenciais podem agora ser rescritos tendo em conta as relações anteriores

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 \gamma_1^G + \bar{V}_2 \gamma_2^G + \bar{T}^G \alpha &= \bar{V}_1 (\gamma_1^C + \alpha c_2) + \bar{V}_2 (\gamma_2^C - \alpha c_1) + \bar{T}^G \alpha \\ &= \bar{V}_1 \gamma_1^C + \bar{V}_2 \gamma_2^C + \left(\bar{T}^G + \bar{V}_1 c_2 - \bar{V}_2 c_1 \right) \alpha \\ &= \bar{V}_1 \gamma_1^C + \bar{V}_2 \gamma_2^C + \bar{T}^C \alpha\end{aligned}$$

o que mostra que é possível exprimir W_{int} , tomando por base o centro de gravidade para os termos associados a tensões normais e o centro de corte para os termos associados a tensões tangenciais.

$$W_{int} = - \sum_{\text{barras}} \int_0^L \left[\bar{V}_1 \gamma_1^C + \bar{V}_2 \gamma_2^C + \bar{N} \varepsilon^G + \bar{M}_1^G \frac{1}{R_1} + \bar{M}_2^G \frac{1}{R_2} + \bar{T}^C \alpha \right] dx_3$$

Finalmente, a equação do método da carga unitária, aplicável a qualquer tipo de secções (simétricas ou não), fica

$$\bar{1} \delta = \sum_{\text{barras}} \int_0^L \left[\frac{\bar{V}_1 V_1}{GA'_1} + \frac{\bar{V}_2 V_2}{GA'_2} + \frac{\bar{N} N}{EA} + \frac{\bar{M}_1^G M_1^G}{EI_1} + \frac{\bar{M}_2^G M_2^G}{EI_2} + \frac{\bar{T}^C T^C}{GJ} \right] dx_3 \quad (58)$$

5.3 Cálculo de deslocamentos e rotações, absolutos ou relativos. Utilização no contexto do método das forças

A utilização do método da carga unitária não se limita ao cálculo de deslocamentos absolutos. Basta mudar a natureza da carga unitária para que a natureza do «deslocamento» calculado mude também.

Por exemplo, se a carga unitária for um *momento unitário* $\bar{1}$, em vez de uma força unitária como anteriormente tínhamos admitido, o trabalho das forças exteriores passa a ser

$$W_{ext} = \bar{1} \theta$$

onde θ é obviamente a rotação observada em torno de um eixo com a direcção do momento unitário e considerada positiva se corresponder ao sentido desse momento.

Além disso, é também possível calcular deslocamentos e rotações relativas. Por exemplo, aplicando duas forças unitárias com a mesma direcção, mas sentidos opostos, a dois pontos A e B, tem-se

$$W_{ext} = \bar{1} \delta_A - \bar{1} \delta_B = \bar{1} (\delta_A - \delta_B) = \bar{1} \delta_{AB}$$

onde os deslocamentos δ_A e δ_B , medidos segundo a direcção das forças aplicadas, são considerados positivos se forem no sentido da força unitária aplicada em A. Claramente, neste caso, o deslocamento δ_{AB} , fornecido pela aplicação do método da carga unitária, é o deslocamento relativo de A em relação a B (na direcção das forças). O cálculo de rotações relativas é feito de um modo análogo, recorrendo a um par de momentos unitários (de sentidos contrários).

É possível calcular deslocamentos e rotações relativos de dois pontos afastados entre si. Porém, na maior parte dos casos com interesse, calculam-se deslocamentos ou rotações relativos entre pontos vizinhos, os quais, fruto de uma libertação interna da estrutura, podem sofrer deslocamentos e rotações distintos.

É o que muitas vezes acontece quando se utiliza o método da carga unitária no âmbito do método das forças. Recorde-se que, neste método, é necessário calcular deslocamentos associados às libertações que foram introduzidas para transformar a estrutura original num sistema base isostático.¹⁴ Se, por exemplo, o sistema base é obtido à custa da introdução de uma rótula (libertação do momento flector), os deslocamentos que são necessários calcular para a equação do método das forças são rotações relativas.

6 Exemplos de aplicação

Seguem-se alguns exemplos que ilustram a aplicação do método da carga unitária e que evidenciam alguns aspectos particulares. Todas as integrações no comprimento das barras são feitas recorrendo às tabelas de integração que se encontram na tabela 1.

¹⁴Ver também a secção 8.5.

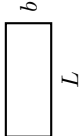
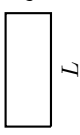
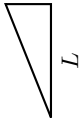
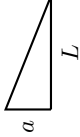


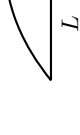

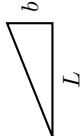
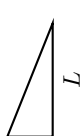




							
abL	$\frac{1}{2}abL$	$\frac{1}{2}abL$	$\frac{1}{2}abL$	$\frac{(a+d)bL}{2}$	$\frac{2}{3}abL$	$\frac{2}{3}abL$	$\frac{1}{3}abl$
	$\frac{1}{3}abL$	$\frac{1}{6}abL$	$\frac{1}{6}abL$	$\frac{(a+2d)bL}{6}$	$\frac{1}{3}abL$	$\frac{5}{12}abL$	$\frac{1}{4}abL$
	$\frac{1}{6}abL$	$\frac{1}{3}abL$	$\frac{1}{3}abL$	$\frac{(2a+d)bL}{6}$	$\frac{1}{3}abL$	$\frac{1}{4}abL$	$\frac{1}{12}abL$
	$\frac{a(b+c)L}{2}$	$\frac{a(b+2c)L}{6}$	$\frac{a(2b+c)L}{6}$	$\frac{(2ab+ac+bd+2cd)L}{6}$	$\frac{a(b+c)L}{3}$	$\frac{a(3b+5c)L}{12}$	$\frac{a(b+3c)L}{12}$
	$\frac{2}{3}abL$	$\frac{1}{3}abL$	$\frac{1}{3}abL$	$\frac{(a+d)bL}{3}$	$\frac{8}{15}abL$	$\frac{7}{15}abL$	$\frac{1}{5}abL$
	$\frac{2}{3}abL$	$\frac{5}{12}abL$	$\frac{1}{4}abL$	$\frac{(3a+5d)bL}{12}$	$\frac{7}{15}abL$	$\frac{8}{15}abL$	$\frac{3}{10}abL$
	$\frac{1}{3}abL$	$\frac{1}{4}abL$	$\frac{1}{12}abL$	$\frac{(a+3d)bL}{12}$	$\frac{1}{5}abL$	$\frac{3}{10}abL$	$\frac{1}{5}abL$

Tabela 1: Tabelas de integração

6.1 Consola em L com secção em C

O primeiro exemplo de aplicação, representado na figura 6, contempla uma consola em L com secção transversal em C, actuada por uma carga no centro de gravidade da secção de extremidade. Os comprimentos indicados referem-se ao eixo que une os centros de gravidade. Designe-se a distância entre os centros de gravidade e de corte por e . Pretende-se calcular o deslocamento do ponto de aplicação da carga.

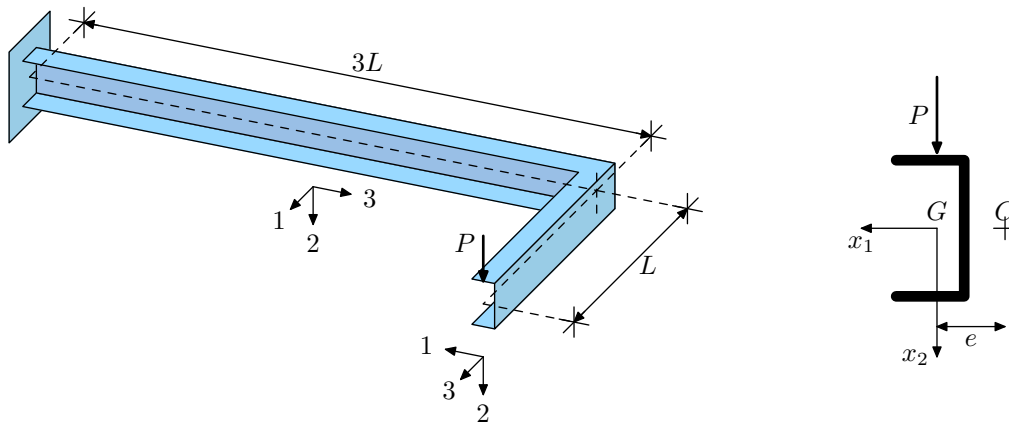


Figura 6: Consola em L com secção em C

Tratando-se de uma estrutura isostática os diagramas de esforços podem ser obtidos apenas com base no equilíbrio. No entanto, a não coincidência entre centros de gravidade e de corte, põe alguns problemas na modelação como peça linear. A abordagem mais simples, passa por traçar os diagramas relativos ao eixo dos centros de gravidade das secções e só depois calcular o momento torsor em relação ao centro de corte — ver figura 7.

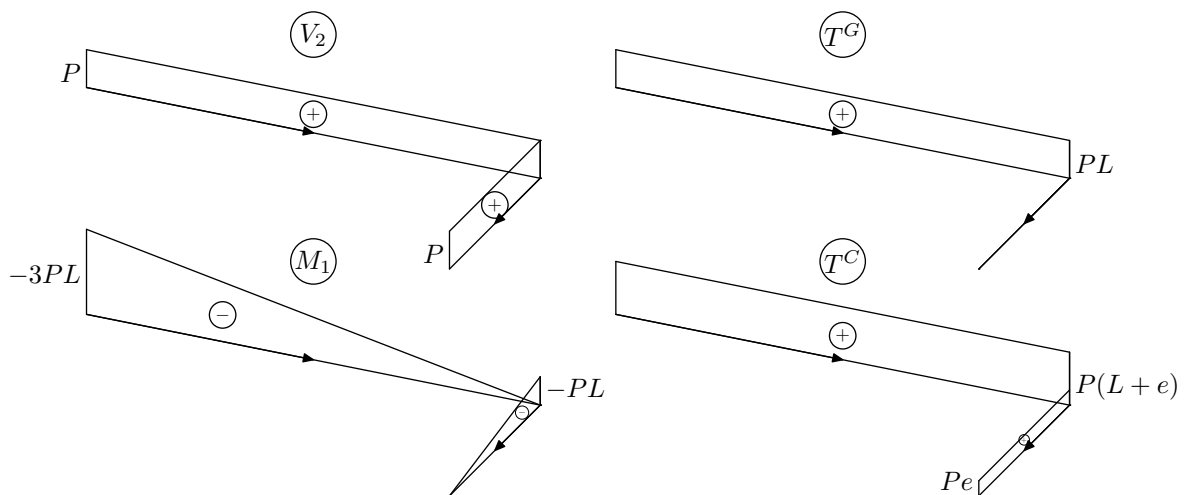


Figura 7: Consola em L com secção em C — diagramas de esforços

Para calcular o deslocamento do ponto de aplicação da carga, comece-se por observar que os diagramas em equilíbrio com a carga unitária são, neste caso, muito semelhantes aos diagramas reais, bastando fazer $P = 1$. Admitindo desprezável a deformabilidade por esforço transversal tem-se

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3}(-3PL)(-3L)(3L) + \frac{1}{3}(-PL)(-L)(L) \right) + \frac{1}{GJ} (P(L+e)(L+e)(3L) + (Pe)(e)(L)) \\ &= \frac{28}{3} \frac{PL^3}{EI} + \frac{PL}{GJ} (3L^2 + 6Le + 4e^2) \end{aligned}$$

6.2 Viga em L apoiada num tirante

Para ilustrar a aplicação do método da carga unitária no contexto do método das forças, considere-se a seguinte estrutura, constituída por uma viga em L, apoiada num encastramento e num tirante, solicitada por uma carga vertical P , como ilustrado na figura 8. Todas as barras têm comprimento L . A secção da viga é quadrada com o lado igual a $\frac{L}{10}$. A secção do tirante também é quadrada mas com lado igual a $\frac{L}{200}$. Admita-se que o módulo de distorção é metade do módulo de elasticidade (é o que acontece se o coeficiente de Poisson for nulo). Pretende-se calcular o deslocamento vertical do ponto Q da secção de meio vão da barra AB .

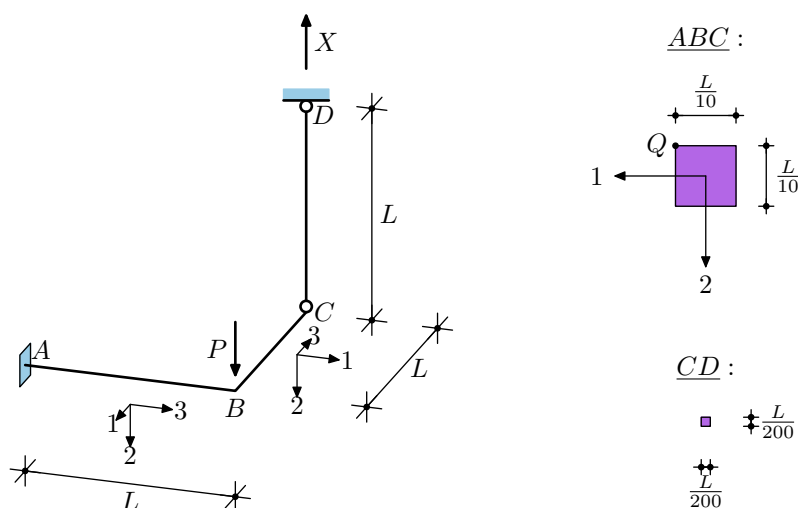


Figura 8: Viga em L apoiada num tirante

As propriedades da secção da viga são

$$EA = E \left(\frac{L}{10} \right)^2 = 1.00 \times 10^{-2} EL^2 \quad GA'_2 = \frac{E}{2} \frac{5}{6} \left(\frac{L}{10} \right)^2 = 4.17 \times 10^{-3} EL^2$$

$$EI_1 = E \frac{1}{12} \left(\frac{L}{10} \right)^4 = 8.33 \times 10^{-6} EL^4 \quad GJ = \frac{E}{2} 0.141 \left(\frac{L}{10} \right)^4 = 7.05 \times 10^{-6} EL^4$$

e o tirante tem

$$EA = E \left(\frac{L}{200} \right)^2 = 2.50 \times 10^{-5} EL^2$$

Trata-se de uma estrutura hiperestática do primeiro grau, pelo que se recorre ao método das forças. O sistema base é obtido libertando a reacção vertical em D . Os diagramas de esforços correspondentes ao sistema base, submetido ao carregamento original e à acção da incógnita hiperestática estão representados na figura 9. O cálculo do deslocamentos na libertação introduzida é

$$u^0 = 0 + \frac{P(-1)L}{4.17 \times 10^{-3} EL^2} + \frac{\frac{1}{3}(-PL)(L)L}{8.33 \times 10^{-6} EL^4} + 0 = \frac{P}{EL} (0 - 2.40 \times 10^2 - 4.00 \times 10^4 + 0)$$

$$= -4.02 \times 10^4 \frac{P}{EL}$$

$$u^1 = \frac{1^2 L}{2.50 \times 10^{-5} EL^2} + \frac{2(-1)^2 L}{4.17 \times 10^{-3} EL^2} + \frac{2\frac{1}{3}(L)^2 L}{8.33 \times 10^{-6} EL^4} + \frac{(L)^2 L}{7.05 \times 10^{-6} EL^4}$$

$$= \frac{1}{EL} (4.00 \times 10^4 + 4.80 \times 10^2 + 8.00 \times 10^4 + 1.42 \times 10^5)$$

$$= \frac{2.62 \times 10^5}{EL}$$

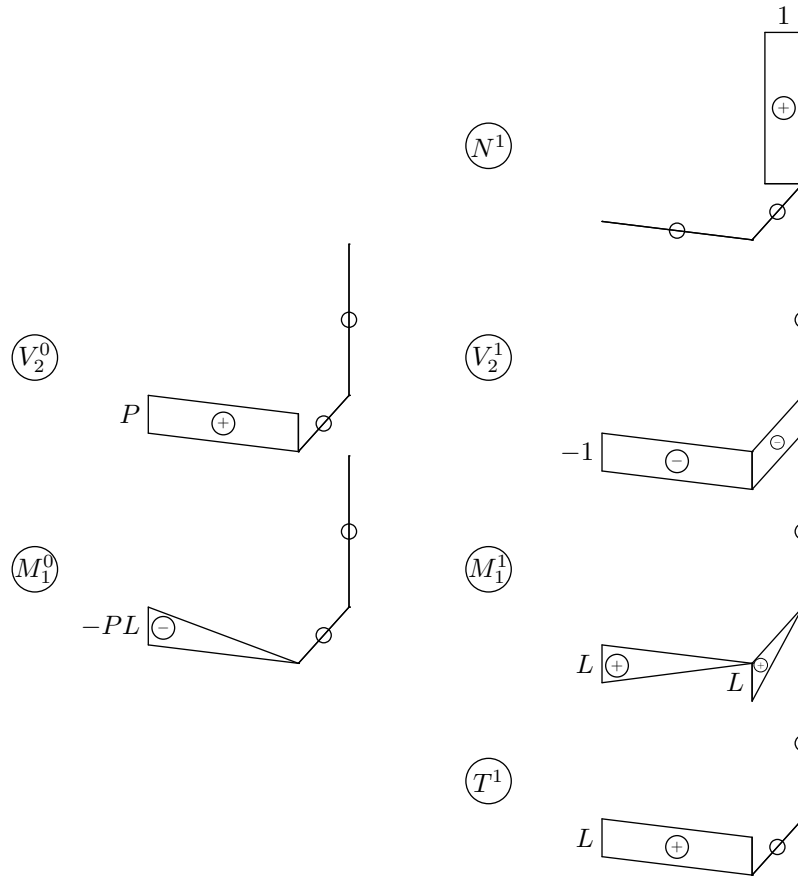


Figura 9: Viga em L apoiada num tirante — diagramas de esforços no sistema base

em que as quatro parcelas de cada cálculo se referem, respectivamente, ao (i) esforço axial no tirante e (ii) esforço transversal, (iii) momento flector e (iv) momento torsor na viga, já que todas as outras parcelas são (sempre) nulas. Pode observar-se que, como é frequente em peças lineares, a contribuição da deformabilidade por esforço transversal é muito pequena, podendo geralmente ser desprezada. Note-se, porém, que todas as outras parcelas têm contribuições da mesma ordem de grandeza.

A equação do método das forças revela então

$$u^0 + Xu^1 = 0 \Rightarrow X = -\frac{u_0}{u_1} = 0.153P$$

pelo que os diagramas finais, obtidos por sobreposição dos diagramas já determinados, são os que constam da primeira coluna da figura 10.

Para calcular o deslocamento pretendido, aplica-se uma força unitária nesse ponto (excêntrico), o que é equivalente a aplicar uma força unitária e um momento igual a $\frac{L}{20}$ aplicados no eixo da viga, tal como representado na figura 10. Os diagramas que constam da segunda coluna dessa figura bastam ser equilibrados com a carga unitária, pelo que foram calculados arbitrando nula a incógnita hiperestática. Tem-se então

$$\begin{aligned} \delta &= 0 + \frac{\frac{1}{2}(1)(0.847P)L}{4.17 \times 10^{-3}L^2} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{L}{2}\right)(-0.847PL)\frac{L}{2} + \frac{1}{6}\left(-\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{0.847PL}{2}\right)\frac{L}{2}}{8.33 \times 10^{-6}EL^4} + \frac{\frac{L}{20}(0.153L)\frac{L}{2}}{7.05 \times 10^{-6}EL^4} \\ &= \frac{P}{EL} (1.02 \times 10^2 + 1.06 \times 10^4 + 5.43 \times 10^2) \\ &= 1.12 \times 10^4 \frac{P}{EL} \end{aligned}$$

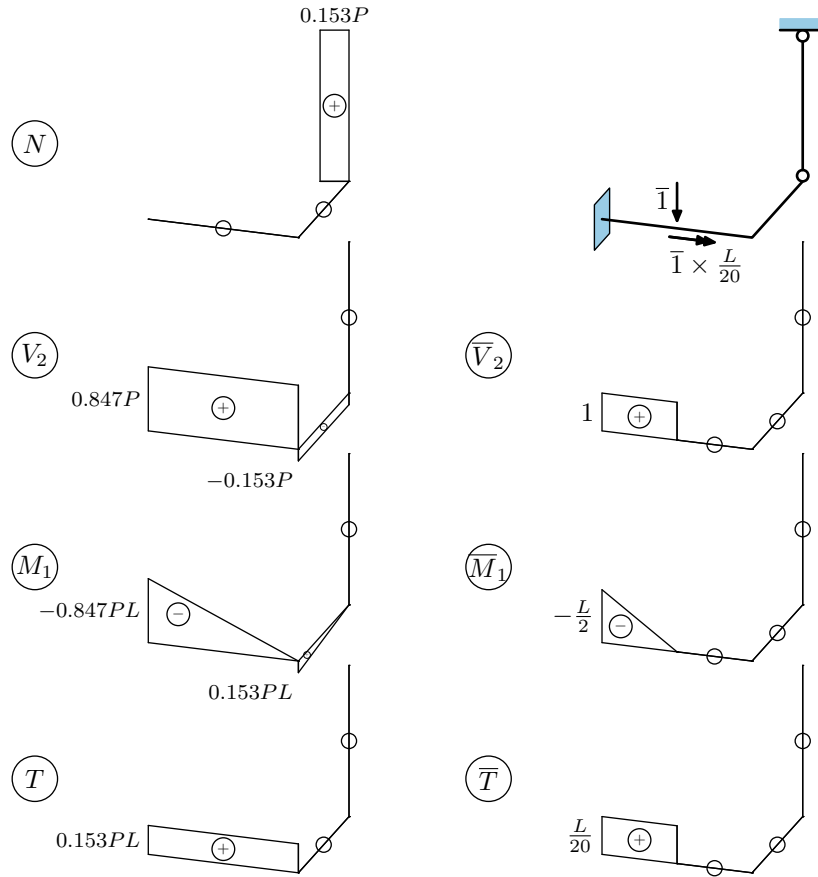


Figura 10: Viga em L apoiada num tirante — diagramas de esforços finais e equilibrados para cálculo do deslocamento Q

7 Energia de deformação em peças lineares

As expressões do PTV para peças lineares, deduzidas na secção 4, podem servir de base para estabelecer uma expressão para a energia de deformação de uma estrutura constituída por peças lineares com comportamento elástico linear. A *densidade* da energia de deformação¹⁵ de um sólido elástico linear isotrópico¹⁶ é

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

pelo que a energia de deformação total é

$$U = \int_V W dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

Observa-se uma certa semelhança entre esta expressão e a expressão (8) correspondente ao trabalho das forças interiores na equação do PTV, podendo apontar-se apenas duas diferenças. Em primeiro lugar, o factor -1 é substituído pelo factor $\frac{1}{2}$. Em segundo lugar, enquanto que na expressão do PTV o campo de tensões σ_{ij} é totalmente independente do campo de deformações ε_{ij} , na expressão da energia de deformação estes dois campos correspondem à mesma solitação, estando relacionados através das relações constitutivas.

¹⁵Existe aqui um conflito de notação. A densidade da energia de deformação é aqui designada por W mas é importante não confundir com W_{ext} e W_{int} que denotam o trabalho das forças exteriores e interiores no contexto do PTV.

¹⁶Não se considera aqui a presença de tensões iniciais (ou residuais) ou de variações de temperatura.

Deste modo, não é difícil de perceber que o mesmo procedimento seguido na secção 4.2, complementado com as leis constitutivas elásticas (ao nível da secção), equações (39) a (44), permite concluir que a energia de deformação para peças lineares é dada por

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\text{barras}} \int_0^L \left[\frac{V_1^2}{GA'_1} + \frac{V_2^2}{GA'_2} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M_1^2}{EI_1} + \frac{M_2^2}{EI_2} + \frac{T^2}{GJ} \right] dx_3 \quad (59)$$

Também aqui, se deve ter presente que o recurso às equações (39) a (44) exige momentos flectores referidos a eixos principais centrais de inércia e o momento torsor referido ao centro de corte.

Além disso, recorde-se novamente que o campo de deslocamentos considerado na secção 3.5 e usado na secção 4.2 corresponde apenas ao movimento de corpo rígido de cada secção. Assim, convém não esquecer que o cálculo da energia de deformação através da expressão (59) admite como desprezáveis os termos associados à deformabilidade da secção.¹⁷

8 Teoremas da reciprocidade

Uma outra aplicação da equação do PTV é a demonstração do *teorema da reciprocidade de Betti*. É possível demonstrar este teorema quer raciocinando em termos de um corpo contínuo, quer particularizando o conceito para uma estrutura constituída por peças lineares.

Este teorema é importante, essencialmente porque permite estabelecer os resultados teóricos apresentados nas secções 8.4 e 8.5. Importa desde já salientar que, ao contrário do que acontece com o PTV cuja validade se mantém independente do comportamento material (elástico, plástico, etc), o teorema da reciprocidade é exclusivamente aplicável a corpos/estruturas de comportamento elástico linear.

8.1 Teorema da reciprocidade de Betti para um contínuo

Considere-se que o mesmo corpo é submetido a dois carregamentos diferentes, A e B , tal como esquematizado na figura 11. Sejam \mathbf{X}^A e t^A as forças de massa e as forças distribuídas na fronteira do carregamento A , e sejam σ^A , ε^A e \mathbf{u}^A , os correspondentes campos de tensões, de deformações e de deslocamentos (campo elástico). Analogamente, \mathbf{X}^B e t^B constituem o carregamento B , e σ^B , ε^B e \mathbf{u}^B formam o respectivo campo elástico.

Ambos os campos elásticos A e B constituem soluções reais para o correspondente carregamento, sendo portanto soluções simultaneamente equilibradas e compatíveis. Mais concretamente,

- (i) as tensões σ^A estão em equilíbrio com o carregamento \mathbf{X}^A e t^A ;
- (ii) o campo de deslocamentos \mathbf{u}^A é compatível com as ligações ao exterior e com as deformações ε^A ;
- (iii) as tensões σ^B estão em equilíbrio com o carregamento \mathbf{X}^B e t^B ;
- (iv) o campo de deslocamentos \mathbf{u}^B é compatível com as ligações ao exterior e com as deformações ε^B ;

¹⁷Na verdade, se a deformação da secção for constante em x_3 , tal como acontece se os diagramas de esforços forem uniformes — tracção simples, flexão pura ou torção uniforme —, não existe qualquer acréscimo de energia de deformação associada à deformabilidade da secção. Mas, em geral, as secções não se deformam todas por igual, implicando assim o aparecimento de tensões não contempladas na teoria das peças lineares.

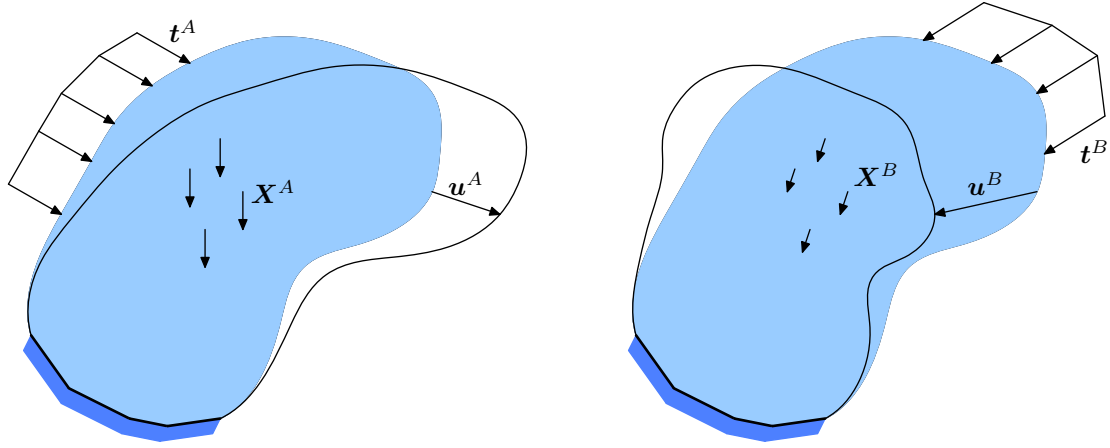


Figura 11: Teorema da reciprocidade de Betti

Tratando-se do mesmo corpo, podemos aplicar o PTV de duas formas distintas: utilizando a solução equilibrada (i) e a solução compatível (iv); ou, pelo contrário, utilizando a solução equilibrada (iii) e a solução compatível (ii). A equação (6) permite então escrever

$$\int_V X_j^A u_j^B dV + \int_{S_t} t_j^A u_j^B dS = \int_V \sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B dV \quad (60)$$

$$\int_V X_j^B u_j^A dV + \int_{S_t} t_j^B u_j^A dS = \int_V \sigma_{ij}^B \varepsilon_{ij}^A dV \quad (61)$$

Tratando-se de soluções reais, é possível relacionar o campo de deformações de cada uma das soluções com o respectivo campo de tensões, nomeadamente através das relações constitutivas. Isto significa que

$$\sigma_{ij}^A = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^A \quad \sigma_{ij}^B = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^B \quad (62)$$

Então, admitindo que as constantes elásticas gozam da grande simetria $C_{ijkl} = C_{klij}$, a função integranda do segundo membro da equação (60) pode ser reescrita como

$$\sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^A \varepsilon_{ij}^B = C_{klij} \varepsilon_{ij}^B \varepsilon_{kl}^A = \sigma_{kl}^B \varepsilon_{kl}^A \quad (63)$$

o que é exactamente coincidente com a função integranda do segundo membro da equação (61). Havendo igualdade entre os segundos membros das equações (60) e (61), terá forçosamente que haver igualdade entre os respectivos primeiros membros,

$$\int_V X_j^A u_j^B dV + \int_{S_t} t_j^A u_j^B dS = \int_V X_j^B u_j^A dV + \int_{S_t} t_j^B u_j^A dS \quad (64)$$

o que corresponde ao seguinte enunciado do teorema de Betti:

Num corpo elástico linear submetido a dois carregamentos distintos, o trabalho que as forças do primeiro carregamento produzem nos deslocamentos provocados pelo segundo carregamento é igual ao trabalho que as forças do segundo carregamento produzem nos deslocamentos provocados pelo primeiro carregamento.

8.2 Teorema da reciprocidade para peças lineares

O teorema da reciprocidade de Betti atrás demonstrado aplica-se a qualquer corpo contínuo em geral e, portanto, também ao caso particular de uma estrutura reticulada. Mas não deixa de ser

interessante uma demonstração alternativa, a qual parte directamente da equação do PTV para peças lineares deduzida na secção 4.

Considere-se então uma estrutura constituída por peças lineares, a qual se admite estar solicitada por dois carregamentos diferentes A e B . Supõem-se conhecidas todas as variáveis da resposta (real) da estrutura a esses carregamentos, nomeadamente esforços, deformações generalizadas (ao nível da secção) e deslocamentos. Mais uma vez, tratando-se do mesmo corpo, podemos aplicar o PTV de duas formas distintas: utilizando a solução equilibrada A e a solução compatível B ; ou, pelo contrário, utilizando a solução equilibrada B e a solução compatível A . De uma forma condensada podemos escrever

$$W_{ext}^{AB} + W_{int}^{AB} = 0 \qquad W_{ext}^{BA} + W_{int}^{BA} = 0$$

onde, por exemplo, W_{ext}^{AB} e W_{int}^{AB} são, respectivamente, o trabalho que as forças exteriores¹⁸ e interiores do carregamento A produzem nos deslocamentos (e deformações) provocados pelo carregamento B .

Numa peça linear com comportamento elástico linear, o trabalho das forças interiores pode ser calculado recorrendo à equação (49) e envolve o trabalho produzido pelos esforços de um carregamento nas deformações generalizados de outro carregamento. É fácil mostrar que W_{int}^{AB} (o trabalho das forças interiores realizado pelos esforços de A nas deformações de B) é forçosamente igual a W_{int}^{BA} (realizado pelos esforços de B nas deformações de A). De facto,¹⁹

$$\begin{aligned} W_{int}^{AB} &= - \sum_{\text{barras}} \int_0^L \left[V_1^A \gamma_1^B + V_2^A \gamma_2^B + N^A \epsilon^B + M_1^A \frac{1}{R_1^B} + M_2^A \frac{1}{R_2^B} + T^A \alpha^B \right] dx_3 \\ &= - \sum_{\text{barras}} \int_0^L \left[V_1^A \frac{V_1^B}{GA_1^A} + V_2^A \frac{V_2^B}{GA_2^A} + N^A \frac{N^B}{EA} + M_1^A \frac{M_1^B}{EI_1} + M_2^A \frac{M_2^B}{EI_2} + T^A \frac{T^B}{GJ} \right] dx_3 \\ &= - \sum_{\text{barras}} \int_0^L \left[V_1^B \frac{V_1^A}{GA_1^A} + V_2^B \frac{V_2^A}{GA_2^A} + N^B \frac{N^A}{EA} + M_1^B \frac{M_1^A}{EI_1} + M_2^B \frac{M_2^A}{EI_2} + T^B \frac{T^A}{GJ} \right] dx_3 \\ &= - \sum_{\text{barras}} \int_0^L \left[V_1^B \gamma_1^A + V_2^B \gamma_2^A + N^B \epsilon^A + M_1^B \frac{1}{R_1^A} + M_2^B \frac{1}{R_2^A} + T^B \alpha^A \right] dx_3 \\ &= W_{int}^{BA} \end{aligned}$$

Crucial nesta equivalência é, evidentemente, o facto de as duas soluções A e B serem não apenas equilibradas e compatíveis mas respeitarem também ambas as equações constitutivas elásticas (39) a (44).

Então, com base nas equações precedentes, podemos simplesmente escrever

$$W_{ext}^{AB} = -W_{int}^{AB} = -W_{int}^{BA} = W_{ext}^{BA}$$

o que corresponde novamente ao enunciado do teorema de Betti, agora aplicado a uma estrutura reticulada.

¹⁸Por exemplo, se os carregamentos A e B tiverem apenas forças concentradas \mathbf{P}^A e \mathbf{P}^B e forças distribuídas \mathbf{p}^A e \mathbf{p}^B , respectivamente, tem-se

$$W_{ext}^{AB} = \sum_{\text{nós}} \mathbf{P}^A \cdot \mathbf{u}^B + \sum_{\text{barras}} \int_0^L \mathbf{p}^A \cdot \mathbf{u}^B dx_3 \qquad W_{ext}^{BA} = \sum_{\text{nós}} \mathbf{P}^B \cdot \mathbf{u}^A + \sum_{\text{barras}} \int_0^L \mathbf{p}^B \cdot \mathbf{u}^A dx_3$$

onde \mathbf{u}^A e \mathbf{u}^B são os deslocamentos provocados pelos carregamentos A e B , respectivamente, calculados no nó ou na secção relevante. Para carregamentos mais complicados usar a equação (46) ou (48) com as óbvias adaptações.

¹⁹Os índices A e B aqui utilizados dizem exclusivamente respeito aos carregamentos A e B , admitindo-se que os esforços e deformações generalizadas são referidos ao centro de gravidade ou ao centro de corte, conforme for conveniente — ver discussão na secção 5.2.

8.3 Teorema da reciprocidade de Maxwell

O teorema da reciprocidade de Maxwell é um caso particular do teorema de Betti que considera dois carregamentos A e B constituídos por duas forças isoladas, respectivamente F_A e F_B , de igual valor, mas eventualmente actuando em pontos diferentes e segundo direcções diferentes. Neste caso, o teorema de Betti diz-nos que

$$F_A u_A^{(B)} = F_B u_B^{(A)}$$

onde $u_A^{(B)}$ é o deslocamento provocado pelo carregamento B, observado no ponto de aplicação de F_A e segundo a direcção desta, e, inversamente, $u_B^{(A)}$ é o deslocamento provocado pelo carregamento A, observado no ponto de aplicação de F_B e segundo a direcção desta. Como se admite que as duas forças têm igual valor, conclui-se que

$$u_A^{(B)} = u_B^{(A)}$$

Uma ilustração desta igualdade está patente na figura 12.

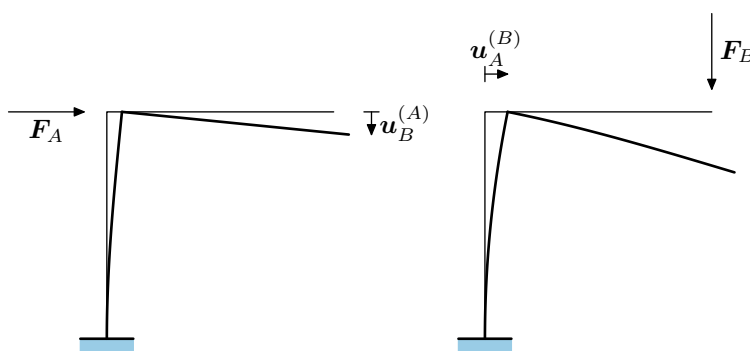


Figura 12: Teorema da reciprocidade de Maxwell

8.4 Coincidência entre o centro de corte e o centro de torção

Considere-se o troço de barra em consola, representado na figura 13, o qual é submetido a dois carregamentos diferentes *alternativos*: um esforço transversal V_A actuando no centro de corte da extremidade livre ou um momento torsor T_B aplicado na secção extrema. Admite-se que o centro de corte está fisicamente ligado à secção de extremidade.

Estando nas condições do teorema de Betti (e nas do teorema de Maxwell se supusermos que os valores de V_A e T_B coincidem), podemos escrever

$$V_A \delta_A^{(B)} = T_B \theta_B^{(A)}$$

Nesta igualdade, $\theta_B^{(A)}$ é a rotação da secção extrema devido à aplicação de V_A e $\delta_A^{(B)}$ é o deslocamento do CC da mesma secção devido à aplicação de T_B . Ora, por definição de *centro de corte* — ponto por onde deve passar a linha de acção do esforço transversal para que a flexão se dê sem torção —, a rotação $\theta_B^{(A)}$ terá que ser forçosamente nula. Consequentemente, a equação precedente só pode ser satisfeita se o deslocamento $\delta_A^{(B)}$ for também nulo. Conclui-se assim que, quando T_B é aplicado, a secção roda em torno do ponto de aplicação de V_A — ver figura 13. O ponto em torno do qual roda uma secção submetida à torção é por definição o *centro de torção*. Pode assim concluir-se que o centro de corte e o centro de torção, embora originando em definições diferentes, designam exactamente o mesmo ponto.

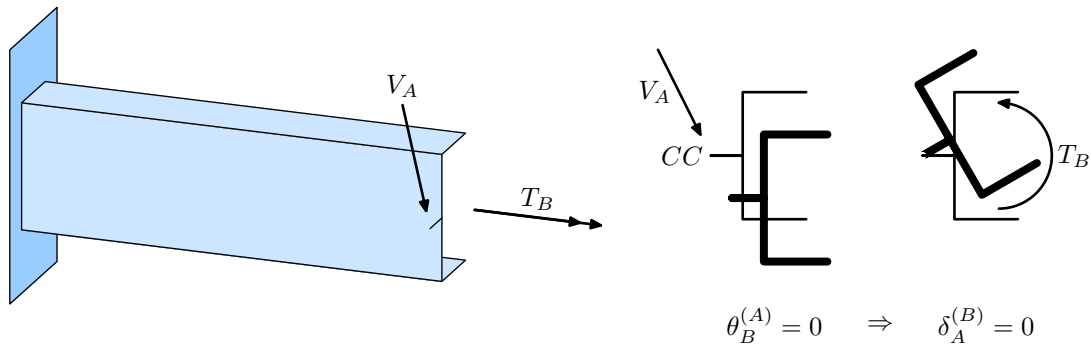


Figura 13: Coincidência entre o centro de corte e o centro de torção

8.5 Simetria da matriz de flexibilidade

Quando se analisa uma estrutura mais do que uma vez hiperestática através do método das forças é, naturalmente, necessário considerar mais do que uma incógnita hiperestática. Se n for o grau de hiperestaticidade, o sistema base é obtido através da introdução de n libertações e a equação do método das forças é, na realidade, um sistema de n equações a n incógnitas, da forma

$$\begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ \vdots \\ u_n^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \cdots & u_1^n \\ u_2^1 & u_2^2 & \cdots & u_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^1 & u_n^2 & \cdots & u_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde o termo genérico do vector coluna, u_i^0 , representa o deslocamento na libertação i quando o sistema base é sujeito ao carregamento original e o termo genérico da matriz de flexibilidade, $f_{ij} = u_i^j$, representa o deslocamento na libertação i quando o sistema base é sujeito apenas à acção da incógnita hiperestática $X_j = 1$.

Se aplicarmos o teorema de Betti (ou o teorema de Maxwell) tomando para carregamentos A e B a actuação isolada de cada uma das incógnitas hiperestática $X_i = 1$ e $X_j = 1$, respectivamente, temos

$$X_i u_i^j = X_j u_j^i \quad \Rightarrow \quad u_i^j = u_j^i \quad \Rightarrow \quad f_{ij} = f_{ji}$$

Por outras palavras, na análise de uma estrutura elástica linear pelo método das forças, a matriz de flexibilidade é sempre simétrica. A figura 14 evidencia o significado físico desta simetria num problema duas vezes hiperestático.

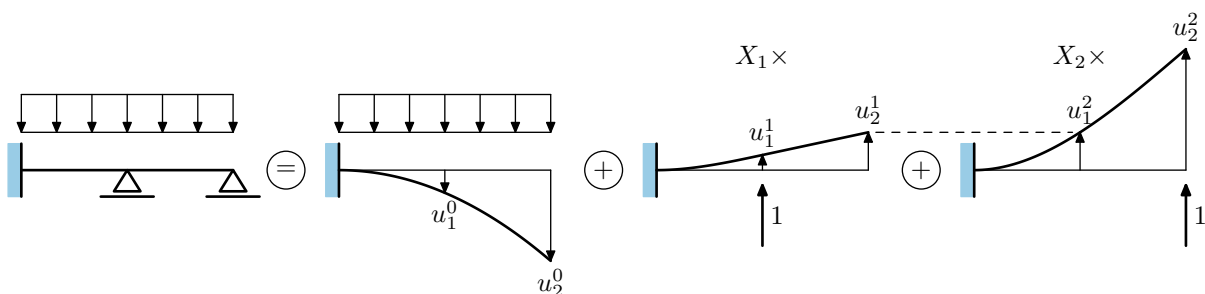


Figura 14: Simetria da matriz de flexibilidade $u_2^1 = u_1^2$

Anexo: teoremas da divergência

Recorda-se aqui o teorema da divergência. Considere-se um domínio de integração D (o qual pode ser 1D, 2D ou 3D), com fronteira F (dois pontos, uma linha ou uma superfície) e uma função integranda da forma $f_{,i} g$

$$\int_D f_{,i} g dD = \int_D ((fg)_{,i} - fg_{,i}) dD = \int_F f g n_i dF - \int_D f g_{,i} dD$$

Esta forma geral toma os seguintes aspectos para um intervalo simples $[0, L]$ (caso em que o teorema da divergência é geralmente referido por «integração por partes»), uma área A (de fronteira Γ) ou um volume V (de fronteira S):

$$\begin{aligned}\int_0^L f_{,i} g dx_3 &= [fg]_0^L - \int_0^L f g_{,i} dx_3 \\ \int_A f_{,i} g dA &= \int_\Gamma f g n_i d\Gamma - \int_A f g_{,i} dA \\ \int_V f_{,i} g dV &= \int_S f g n_i dS - \int_V f g_{,i} dV\end{aligned}$$

Manuel Ritto Corrêa

Fevereiro 2011
Setembro 2014 (correção de gralhas)