

**Modelação do escoamento com emulsionamento de ar  
em descarregadores de cheias em canal**

**Adriana Antunes de Melim**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
**Engenharia Civil**

Orientador

Professor Doutor Jorge de Saldanha Gonçalves Matos

**Júri**

Presidente: Professor Doutor Rodrigo de Almada Cardoso Proença de Oliveira

Orientador: Professor Doutor Jorge de Saldanha Gonçalves Matos

Vogal: Professora Doutora Inês Osório de Castro Meireles

**Junho de 2018**



## **Declaração**

Declaro que o presente documento é um trabalho original da minha autoria e que cumpre todos os requisitos do Código de Conduta e Boas Práticas da Universidade de Lisboa.



## **Agradecimentos**

Ao longo da realização da presente dissertação foi essencial a colaboração, empenho e disponibilidade por parte de inúmeras pessoas.

Em primeiro lugar, que expressar o meu agradecimento e reconhecimento ao Prof. Doutor Jorge de Saldanha Matos, orientador da dissertação, pela orientação perspicaz, aconselhamento, apoio contínuo e disponibilidade que providenciou durante esta longa jornada. Sei que cresci ao longo deste enorme processo e sem o professor não teria sido possível.

Aos meus colegas e queridos amigos Luís Lopes e Diogo Semedo, que sem o seu companheirismo e sua amizade ao longo destes anos, a finalização do curso dificilmente seria alcançada.

À minha grande amiga Madalena Pereira, pela sua generosidade, disponibilidade e por me fazer sair da minha zona de conforto.

Ao meu namorado Guilherme, fundamental companheiro desta jornada. Agradeço o teu apoio, o teu carinho e a motivação extra que precisava para concluir o trabalho.

À minha mãe e melhor amiga, ouvinte e conselheira, agradeço tudo.

Ao meu pai e à minha irmã Carlota, pela sua presença e apoio em todos os momentos.



## Resumo

A presente dissertação é dedicada ao estudo do escoamento com emulsão de ar em descarregadores de cheias em canal com paramento convencional, de betão.

Assumindo como elementos de base para o presente estudo o declive do descarregador, a rugosidade do fundo e das paredes e o caudal unitário escoado, foi implementado um conjunto de situações práticas orientado para a determinação da localização da seção de afloramento da camada limite turbulenta e obtenção de grandezas relevantes do escoamento a montante daquela seção, como a espessura da camada limite, a altura do escoamento e a velocidade média do escoamento. Os resultados foram obtidos através de um modelo numérico simplificado, com base numa formulação semi-empírica sugerida na literatura sobre o tema. Posteriormente, apresentam-se e analisam-se curvas de regressão normalizadas com recurso aos softwares *TableCurve 2D*<sup>®</sup> e *TableCurve 3D*<sup>®</sup>, com o intuito de permitir a obtenção das grandezas principais do escoamento ao longo do descarregador de forma expedita. Também se procedeu ao estudo do desenvolvimento da concentração média de ar a jusante da seção de afloramento da camada limite, com o objetivo de obter soluções explícitas para a obtenção desta última grandeza. Por fim, realizou-se uma análise orientada para relacionar as extensões dos trechos do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite e a jusante daquela seção, correspondente ao escoamento gradualmente variado com emulsão de ar.

Palavras-chave: descarregador de cheias em canal, camada limite turbulenta, seção de afloramento da camada limite, escoamento de emulsão ar-água, emulsão de ar.





## Abstract

The present study is focused on the air entrainment on conventional spillway chutes downstream of concrete dams.

This numerical study has assumed as input data the discharge, the surface roughness and the channel slope, in order to determine the location of the point of inception of air entrainment, along with the main flow properties at and upstream of such location, such as the boundary layer width, the flow depth and the mean water velocity. The results were obtained through a simplified numerical model based on a semi-empirical formulation suggested in the literature on the subject. Subsequently, standard regression curves, obtained using *TableCurve 2D*<sup>®</sup> and *TableCurve 3D*<sup>®</sup>, were presented and analysed in order to estimate the main flow properties along the spillway chute in an expeditiously way. Subsequently, a study on the development of the mean air concentration along the gradually-varied flow region downstream of the inception point was carried out, in order to obtain an explicit formula for its determination. Finally, an analysis was carried out to relate the lengths of the flow region upstream of the inception point and the flow region downstream of such location, corresponding to the self-aerated gradually-varied flow.

Key-Words: spillway chute, turbulent boundary layer, inception point, air-water flow, air entrainment.



# Índice do texto

1.	Introdução .....	1
1.1.	Enquadramento geral.....	1
1.2.	Objetivos.....	2
1.3.	Organização da dissertação.....	2
2.	Escoamento de emulsão ar-água em descarregadores de cheias em canal .....	5
2.1.	Considerações prévias.....	5
2.2.	Fenómeno de emulsão de ar .....	5
2.2.1	Desenvolvimento da camada limite .....	6
2.2.2	Escoamento de elevada velocidade com superfície livre .....	7
2.3.	Seção de afloramento da camada limite: localização e grandezas características .....	11
2.4.	Grandezas características do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite .....	17
2.5.	Grandezas características do escoamento de emulsão ar-água .....	20
2.6.	Escoamento de emulsão ar-água em regime uniforme .....	21
2.7.	Escoamento gradualmente variado de emulsão ar-água .....	27
3.	Modelação do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite .....	31
3.1.	Considerações prévias.....	31
3.2.	Metodologia e hipóteses simplificativas.....	31
3.3.	Modelação numérica simplificada .....	33
3.4.	Desenvolvimento de expressões adimensionais .....	39
4.	Modelação do escoamento com emulsão de ar a jusante da seção de afloramento da camada limite.....	47
4.1.	Considerações prévias.....	47
4.2.	Desenvolvimento de expressões adimensionais .....	49
4.3.	Estudo comparativo .....	59
4.4.	Extensão do trecho gradualmente variado .....	62
5.	Conclusões e sugestões para o prosseguimento do estudo.....	69

Anexo I – Tabela de cálculo para obtenção das grandezas características do escoamento a montante e na seção de afloramento da camada limite.

Anexo II – Curva de regressão  $h/h_i$  vs  $s/s_i$ : solução obtida através do software *TableCurve 3D*<sup>®</sup>.

Anexo III - Tabela de cálculo para a determinação da concentração média de ar do escoamento a jusante da seção de afloramento da camada limite.

# Índice de Tabelas

Tabela 2.1 - Espessura da camada limite e a localização e a altura da seção de afloramento da camada limite (adaptado de Chanson, 1996). .....	15
Tabela 2.2 - Condições do escoamento na seção de afloramento da camada limite (adaptado de Chanson, 1996).....	16
Tabela 2.3 - Concentração média de ar em regime uniforme e parâmetros $\beta'$ e $\gamma'\cos\theta$ , em função do declive do canal (adaptado de Chanson, 1989). .....	26
Tabela 3.1 – Valores adotados na simulação. ....	31
Tabela 3.2 - Valores de a e b obtidos através do software TableCurve 2D®.....	40
Tabela 4.1 – Valores de base para a resolução da integração analítica da Eq. (2.48). ....	47
Tabela 4.2 - Valores de $a$ utilizados para obtenção da Eq. (4.3). ....	50
Tabela 4.3 - Valores de $b$ utilizados para a obtenção da Eq. (4.4).....	51
Tabela 4.4 - Valores de entrada para a análise comparativa de resultados obtidos por Cain (1978). ....	60
Tabela 4.5 –Localização e grandezas características do escoamento na seção de afloramento da camada limite: resultados experimentais de Cain (1978).....	60
Tabela 4.6 – Análise comparativa de $\bar{C}$ para $q=2,23 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .....	61
Tabela 4.7 - Comparação de valores de $\bar{C}$ para $q=3,15 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .....	62
Tabela 4.8 - Valores de $s_{u^*}/s_i$ quando $\bar{C}/\bar{C}_u=0,90$ . ....	63
Tabela 4.9 - Valores de $s_{u^*}/s_i$ quando $\bar{C}/\bar{C}_u=0,95$ . ....	63
Tabela 4.10 - Valores de $s_{u^*}/s_i$ quando $\bar{C}/\bar{C}_u=0,99$ . ....	63
Tabela 4.11 - Erros máximos (em percentagem) dos valores obtidos pela Eq. (4.5) face à relação $s_{u^*}/s_i$ quando $\bar{C}/\bar{C}_u=0,90$ . ....	65
Tabela 4.12 - Parâmetros a,b e c.....	66
Tabela 4.13 - Erros máximos (em percentagem) dos valores obtidos pela Eq (4.5) face à relação $s_{u^*}/s_i$ quando $\bar{C}/\bar{C}_u=0,95$ .....	66
Tabela 4.14 – Erros máximos (em percentagem) dos valores obtidos pela Eq (4.5) face à relação $s_{u^*}/s_i$ quando $\bar{C}/\bar{C}_u=0,99$ .....	66



# Índice de Figuras

Figura 2.1- Descarregador de cheias da barragem de Aviemore, Nova Zelândia (in <a href="https://www.facebook.com/kevin.bird.336">https://www.facebook.com/kevin.bird.336</a> acessado em 02/05/2018). .....	5
Figura 2.2 - Esquema sugerido por Harleman onde distingue as regiões turbulenta e não turbulenta do escoamento de superfície livre ao longo do canal descarregador (adaptado de Wood,1991).....	7
Figura 2.3 - Representação esquemática do escoamento com elevada velocidade ao longo de um canal descarregador (adaptado de Cain, 1978). .....	8
Figura 2.4 - Estrutura do escoamento no trecho com emulsão de ar completamente desenvolvido (adaptado de Wood, 1991, in Meireles, 2004).....	9
Figura 2.5 - Fotografia tirada por uma câmara de alta velocidade de um escoamento com superfície livre para $q=0,17 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e a uma distância de 1,9 m da soleira descarregadora. A altura média equivalente é igual a 3,52 cm (adaptado de Valero e Bung, 2016).....	10
Figura 2.6 - Localização da seção de afloramento da camada limite num descarregador de cheias com paramento convencional (adaptado de Wood, 1991). .....	14
Figura 2.7 - Representação esquemática da espessura de deslocamento da camada limite. ..	18
Figura 2.8 - Concentração média de ar em função do declive do canal (adaptado de Chanson, 1996). .....	22
Figura 2.9 - Concentração média de ar em regime uniforme em função do ângulo do canal descarregador com horizontal (Matos, 1999). .....	23
Figura 2.10 - Concentração de ar em função da distância ao fundo (retirado de Wilhelms e Gulliver, 2005). .....	24
Figura 2.11 - Distribuição da concentração de ar em regime uniforme, para diversos valores do declive do canal obtidos por Straub e Anderson (1958) (retirado de Wood, 1985).....	26
Figura 2.12 - Velocidade ascensional das bolhas de ar em função do diâmetro equivalente das bolhas (Haberman e Mortan,1956 in Kramer e Hager, 2005). .....	29
Figura 3.1 – Representação esquemática para o cálculo da altura do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite .....	32
Figura 3.2. - Altura do escoamento em função da distância ao longo do descarregador desde a crista. Valores obtidos através de formulação empírica e do procedimento iterativo para caudais unitários de 5 e 40 $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ , ângulo com a horizontal de 30° e 50° e coeficiente de Manning-Strickler $K=50$ , e $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ . .....	34

Figura 3.3 - Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador desde a crista. Valores obtidos através de formulação empírica e do procedimento iterativo para caudais unitários de 5, 20, 40 e 100 m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> , ângulo do canal com a horizontal de 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60° e 70° e coeficiente de Manning-Strickler K=50, K=75 e K=90 m <sup>1/3</sup> s <sup>-1</sup> .	36
Figura 3.4 – Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador desde a crista: (a) $\theta=10^\circ$ ; (b) $\theta=20^\circ$ ; (c) $\theta=30^\circ$ ; (d) $\theta=40^\circ$ ; (e) $\theta=50^\circ$ ; (f) $\theta=60^\circ$ (g) $\theta=70^\circ$ .	38
Figura 3.5 – Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do canal: resultados obtidos através de formulação empírica e do procedimento iterativo para diversos caudais, tipos de rugosidade e ângulo com a horizontal de 10°.	39
Figura 3.6 - Parâmetro $a$ da Eq. (3.7) em função do ângulo do descarregador com o plano horizontal.	40
Figura 3.7 - Parâmetro $b$ da Eq. (3.8) em função do ângulo do descarregador com o plano horizontal.	41
Figura 3.8 - Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador desde a crista. Comparação de resultados para o ângulo com a horizontal de 10°: (a) $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (b) $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (c) $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .	42
Figura 3.9 - Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador desde a crista. Comparação de resultados para o ângulo com a horizontal de 40°: (a) $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (b) $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (c) $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .	43
Figura 3.10 - Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador desde a crista. Comparação de resultados para o ângulo com a horizontal de 70°: (a) $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (b) $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (c) $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .	44
Figura 3.11 - Representação da Eq. (3.14) e valores obtidos através do procedimento numérico.	46
Figura 4.1 – Concentração média de ar a jusante da seção de afloramento da camada limte: valores obtidos por integração analítica para ângulos com a horizontal de 30°, 50° e 70°, caudais unitários de 5, 40 e 100 m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> e coeficiente de Manning-Strickler K=75 m <sup>1/3</sup> s <sup>-1</sup> .	48
Figura 4.2 – Concentração média de ar a jusante da seção de afloramento da camada limite: valores obtidos por integração analítica para um ângulo com a horizontal de 30° e valores do caudal representados na Tabela 4.1.	49
Figura 4.3 – Parâmetro $a$ da Eq. (4.2) em função do $\text{sen}\theta$ .	51
Figura 4.4 - Parâmetro $b$ da Eq.(4.2) em função do $\text{sen}\theta$ e $h_c/k$ .	52



Figura 4.5 – Parâmetro b da Eq. (4.2) em função do $\sin\theta$ e para valores de $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , $q=40 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .	52
Figura 4.6 – Concentração média de ar adimensionalizada em função da distância longitudinal à seção de afloramento da camada limite: comparação de resultados para $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . (a) $\theta=10^\circ$ (b) $\theta=20^\circ$ (c) $\theta=30^\circ$ (d) $\theta=40^\circ$ (e) $\theta=50^\circ$ (f) $\theta=60^\circ$ (g) $\theta=70^\circ$ .	54
Figura 4.7- Concentração média de ar adimensionalizada em função da distância longitudinal à seção de afloramento da camada limite: comparação de resultados para $q=10 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . (a) $\theta=10^\circ$ (b) $\theta=20^\circ$ (c) $\theta=30^\circ$ (d) $\theta=40^\circ$ (e) $\theta=50^\circ$ (f) $\theta=60^\circ$ (g) $\theta=70^\circ$ .	55
Figura 4.8 - Concentração média de ar adimensionalizada em função da distância longitudinal à seção de afloramento da camada limite: comparação de resultados para $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (a) $\theta=10^\circ$ (b) $\theta=20^\circ$ (c) $\theta=30^\circ$ (d) $\theta=40^\circ$ (e) $\theta=50^\circ$ (f) $\theta=60^\circ$ (g) $\theta=70^\circ$ .	56
Figura 4.9 - Concentração média de ar adimensionalizada em função da distância longitudinal à seção de afloramento da camada limite: comparação de resultados para $q=40 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . (a) $\theta=10^\circ$ (b) $\theta=20^\circ$ (c) $\theta=30^\circ$ (d) $\theta=40^\circ$ (e) $\theta=50^\circ$ (f) $\theta=60^\circ$ (g) $\theta=70^\circ$ .	57
Figura 4.10 - Concentração média de ar adimensionalizada em função da distância longitudinal à seção de afloramento da camada limite: comparação de resultados para $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . (a) $\theta=10^\circ$ (b) $\theta=20^\circ$ (c) $\theta=30^\circ$ (d) $\theta=40^\circ$ (e) $\theta=50^\circ$ (f) $\theta=60^\circ$ (g) $\theta=70^\circ$ .	58
Figura 4.11 - Concentração média de ar em função da distância adimensionalizada à seção de afloramento da camada limite, para $q=2,23 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .	61
Figura 4.12 - Concentração média de ar em função da distância adimensionalizada à seção de afloramento da camada limite, para $q=3,15 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .	61
Figura 4.13 - Representação gráfica da superfície de regressão dos valores de $s_{u^*}/s_i$ quando $\bar{C}/\bar{C}_u=0,9$ .	64
Figura 4.14 - Representação gráfica da superfície de regressão dos valores de $s_{u^*}/s_i$ quando $\bar{C}/\bar{C}_u=0,9$ e para $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , $q=40 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .	65



# Simbologia

## Latinas minúsculas

$b$	Largura do canal
$g$	Aceleração da gravidade
$h$	Altura de água
$h_{eq}$	Altura equivalente de água
$h_c$	Altura crítica do escoamento
$h_i$	Altura equivalente de água na seção de afloramento da camada limite
$h_u$	Altura equivalente de água em regime uniforme
$h_{cs}$	Altura crítica adaptada
$k$	Rugosidade absoluta equivalente
$q$	Caudal unitário
$q_{ar}$	Caudal unitário de ar
$s_*$	Coordenada medida segundo a soleira do canal, com origem na seção de afloramento da camada limite
$s_{u*}$	Desenvolvimento do trecho gradualmente variado com emulsionamento de ar, a jusante da seção de afloramento da camada limite
$u$	Velocidade do escoamento à distância $y$ da soleira
$u_p$	Velocidade de penetração do ar através da superfície livre na direção perpendicular à soleira do canal
$u_r$	Velocidade característica ascensional das bolhas de ar, na direção vertical
$x_s$	Coordenada longitudinal medida a partir da crista do descarregador
$y$	Coordenada medida segundo a normal à soleira do canal

## Latinas maiúsculas

$C$	Concentração pontual de ar
$\bar{C}$	Concentração média de ar
$\bar{C}_i$	Concentração média de ar na seção de afloramento da camada limite
$\bar{C}_u$	Concentração média de ar em regime uniforme
$\bar{C}_{90_u}$	Concentração média de ar em regime uniforme para a altura característica $Y_{90}$
$\bar{C}_{98_u}$	Concentração média de ar em regime uniforme para a altura característica $Y_{98}$
$Fr_*$	Número de Froude de rugosidade; constante de proporcionalidade
$K$	Coeficiente de Manning-Strickler
$L_i$	Distância medida segundo a soleira do descarregador desde a crista até à seção de afloramento da camada limite
$N$	Cota da superfície livre a montante do descarregador; constante da distribuição de velocidades
$Q$	Caudal de água
$S$	Área da seção transversal

$V_a$	Velocidade característica associada à queda de massas de água
$V_{máx}$	Velocidade do escoamento no exterior da camada limite
$V_{90}$	Velocidade do escoamento para a altura característica $Y_{90}$
$Y_{90}$	Altura característica do escoamento em que $C = 0,9$

### **Gregas minúsculas**

$\alpha$	Coeficiente de energia cinética
$\delta$	Espessura de camada limite turbulenta
$\varepsilon$	Difusidade relativa à densidade média da mistura; taxa de dissipação de energia cinética
$\theta$	Ângulo entre a soleira do canal e o plano horizontal
$\rho_f$	Massa volúmica do fluido
$\rho$	Massa volúmica da água

### **Acrónimos**

USBR	United States Bureau of Reclamation
WES	Waterways Experiment Station

# 1. Introdução

## 1.1. Enquadramento geral

A construção de grandes aproveitamentos hidroelétricos levou à necessidade de elaborar normas relativas ao projeto, à construção, exploração, observação e inspeção dos respetivos órgãos envolventes. A avaliação dos riscos reais e potenciais sobre as populações a jusante e o impacto económico sobre as instituições do setor determinaram a definição de medidas de segurança para evitar a sua rutura (Brito, 2011).

Os descarregadores de cheias são órgãos de segurança de estruturas hidráulicas que se encontram localizados em barragens e cuja função é direcionar o escoamento de montante para jusante durante eventos extremos. Estes órgãos de segurança possibilitam a passagem das cheias para jusante das barragens, evitando assim o galgamento da barragem, no caso do nível da água ultrapassar o nível máximo admissível, devido aos caudais afluentes.

A rutura de barragens está fortemente associada ao incorreto funcionamento dos órgãos de segurança que as constituem, nomeadamente dos descarregadores de cheias. O seu funcionamento deficiente prejudica a capacidade de resposta aos caudais afluentes, podendo originar a destruição parcial ou total da estrutura e ter efeitos catastróficos para toda a envolvente (Quintela, 1981).

Refira-se neste contexto de suscetibilidade ao perigo de rutura de barragens, as determinações constantes das “Normas de Projecto de Barragens” no seu “Capítulo III – Normas para barragens de Betão – Acções da água”, relativas à especificação de condições e fatores, cujos efeitos promovem a degradação dos descarregadores de cheias: “A passagem de grandes caudais pelos órgãos de segurança e exploração gera pressões hidrodinâmicas e pode originar erosão, abrasão e cavitação [...]”.

Os descarregadores de cheias são, portanto, órgãos suscetíveis ao fenómeno de cavitação, devido às altas velocidades combinadas com baixas pressões, conduzindo a ações nocivas através da erosão do betão comprometendo assim a estabilidade da barragem.

Estes órgãos apresentam-se com diferentes tipos e constituições que variam em função das estruturas em que se inserem. Os seus critérios de dimensionamento e conceção devem ter em consideração os aspetos de segurança tanto como as condicionantes económicas de modo a obter uma solução adequada (Pinheiro, 2007).

Em USBR (1983), é referido que 23% do perigo de rutura das barragens é devido ao inadequado dimensionamento de descarregadores de cheias. Estudos anteriores concluíram que o arejamento natural do escoamento pode servir como medida eficaz na prevenção da erosão resultante da cavitação.

## **1.2. Objetivos**

A presente dissertação tem como principal objetivo estudar o escoamento com velocidade elevada em descarregadores de cheias com paramento convencional, no trecho a montante da seção de afloramento da camada limite e no trecho com emulsão de ar. Pretendeu-se desenvolver modelos semi-empíricos para estimar as principais grandezas do escoamento sem emulsão de ar, bem como o emulsão de ar no escoamento gradualmente variado a jusante da seção de afloramento da camada limite.

Indicam-se em seguida os seguintes objetivos específicos do estudo:

- Estimativa da localização da seção de afloramento da camada limite e das grandezas relevantes do escoamento a montante dessa seção, por aplicação de um modelo numérico simplificado, para uma gama alargada de valores do declive do canal, rugosidade do fundo e das paredes, e do caudal unitário.
- Desenvolvimento de expressões para estimar, de forma expedita, grandezas relevantes do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite, como a altura e a velocidade média do escoamento.
- Estimativa da evolução da concentração média de ar a jusante da seção de afloramento da camada limite, no trecho de escoamento gradualmente variado, por aplicação de um modelo numérico simplificado, para uma gama alargada de valores do declive do canal e do caudal unitário.
- Desenvolvimento de expressões para estimar, de forma expedita, a concentração média de ar ao longo do descarregador, a jusante da seção de afloramento da camada limite.
- Estimativa da extensão do trecho de escoamento gradualmente variado, a jusante da seção de afloramento da camada limite, para uma gama alargada de valores do declive do canal e do caudal unitário.
- Desenvolvimento de expressões para estimar, de forma expedita, a extensão do trecho do escoamento gradualmente variado com emulsão de ar.

## **1.3. Organização da dissertação**

O documento encontra-se dividido em cinco capítulos e três anexos. No presente capítulo introdutório, é feita uma breve abordagem do tema da dissertação bem com uma descrição dos objetivos deste trabalho.

No capítulo 2, com enfoque na revisão bibliográfica, inclui-se um enquadramento geral sobre os efeitos do emulsão de ar no dimensionamento de canais descarregadores e como medida de prevenção contra a erosão de cavitação. É também apresentada a descrição das grandezas características do escoamento a montante e a jusante da seção de afloramento da camada limite.

O capítulo 3 centra-se na caracterização do escoamento na seção de afloramento da camada limite e a montante daquela seção. Para o efeito, recorre-se a expressões apresentadas em outros estudos, assim como à aplicação de um modelo numérico simplificado, para uma gama alargada de valores do declive do canal, rugosidade do fundo e das paredes, e do caudal unitário. A partir destes resultados, procede-se ao desenvolvimento de expressões adimensionalizadas para estimar, de forma expedita, as grandezas relevantes do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite, como a altura do escoamento e a velocidade média da água.

No capítulo 4 efetua-se o estudo do escoamento com emulsão de ar a jusante da seção de afloramento da camada limite. Procede-se à estimativa da concentração média de ar ao longo do descarregador, no trecho de escoamento gradualmente variado, por aplicação de um modelo numérico simplificado, para uma gama alargada de valores do declive do canal e do caudal unitário. Com base nestes resultados, desenvolvem-se expressões normalizadas para estimar, de forma expedita, a concentração média de ar ao longo do descarregador, a jusante da seção de afloramento da camada limite. Realiza-se também uma análise da relação entre as extensões dos trechos do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite e a jusante daquela seção, correspondente ao escoamento gradualmente variado com emulsão de ar.

Por último, no capítulo 5, apresentam-se as conclusões do presente trabalho e sugerem-se estudos a desenvolver no futuro sobre o tema.





## 2. Escoamento de emulsão ar-água em descarregadores de cheias em canal

### 2.1. Considerações prévias

No presente capítulo é apresentada uma breve descrição do fenómeno da entrada de ar no escoamento assim como os principais aspetos relativos ao emulsionamento de ar em descarregadores de cheias em canal com paramento convencional.

No âmbito da caracterização do fenómeno é introduzido o conceito de camada limite turbulenta em escoamentos com superfície livre. Posteriormente, inclui-se um breve quadro de síntese incorporando vários dados de exemplos de localização da seção de afloramento da camada limite em barragens de betão.

### 2.2. Fenómeno de emulsionamento de ar

O emulsionamento de ar é um fenómeno que ocorre em escoamentos com superfície livre com velocidade elevada, como o que se observa no descarregador de cheias da barragem de Aviemore (Figura 2.1). A penetração de grandes quantidades de ar no escoamento dá origem às designadas “águas brancas” em que o escoamento se torna branco e espumoso, facilmente identificável por observação visual ao longo do canal descarregador.



Figura 2.1- Descarregador de cheias da barragem de Aviemore, Nova Zelândia (in <https://www.facebook.com/kevin.bird.336> acedido em 02/05/2018).

Estudos prévios acerca da temática do emulsionamento de ar em escoamentos com superfície livre referem que a entrada de ar ocorre quando a camada limite turbulenta causada pela superfície rugosa do canal descarregador intersecta a superfície livre do escoamento (Keller, Lai, & Wood, 1974). Em Wood (1911), é referido que para canais descarregadores de cheias com declives menos significativos a interseção da camada limite turbulenta com a superfície poderá não conduzir à entrada de ar. O autor afirma que é necessário algum nível de turbulência para que o fenómeno ocorra. A referida interseção é denominada como seção de afloramento da camada limite. A jusante desta seção, o escoamento encontra-se em desenvolvimento e é considerado parcialmente arejado, isto é, existe um fluxo de ar que vai sendo introduzido ao escoamento, até atingir toda a profundidade do mesmo. A partir desta seção, o escoamento passa a ser considerado como totalmente arejado, não se verificando alterações significativas nas grandezas características do escoamento ou de ar (Wilhelms & Gulliver, 2005).

### 2.2.1 Desenvolvimento da camada limite

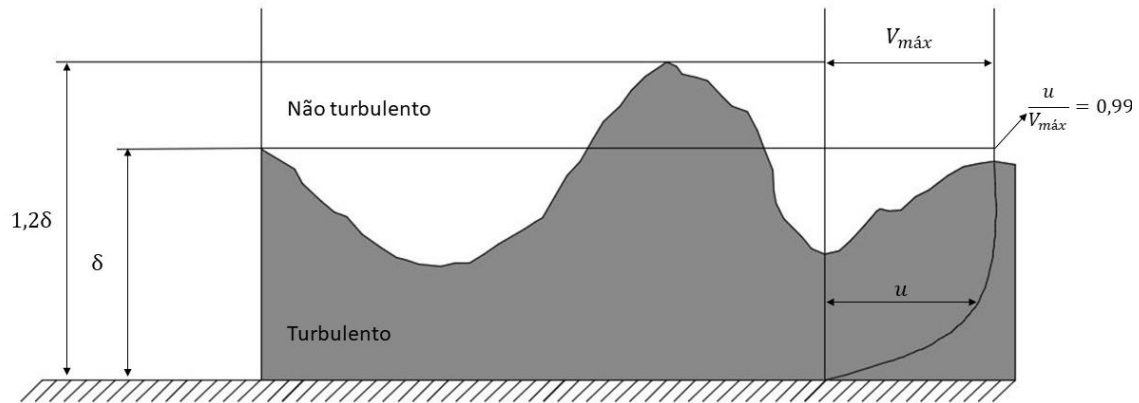
Em 1904, Prandtl apresenta o conceito de camada limite. Afirma que em fluidos reais (de baixa viscosidade, como a água) os efeitos de viscosidade do fluido são apenas perceptíveis numa camada muito fina e muito próxima da fronteira física, designada por camada limite, onde as forças de viscosidade do fluido e as forças de inércia se encontram em equilíbrio. Numa camada adjacente superior, o escoamento comporta-se como um fluido perfeito, ou seja, o seu movimento é dominado pela irrotacionalidade. Prandtl propõe que estes dois domínios sejam analisados separadamente. Na zona onde os efeitos da viscosidade podem ser desprezados, o escoamento comporta-se como quase potencial, indicando que é ligeiramente diferente do escoamento potencial de um fluido sem viscosidade (Bauer, 1951, in Tani, 1977).

Em canais descarregadores de cheias, ambos os domínios existem e são contíguos. O escoamento quase potencial domina toda a profundidade do escoamento imediatamente a jusante da crista do descarregador, enquanto que a camada limite, só começa a ter expressão à medida que o escoamento se vai desenvolvendo, ao longo do canal.

A fase correspondente ao escoamento quase potencial mantém-se praticamente irrotacional e livre de forças tangenciais. À exceção da região do escoamento junto da superfície livre, neste domínio comporta-se essencialmente como um fluido não viscoso, ao longo de um canal descarregador. No entanto, as perturbações que possam existir junto da superfície livre, não têm magnitude suficiente para provocar diferenças significativas, nos valores dos campos de velocidade observados com os valores dos campos de velocidade calculados. Porém, poderá originar diferenças relevantes no âmbito da altura do escoamento, provocando maiores alturas do que as estimadas pelo movimento irrotacional, como é possível observar na presente Figura 2.2.

Nesta figura,  $\delta$  é a espessura de camada limite (definida como sendo a espessura relativa ao ponto onde a velocidade do escoamento é 99% da velocidade potencial,  $u$  é a velocidade à

distância  $y$  da soleira, segundo a normal, e  $V_{m\acute{a}x}$  é a velocidade do escoamento no exterior da camada limite.

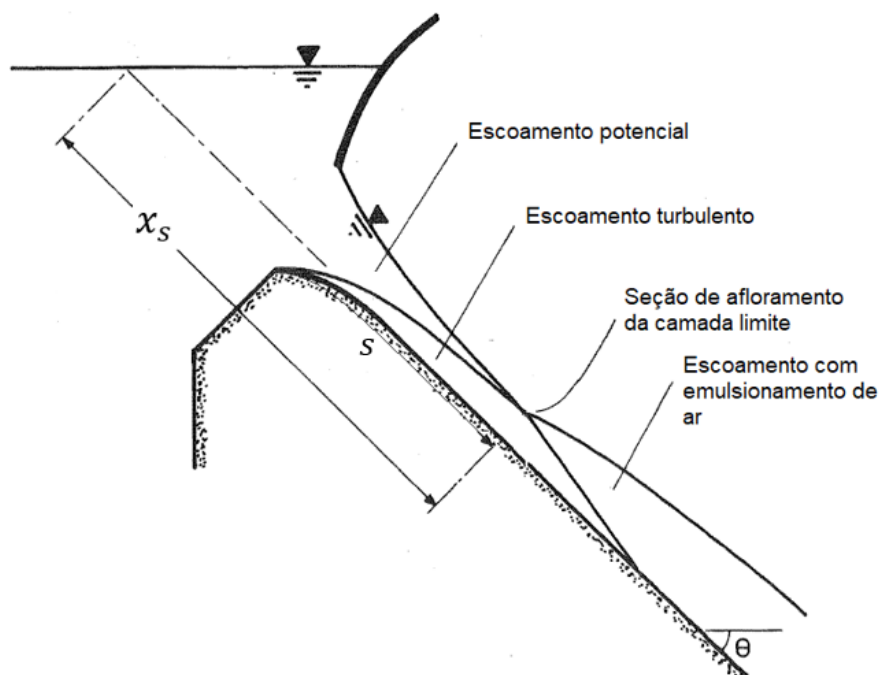


**Figura 2.2 - Esquema sugerido por Harleman onde distingue as regiões turbulenta e não turbulenta do escoamento de superfície livre ao longo do canal descarregador (adaptado de Wood,1991).**

Observando o comportamento do escoamento na região da camada limite, verifica-se a interação de uma nova grandeza. A força tangencial é criada devido à proximidade do escoamento da fronteira física e que torna o estudo do comportamento desta região do escoamento mais complexo. A natureza desta grandeza poderia ser facilmente entendida através do campo de estudo dos escoamentos laminares, onde a relação entre deslocamento do fluido e as forças viscosas, se encontra bem definida. Uma vez que a transição da camada laminar ocorre nos num trecho inicial de extensão muito pequena, considera-se que a camada limite laminar não apresenta relevância no estudo do escoamento com elevada velocidade em canais descarregadores de cheias (Bauer, 1951).

### 2.2.2 Escoamento de elevada velocidade com superfície livre

Em Matos (1999), o autor especifica que ao longo de um descarregador de cheias com paramento convencional de declive constante é possível distinguir distintas características do escoamento a montante e jusante desta seção, representados na Figura 2.3.

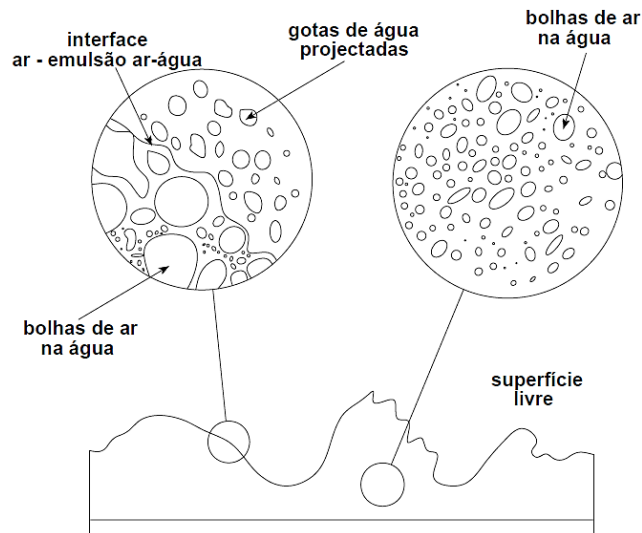


**Figura 2.3 - Representação esquemática do escoamento com elevada velocidade ao longo de um canal descarregador (adaptado de Cain, 1978).**

Imediatamente a jusante da seção de afluência da camada limite, o trecho com emulsão de ar encontra-se em desenvolvimento e comporta-se de maneira distinta do anterior, devido à existência de dois fluidos: ar e água. Quando a penetração das bolhas de ar atinge o fundo do canal, o escoamento passa a designar-se escoamento com emulsão de ar completamente desenvolvido.

O regime uniforme é atingido apenas quando as características representativas do escoamento (como a altura equivalente de água, a concentração média de ar, a distribuição de velocidades e a distribuição da concentração de ar) se tornam constantes ao longo do percurso.

Relativamente à existência da concentração de ar em desenvolvimento no escoamento, Killen (1968) observou e diferenciou duas regiões distintas: região do escoamento líquido com bolhas de ar e região do escoamento arejado com gotas de água. Posteriormente, em Wilhelms e Gulliver (2005), refere-se que o transporte de ar no seio do escoamento é feito através de bolhas de ar retidas entre as ondas da superfície livre, como ilustrado esquematicamente na Figura 2.4.



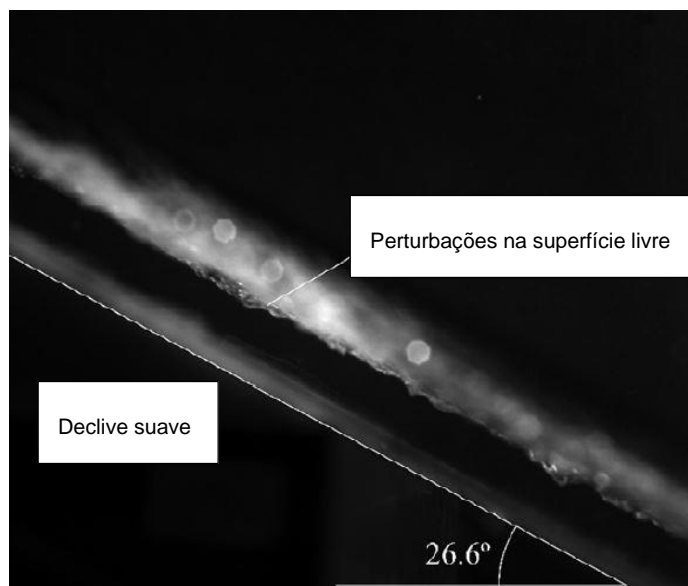
**Figura 2.4 - Estrutura do escoamento no trecho com emulsão de ar completamente desenvolvido (adaptado de Wood, 1991, in Meireles, 2004).**

Cain (1978), com base em resultados experimentais de escoamentos de emulsão ar-água, verifica que o ar é introduzido continuamente no escoamento uma vez que a superfície livre é muito irregular e ondulada. Posteriormente, Bung (2013), no seu estudo com enfoque em ondas de superfície, nota que o transporte de uma quantidade significativa de ar no seio do escoamento é feita a altura característica  $Y_{90}$  (sendo  $Y_{90}$  a altura característica do escoamento onde a concentração de ar é 90%).

A entrada de ar no escoamento tem sido motivo de estudo na área da engenharia hidráulica, devido essencialmente ao empolamento da veia líquida ("bulking") (Hall, 1943) onde a forma de dissipação de energia do escoamento é alterada, levando à geração de elevadas alturas do escoamento e elevados caudais de ar (Valero & Bung, 2016). O empolamento da veia líquida é um parâmetro relevante e essencial para o dimensionamento da altura das paredes do canal descarregador.

Este fenómeno é também de interesse relevante relativo à minimização dos efeitos da erosão de cavitação verificados em escoamentos de altas velocidades (Falvey, 1990). Quando o ar é inserido num escoamento líquido, este torna o meio ar-água compressível e elástico, permitindo a absorção dos impactos causados pelas ondas de pressão, que são formadas por consequência do colapso das bolhas de cavitação, eliminando ou reduzindo de forma significativa a erosão provocada pela cavitação (Quintela, 1981). Peterka (1953) afirma ser possível prevenir os danos causados por cavitação se for garantida uma concentração média de ar no escoamento num intervalo de 5% a 8% junto da fronteira sólida do canal descarregador. Dispositivos de emulsão de ar têm sido concebidos para introduzir fluxos de ar para o interior do escoamento de modo a evitar as consequências anteriormente mencionadas. A localização da seção de afloramento da camada limite é essencial para o engenheiro projetista: na decisão de serem necessários dispositivos de emulsão de ar e na localização dos mesmos de modo a prevenir ou reduzir os danos causados pela cavitação (Wilhelms e Gulliver, 2005).

Considerando o fenômeno da penetração de ar pela superfície livre, é verificada a sua ocorrência quando é atingido um nível de turbulência tal que o caudal de ar absorvido pelo escoamento é superior ao caudal de ar expelido pelo escoamento. Na Figura 2.5, é possível verificar as perturbações existentes na superfície do escoamento que permitem a designada entrada de ar.



**Figura 2.5 - Fotografia tirada por uma câmara de alta velocidade de um escoamento com superfície livre para  $q=0,17 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e a uma distância de 1,9 m da soleira descarregadora. A altura média equivalente é igual a 3,52 cm (adaptado de Valero e Bung, 2016).**

Em Wood (1991), o autor refere que o ar é emulsionado no escoamento transforma-se em bolhas que se distribuem ao longo do canal descarregador (longitudinalmente e em profundidade) devido à elevada turbulência. A concentração de ar da região do escoamento que se encontra próximo da superfície livre é superior e atinge valores entre 0,5 e 0,9. As bolhas de maior dimensão nesta região, atingem valores de diâmetro de 10 a 20 milímetros. Relativamente ao escoamento localizado próximo do fundo do canal, a dimensão apresentada pelas bolhas de ar tende a ser menor, atingindo diâmetros de 0,5 a 3 mm, em resultado da sua redução provocada pelas forças tangenciais condicionadas pela rugosidade do canal.

Em seções mais a jusante da seção de afloramento da camada limite o escoamento atinge o regime uniforme e a respetiva concentração média de ar mantém-se constante. A concentração média de ar é um parâmetro de elevada importância, uma vez que sabendo o volume de ar inserido no escoamento e suas conseqüentes implicações, é facilitado o dimensionamento da estrutura hidráulica. São disso exemplo o aumento da altura para a qual deve ser proporcionada a folga adicional, a seção em que o escoamento ar-água atinge o fundo do canal e as condições de entrada a serem tidas em conta para o dimensionamento da bacia de dissipação. As bolhas de ar localizadas próximas do fundo do canal produzem essencialmente dois efeitos no escoamento. Um dos efeitos é tornar o fluido compressível eliminando ou reduzindo os danos resultantes da cavitação. O outro efeito faz-se sentir na redução das tensões tangenciais no seio do escoamento junto da fronteira sólida e, por isso, uma redução do fator de resistência.

## 2.3. Seção de afloramento da camada limite: localização e grandezas características

O principal interesse do estudo nesta temática é o desenvolvimento do escoamento até à seção de afloramento com a atmosfera. A distância deste ponto e as grandezas do escoamento nesta seção (como a velocidade máxima e a altura) são descritas em função do declive do canal e de grandezas características do escoamento.

Diversas equações têm sido sugeridas para o cálculo do desenvolvimento da camada limite turbulenta em descarregadores de cheias, baseadas em experiências laboratoriais e de observações do escoamento em descarregadores de cheias de barragens.

Uma das expressões foi proposta por Bauer (1954), que sugere a seguinte Eq.(2.1) para o desenvolvimento longitudinal da camada limite

$$\frac{\delta}{x_s} = 0,024 \left( \frac{x_s}{k} \right)^{-0,13} \quad (2.1)$$

sendo

- $x_s$  - coordenada ao longo do descarregador, de acordo com a Figura 2.3;
- $k$  - rugosidade absoluta equivalente.

Mais tarde, Campbell, Cox e Boyd (1965), sugerem a Eq.(2.2) para estimar a espessura da camada limite turbulenta ao longo do canal descarregador, tal que

$$\frac{\delta}{x_s} = 0,08 \left( \frac{x_s}{k} \right)^{-0,233} \quad (2.2)$$

No que respeita à determinação analítica da seção de afloramento da camada limite (seção crítica) outras expressões foram propostas, nomeadamente por Hickox (1939), Lovely (1953), Annemuller (1958), Schlichting (1968), Halbronn (1954), Cassidy (1966) e Rao e Kobus (1974), no entanto as relações encontradas não são independentes da geometria do descarregador.

Posteriormente, Keller e Rastogi (1977), elaboram ábacos que permitem, em função do declive e do número de Froude de rugosidade, a obtenção da localização da seção de afloramento da camada limite e da altura do escoamento nesta seção, mediante aplicação de um modelo de turbulência  $k-\varepsilon^1$  para uma gama significativa de caudais, rugosidade absolutas e declives de

---

<sup>1</sup> O modelo de turbulência  $k-\varepsilon$  é proposto por Launder (1972) e sugere a resolução de duas equações de transporte, uma para  $k$  (energia cinética turbulenta) e uma para  $\varepsilon$  (taxa de dissipação da energia cinética) (in Lúcio, 2015).

canais descarregadores precedidos de uma soleira descarregadora do tipo WES<sup>2</sup>, com paramento vertical a montante,

$$\frac{s_i}{k} = f_1(Fr_*, \text{sen}\theta) \quad (2.3)$$

$$\frac{h_i}{k} = f_2(Fr_*, \text{sen}\theta) \quad (2.4)$$

sendo:

- $s_i$  - distância medida segundo a soleira do descarregador desde a crista até à seção de afloramento da camada limite;
- $h_i$  - altura do escoamento na seção de afloramento da camada limite;
- $Fr_*$  - número de Froude definido em função da rugosidade absoluta ( $Fr_* = \frac{q}{\sqrt{g \text{sen}\theta k^3}}$ );
- $\theta$  - ângulo entre a soleira do canal e o plano horizontal;
- $g$  - aceleração gravítica.

Dando seguimento à sugestão de Bauer (1951) e Halbronn (1952), Cain e Wood (1981) desprezam o efeito da geometria da soleira descarregadora e sugerem as seguintes expressões para o desenvolvimento da espessura da camada limite e distribuição de velocidades ao longo da mesma

$$\frac{\delta}{x_s} = a \left( \frac{x_s}{k} \right)^{-b} \quad (2.5)$$

$$\frac{u}{V_{m\acute{a}x}} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/N} \quad (2.6)$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $N$  são constantes e

- $y$  - coordenada medida segundo a normal à soleira do canal;
- $u$  - velocidade do escoamento à distância  $y$  da soleira;
- $V_{m\acute{a}x}$  - velocidade máxima do escoamento.

Estudos anteriores atribuíam valores de  $a$  e  $b$  de 0,03 e 0,14 respetivamente (Wood, 1991).

Relacionando as Eq. (2.5) e (2.6) com a equação de Bernoulli, Cain e Wood (1981) obtiveram duas novas expressões para o desenvolvimento da camada limite turbulenta e para a altura do escoamento na seção de afloramento da camada limite, tal que:

---

<sup>2</sup> WES – Waterways Experiment Station.



$$\frac{S_i}{k} = \left( \frac{N+1}{a N \sqrt{2}} \right)^{2/(3-2b)} Fr_*^{2/(3-2b)} \quad (2.7)$$

e

$$\frac{h_i}{k} = a^{1/(3-2b)} \left( \frac{N+1}{N \sqrt{2}} \right)^{(2-2b)/(3-2b)} Fr_*^{(2-2b)/(3-2b)} \quad (2.8)$$

Para canais descarregadores de betão convencional, Wood et al. (1983), obtiveram:

$$a = 0,0212 \operatorname{sen} \theta^{-0,11} \quad (2.9)$$

$$b = 0,10 \quad (2.10)$$

$$N = 6 \quad (2.11)$$

Tendo em conta as equações (2.7) a (2.11), Wood et al. (1983) obtiveram:

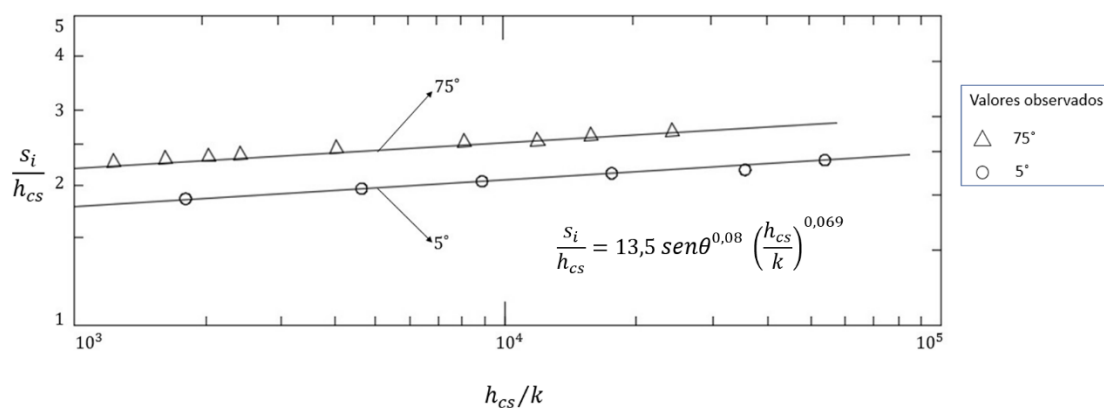
$$\frac{S_i}{k} = 13,6 \operatorname{sen} \theta^{0,0796} Fr_*^{0,713} \quad (2.12)$$

$$\frac{h_i}{k} = \frac{0,223}{\operatorname{sen} \theta^{0,04}} Fr_*^{0,643} \quad (2.13)$$

Na Figura 2.6 é possível observar a comparação dos valores calculados por Keller e Rastogi (1977) para canais descarregadores com ângulos com a horizontal de 5° e 75°, e os valores obtidos pela Eq. (2.14) correspondente à Eq. (2.12) de Wood et al. (1983).

$$\frac{S_i}{h_{cs}} = 13,5 \operatorname{sen} \theta^{0,08} \left( \frac{h_{cs}}{k} \right)^{0,069} \quad (2.14)$$

Em que  $h_{cs} = \left( \frac{q^2}{g \operatorname{sen} \theta} \right)^{1/3}$ .



**Figura 2.6 - Localização da seção de afloramento da camada limite num descarregador de cheias com paramento convencional (adaptado de Wood, 1991).**

Assumindo que  $x_s \approx s$ , que é uma aproximação razoável quando a seção de afloramento da camada limite se encontra a uma distância considerável da soleira descarregadora, tendo em conta as Eq. (2.12) e (2.13) e considerando que a velocidade do ponto exterior da camada limite corresponde a 99% da velocidade potencial, tem-se que:

$$\frac{\delta}{s} = 0,0212 \operatorname{sen}\theta^{-0,11} \left(\frac{s}{k}\right)^{-0,10} \quad (2.15)$$

Esta fórmula da espessura da camada limite é aplicável a canais descarregadores cujo ângulo com o plano horizontal varia entre 5° e 75° e consiste num avanço importante uma vez que permite identificar os fatores que influenciam diretamente o desenvolvimento da camada limite turbulenta. A Eq. (2.15) permite concluir que o desenvolvimento da espessura da camada limite é proporcional à distância que esta se encontra da soleira e do ângulo que o canal descarregador faz com o plano horizontal, e que esta toma maiores valores para uma maior rugosidade absoluta do canal descarregador.

A Tabela 2.1 (Chanson, 1996) reúne as expressões mais relevantes sugeridas por diversos autores para o cálculo da espessura da camada limite turbulenta e para a localização e altura do escoamento na seção de afloramento da camada limite. Na Tabela 2.2, apresentam-se os valores obtidos pela observação de barragens e protótipos, das distâncias entre a soleira descarregadora e o início do escoamento arejado para diferentes caudais unitários e declives.

**Tabela 2.1 - Espessura da camada limite, localização e altura do escoamento na seção de afloramento da camada limite (adaptado de Chanson, 1996).**

Referência	Espessura da camada limite	Localização e altura: SACL	Observações
Schlichting (1979)	$0,37 \left( \frac{V_{m\acute{a}x} s}{\nu} \right)^{-0,2}$		Escoamento turbulento com gradiente de pressão nulo
Schwars e Cosart (1961)	$0,0678 \left( 1 + \frac{0,2838}{s} \right)$		Características do jacto: $d_o=0,0254$ ; $v_o=8,2$ até $25,3 \text{ ms}^{-1}$
Michels e Lovely (1953)		$\frac{\delta}{s_i} = \frac{1}{192,23} q^{1/12}$	Fórmula empírica baseada em valores obtidos em protótipo
Bauer (1954)	$0,024 \left( \frac{s}{k} \right)^{-0,13}$	$\frac{\delta}{s_i} = 0,024 \left( \frac{s_i}{k} \right)^{-0,13}$	Fórmula empírica baseada em valores obtidos em modelo
Keller e Rastogi (1977)	Modelo de turbulência k-ε	Criação de ábacos	Soleira descarregadora do tipo WES
Cain e Wood (1981)	$a \left( \frac{s}{k} \right)^{-0,10}$	$\frac{\delta}{s_i} = \sqrt{a} \left( \frac{N+1}{N\sqrt{2}} Fr_* \right)^{0,9}$	Fórmula baseada em dados de protótipo
Wood et al. (1983)		$\frac{\delta}{s_i} = 0,0212 \text{ sen}\theta^{0,11} \left( \frac{s_i}{k} \right)^{-0,10}$	Fórmula semi-empírica. Boa aproximação aos dados de protótipo

**Tabela 2.2 - Condições do escoamento na seção de afloramento da camada limite (adaptado de Chanson, 1996).**

Referência	Local	$\theta$ ( $^{\circ}$ )	$q$ ( $m^2s^{-1}$ )	Natureza das paredes do canal	$s_i$ (m)	$h_i$ (m)
Lane (1939)	Barragem de Madden, EUA	48,6	13,35	Betão	44,20	
		55,0	1,12		13,81	
		55,0	1,17		15,64	
		55,0	3,56		34,55	
	Barragem de Norris (EUA)	55,0	3,60	Betão	36,30	
		55,0	6,46		46,63	
Hickox (1945)		55,0	8,40		50,06	
		55,0	8,02		50,70	
		50,0	1,65		11,32	
		50,0	1,34		14,00	
	Barragem de Douglas (EUA)	50,0	1,99	Betão	18,85	
		50,0	2,62		25,15	
		50,0	3,36		27,34	
		50,0	4,11		31,34	
		59,0	0,30		7,01	
	Barragem de Glenmaggie (Austrália)	59,0	1,24	Betão	14,63	
		59,0	2,63		22,25	
Michels e Lovely (1953)		59,0	8,87		29,57	
	Barragem de Werribee (Austrália)	60,0	0,14	Betão	2,40	
		60,0	0,20		3,05	
Maitre e Obolensky (1954)	Barragem de Chastang (França)	47,0	18,52	Betão	68,00	
		45,0	2,44		9,40	
Keller (1972)	Barragem de Aviemore (Nova Zelândia)	45,0	4,60	Betão	22,50	
		45,0	6,65		34,50	
		45,0	2,23		18,40	0,152
Cain (1978)	Barragem de Aviemore (Nova Zelândia)	45,0	3,16	Betão	23,80	0,194
	Barragem de	18,5	16,67		100,45	
Ning e Wang (1993)	Bikou (China)	18,5	16,07	Betão	96,45	
		18,5	18,20		100,45	
Anwar (1994)	Açude, Reino Unido	11	0,10 a 0,45		1,40	

## 2.4. Grandezas características do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite

Nesta alínea, procede-se à indicação das grandezas características do escoamento e as hipóteses admitidas para a determinação da altura do escoamento e localização da seção de afloramento da camada limite.

### Caudal escoado na camada limite

O caudal escoado na camada limite turbulenta ( $q_\delta$ ), é calculado recorrendo à integração da distribuição de velocidades em toda a seção,

$$q_\delta = \int_0^\delta u(y) dy = \frac{N}{N+1} V_{m\acute{a}x} \delta \quad (2.16)$$

sendo a distribuição de velocidades dada pela Eq. (2.6) e  $N = 6$ .

A seção de afloramento da camada limite ocorre quando o caudal escoado pela camada limite, iguala o caudal do escoamento real, no canal descarregador. No entanto, a fronteira da camada limite é bastante irregular, verificando-se valores instantâneos da espessura da camada limite cerca de 1,2 vezes superiores ao respetivo valor medio temporal. Neste contexto, Daily e Harleman, (1966) afirmam que o emulsionamento de ar no escoamento, ocorre a montante da seção de afloramento da camada limite,  $h = \delta$ .

Como estimativa da primeira ocorrência de entrada de ar no escoamento, é aceitável utilizar a hipótese de que o caudal total escoado no descarregador iguala o caudal correspondente a uma camada limite de espessura  $1,2\delta$ , ou seja, o caudal escoado na camada limite adicionado de 20 % do caudal que escoaria com velocidade potencial numa lâmina de água com espessura  $0,2\delta$  (Wood,1985, Matos,1990).

Wood (1985) sugere a seguinte correção relativamente à Eq. (2.16), obtendo a seguinte expressão

$$q_{1,2\delta} = \frac{N}{N+1} V_{m\acute{a}x} \delta + 0,2 V_{m\acute{a}x} \delta \quad (2.17)$$

## Espessura de deslocamento da camada limite

A espessura de deslocamento da camada limite definida por  $\delta_d$ , expressa a espessura equivalente de água correspondente ao déficit de vazão em massa existente no interior da camada limite em comparação com um escoamento totalmente irrotacional, ilustrado na Figura 2.7.

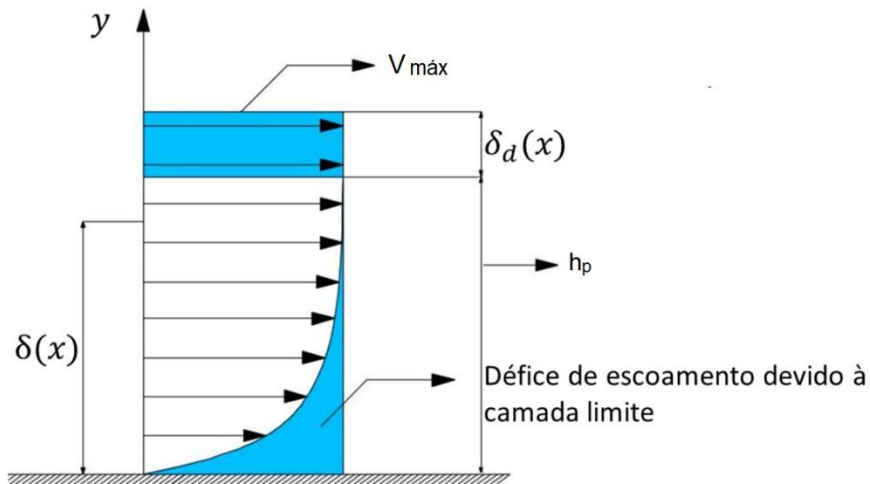


Figura 2.7 - Representação esquemática da espessura de deslocamento da camada limite.

Por outras palavras, este parâmetro representa a diferença entre as alturas de água do escoamento irrotacional e do escoamento real, em que a distribuição de velocidades não é uniforme, para valores idênticos de caudal escoado. Este conceito é então definido pela seguinte expressão:

$$\delta_d = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{V_{máx}}\right) dy = \frac{\delta}{1 + N} \quad (2.18)$$

onde  $V_{máx}$  representa a velocidade do escoamento no exterior da camada limite.

Sendo N obtido de acordo com a Eq. (2.11), tem-se que:

$$\delta_d = \frac{\delta}{1 + 6} = 0,14 \delta \quad (2.19)$$

## Altura do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite

Definida a espessura de deslocamento da camada limite, a altura real do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite ( $h$ ) é dada pela seguinte expressão:

$$h = \delta_d + h_p \quad (2.20)$$

onde  $h_p$  representa a altura do escoamento potencial na seção de estudo, a uma distância  $s$  do início da soleira descarregadora.

### **Espessura de perda de potência na camada limite**

A espessura de perda de potência na camada limite, definida por  $\delta_e$ , corresponde à espessura de um escoamento fictício potencial com perda de carga igual à correspondente perda de carga do escoamento real a montante da seção de afloramento da camada limite, sendo dada por:

$$\delta_e = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_{m\acute{a}x}} \left[ 1 - \left( \frac{u}{V_{m\acute{a}x}} \right)^2 \right] dy = N\delta \left( \frac{1}{1+N} - \frac{1}{3+N} \right) \quad (2.21)$$

com  $N=6$ , obtém-se:

$$\delta_e = 0,19 \delta \quad (2.22)$$

### **Perda de carga do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite**

A perda de carga do escoamento ( $\Delta H$ ) é dada por:

$$\Delta H = \frac{\delta_e V_{m\acute{a}x}^3}{2 g q} \quad (2.23)$$

### **Coefficiente de energia cinética**

O coeficiente de energia cinética representado por  $\alpha$ , é obtido pela relação entre a potência cinética do escoamento real numa dada seção e a potência cinética do escoamento fictício (de velocidade média), na mesma seção. Tem-se que:

$$\alpha = \frac{\int u^3 dS}{U^3 S} \quad (2.24)$$

A partir das Eq. (2.6) e (2.24) obtém-se a seguinte equação (Chanson,1996):

$$\alpha = \left( \frac{V_{m\acute{a}x}}{U} \right)^3 \frac{1}{h} \left[ \left( \frac{N}{N+3} \right) \delta + (h - \delta) \right] \quad (2.25)$$

Analogamente à aplicação da Eq. (2.22), obtém-se o seguinte valor para o coeficiente de energia cinética, na seção de afloramento da camada limite:

$$\alpha = \frac{(N + 1)^3}{[N^2(N + 3)]} = 1,058 \quad (2.26)$$

## 2.5. Grandezas características do escoamento de emulsão ar-água

Neste subcapítulo, são definidos parâmetros como o comprimento do trecho até ao início do escoamento em regime uniforme e a concentração média de ar para o respetivo dimensionamento da estrutura hidráulica.

### Concentração pontual de ar

A concentração pontual de ar é referida como sendo o volume de ar por unidade de escoamento ar e água.

$$C = \frac{V_{Ar}}{V_{Ar} + V_{Água}} \quad (2.27)$$

### Altura característica do escoamento arejado

A superfície livre do escoamento com emulsão de ar é definida pela linha imaginária que representa a concentração pontual de ar como sendo igual a 90%, generalizadamente designada por altura característica do escoamento ( $Y_{90}$ ).

### Altura equivalente de água

A altura equivalente de água ( $h_{eq}$ ) é definida como sendo a altura fictícia que seria ocupada só por água no escoamento de emulsão. Para um canal de seção retangular pode ser determinada com base na seguinte equação:

$$h_{eq} = \int_0^{Y_{90}} (1 - C) dy \quad (2.28)$$

A mesma grandeza pode ser também definida em função da concentração média de ar ( $\bar{C}$ ):

$$h_{eq} = (1 - \bar{C}) Y_{90} \quad (2.29)$$

### Velocidade média da água

A velocidade média de água ( $U$ ), para um escoamento bidimensional, é representada pelo quociente entre o caudal unitário do escoamento e a altura equivalente de água



$$U = \frac{q}{h_{eq}} \quad (2.30)$$

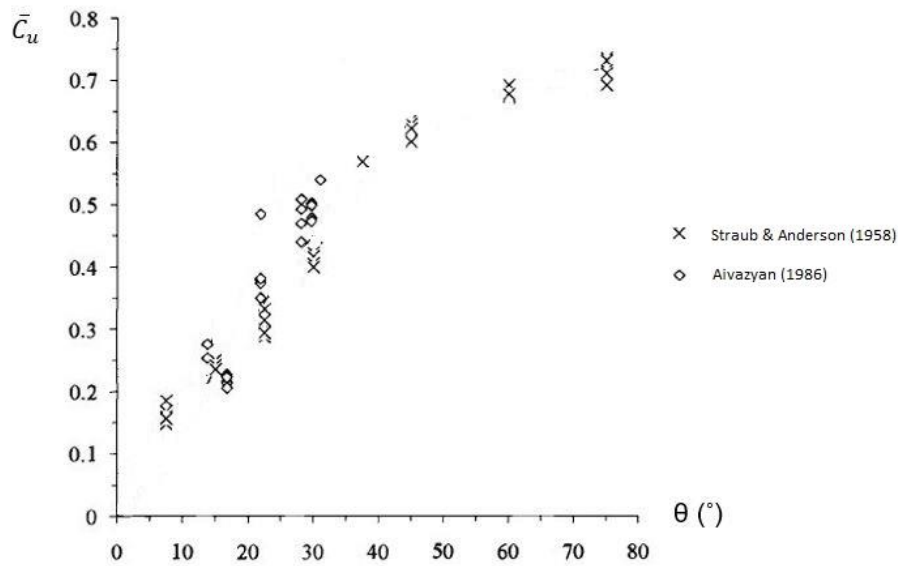
## 2.6. Escoamento de emulsão ar-água em regime uniforme

A determinação da localização do início do escoamento com emulsão de ar, em regime uniforme, tem sido alvo de estudo por autores como Straub e Lamb (1953) que mostraram inicialmente que é possível encontrar uma distribuição de concentração de ar constante, a partir daquela seção. Bormann (1958), posteriormente, afirmou poder localizar a seção, a partir da qual o regime passa a uniforme. Porém, essa conclusão é feita sem a representação de um diagrama de concentração de ar relacionado. Conclui ainda que o comprimento do trecho do escoamento gradualmente variado é da mesma ordem de grandeza do comprimento do trecho do escoamento desde a soleira descarregadora, até à seção de afloramento da camada limite (Falvey, 1980).

Sendo o escoamento em regime uniforme caracterizado por permanecerem constantes as suas grandezas características, independentemente da posição longitudinal ao longo do canal descarregador, o trabalho experimental elaborado por Straub e Anderson (1958), após as sugestões feitas por Lane (1939) e Halbronn (1952), foi fundamental para o desenvolvimento deste campo de estudo.

### Concentração média de ar

Sustentado inicialmente pelos resultados experimentais elaborados por Straub e Anderson (1958) e posteriormente por autores como Wood (1985) e Chanson (1993), verificou-se como a concentração média de ar varia essencialmente em função do declive do canal descarregador, ilustrado na Figura 2.8.



**Figura 2.8 - Concentração média de ar em função do declive do canal (adaptado de Chanson, 1996).**

Vários investigadores têm procedido ao estudo do escoamento em regime uniforme para descarregadores com soleira convencional, tendo sugerido expressões para a determinação da concentração média de ar nesse regime.

Em Aivazyan (1986), o autor com base nos seus dados experimentais, envolvendo um conjunto significativo de caudais unitários e declives ( $14,2 \leq \theta(^{\circ}) \leq 37,0$ ;  $0,05 \leq q(m^2s^{-1}) \leq 8,0$ ), sugere a seguinte expressão,

$$\bar{C}_{98,u} = \text{sen } \theta \quad (2.31)$$

em que  $\bar{C}_{98,u}$  representa a concentração média de ar em regime uniforme para uma altura característica do escoamento  $Y_{98}$ .

Posteriormente, Hager (1991), com base nos resultados experimentais de Straub e Anderson (1958) ( $7,5 \leq \theta(^{\circ}) \leq 75,0$ ) obteve a seguinte equação:

$$\bar{C}_u = 0,75 \text{ sen } \theta^{0,75} \quad (2.32)$$

Chanson (1996), também com base nos resultados experimentais de Straub e Anderson (1958), propõe que a concentração média de ar em regime uniforme possa ser estimada por meio da seguinte equação:

$$\bar{C}_u = 0,9 \text{ sen } \theta \quad (2.33)$$

No entanto a equação (2.33) é aconselhada para ângulos com o plano horizontal e o canal descarregador inferiores a  $50^{\circ}$ .

Matos (1999), também com base nos mesmos resultados experimentais sugere uma nova expressão para concentração média de ar em regime uniforme. No entanto, uma vez que os

resultados de Aivazyan (1986) são expressos em função de  $Y_{98}$  em vez de  $Y_{90}$ , o autor apresenta a seguinte expressão que relaciona  $\bar{C}_{98u}$  com  $\bar{C}_{90u}$ ,

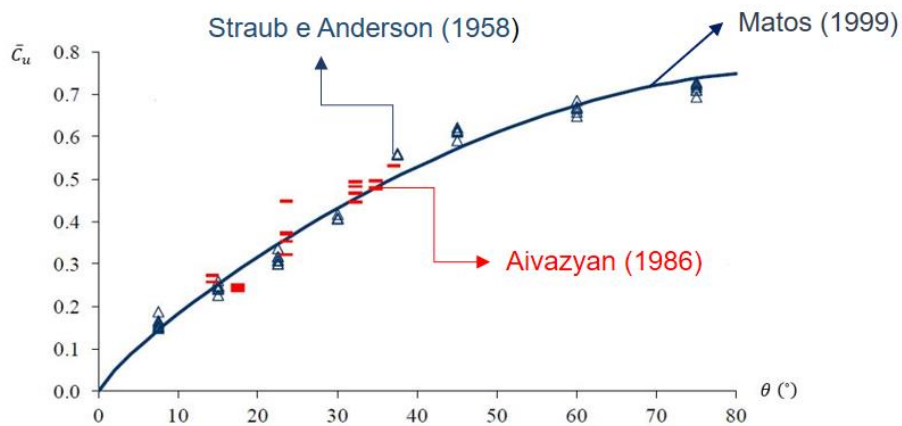
$$\frac{\bar{C}_{90u}}{\bar{C}_{98u}} = 1,094 - 0,431 e^{-\text{sen}\theta} \quad (2.34)$$

A partir desta expressão, Matos (1999) obteve

$$\bar{C}_u = 0,76 \text{ sen } \theta^{0,82} \quad (2.35)$$

No âmbito desta dissertação utilizou-se a Eq. (2.35) para o cálculo de  $\bar{C}_u$ .

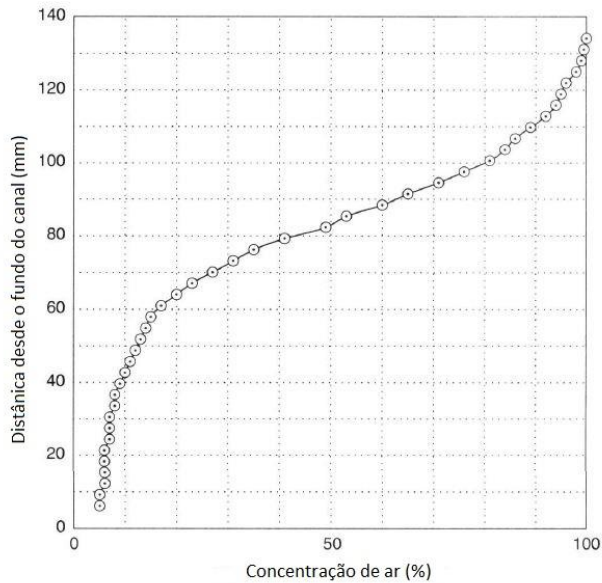
Na Figura 2.9, comparam-se os valores obtidos experimentalmente por Straub e Anderson (1958) e Aivazyan (1986) com os valores obtidos a partir da Eq. (2.35).



**Figura 2.9 - Concentração média de ar em regime uniforme em função do ângulo do canal descarregador com horizontal (Matos, 1999).**

### Distribuição da concentração de ar

Com base nas medições experimentais elaboradas por Straub e Anderson (1958), houve também uma contribuição para desenvolvimento de perfis de concentração de ar no escoamento, onde se observa que a concentração de ar varia de forma contínua desde a soleira do canal até à superfície livre do escoamento (Figura 2.10).



**Figura 2.10 - Concentração de ar em função da distância ao fundo (retirado de Wilhelms e Gulliver, 2005).**

Nos trabalhos de Wood (1985) e Chanson (1996) foram desenvolvidos modelos teórico-experimentais para obtenção de perfis de concentração de ar em descarregadores com soleira convencional, baseando-se no pressuposto que o escoamento de emulsão ar-água é homogêneo para alturas do escoamento inferiores a  $Y_{90}$ . Posteriormente foram aplicados em descarregadores em degraus por diversos autores, nomeadamente por Matos (1999), Meireles (2004) e Matos e Meireles (2014).

Tem sido comprovado que os modelos teórico-experimentais de Wood (1985) e de Chanson (1996) se ajustam relativamente bem aos perfis experimentais de concentração de ar, sendo o modelo de Wood (1985) aquele que em geral, melhor se ajusta no domínio do escoamento junto à fronteira sólida, com a exceção da zona definida pela subcamada de concentração de ar. Wood (1985) confirma também que o seu modelo não só se ajusta bem aos resultados experimentais de Straub e Anderson (1958), bem como aos de Cain (1978), no trecho correspondente ao escoamento gradualmente variado. Atendendo à sua simplicidade, no âmbito desta dissertação optou-se por utilizar o modelo de Wood (1985).

O modelo de Wood baseia-se na resolução da equação da conservação da massa do escoamento com emulsão de ar em regime uniforme, e onde os seus parâmetros são independentes da distância ao longo da soleira descarregadora,

$$\varepsilon \frac{d}{dy} [\rho(1 - C)] = \rho(1 - C) V_a \cos\theta \quad (2.36)$$

em que

- $\varepsilon$  - difusidade relativa à densidade média da mistura;
- $V_a$  - velocidade característica associada à queda de massas de água;
- $\rho$  - massa volúmica da água.

Uma vez que o membro  $\rho(1 - C)$  representa a massa de água por unidade de volume, Wood (1985) considera que  $V_a$  será um parâmetro descrito em função da velocidade característica associada à queda de massas de água. Quando a concentração pontual de ar toma valores significativos, são observadas gotas de água num meio arejado; neste contexto  $V_a$  deverá ser entendido como a velocidade de queda das gotas de água projetadas para o exterior do escoamento principal. No entanto, quando o valor da concentração é reduzido, a velocidade da água também o será sendo a concentração de ar nula do fundo do canal.

Posto isto, Wood (1985) considera que a velocidade  $V_a$  pode ser descrita através da seguinte expressão

$$V_a = K C y \quad (2.37)$$

para  $y \in [0; Y_{90}]$  e onde  $K$  se trata de uma constante de proporcionalidade.

Sem o conhecimento prévio do perfil de concentração de ar no escoamento, não é viável estimar valores razoáveis para  $\varepsilon$ . Admitindo um valor constante para  $\varepsilon$ , obteve-se a seguinte expressão (Wood, 1985)

$$C = \frac{\beta'}{\beta' + e^{-\gamma' \cos\theta y'^2}} \quad (2.38)$$

sendo  $y' = \frac{y}{Y_{90}}$ ,  $\beta'$  e  $\gamma'$  constantes.

Sendo a superfície livre do escoamento definida pela concentração de ar igual a 90%, obtém-se a seguinte relação entre as duas constantes anteriormente descritas (Wood, 1985):

$$\beta' = 9 e^{-\gamma' \cos\theta} \quad (2.39)$$

Por outro lado, tem-se que:

$$\bar{C} = \int_0^1 \frac{\beta'}{\beta' + e^{-\gamma' \cos\theta y'^2}} dy' \quad (2.40)$$

A partir dos valores experimentais obtidos por Straub e Anderson (1958), Wood (1985) e Chanson (1989) apresentam valores da concentração média de ar,  $\bar{C}$ , bem como dos parâmetros  $\beta'$  e  $\gamma'$  em função do declive do canal, indicados na Tabela 2.3.

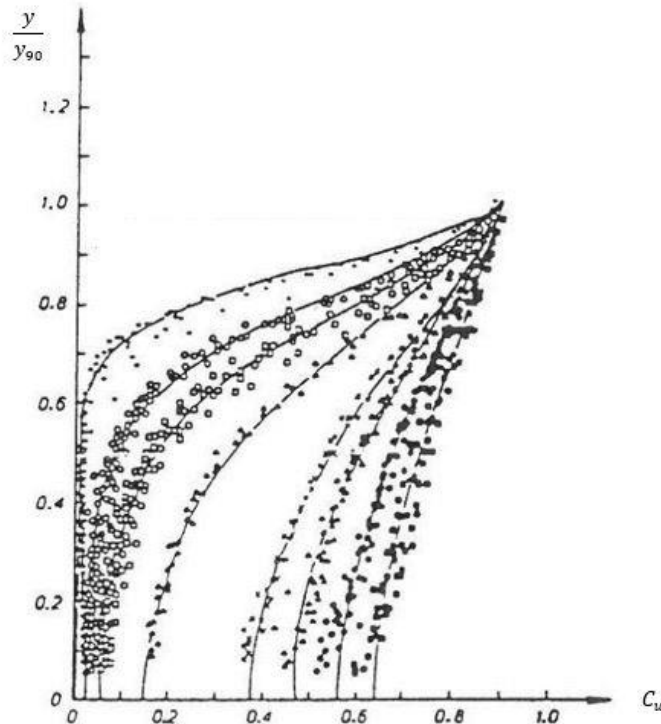


Figura 2.11 - Distribuição da concentração de ar em regime uniforme, para diversos valores do declive do canal obtidos por Straub e Anderson (1958) (retirado de Wood, 1985).

Tabela 2.3 - Concentração média de ar em regime uniforme e parâmetros  $\beta'$  e  $\gamma'\cos\theta$ , em função do declive do canal (adaptado de Chanson, 1989).

$\theta$	Wood (1985)			Chanson (1989)		
	$\bar{C}$	$\gamma'\cos\theta$	$\beta'$	$\bar{C}$	$\gamma'\cos\theta$	$\beta'$
7,5°	0,137	9,05	0,00106	0,161	7,99952	0,00302
15°	0,245	5,9	0,0247	0,241	5,74469	0,0288
22,5°	0,302	4,92	0,0659	0,31	4,83428	0,07157
30°	0,41	3,8	0,202	0,41	3,82506	0,19635
37,5°	0,56	2,65	0,638	0,569	2,67484	0,62026
45°	0,618	2,3	0,904	0,622	2,40096	0,81568
60°	0,675	1,9	1,35	0,68	1,89421	1,35393
75°	0,715	1,6	1,822	0,721	1,5744	1,86418

Matos (1990), apresenta uma maior gama de valores da concentração média de ar e dos parâmetros  $\beta'$  e  $\gamma'$  e para isso procedeu à aplicação da quadratura de Gauss-Legendre para a integração numérica do segundo membro da Eq. (2.40) atendendo à Eq. (2.39), e resolveu numericamente a equação não linear resultante pelo método de Newton-Raphson, para valores da concentração média de ar compreendidos entre 0,05 e 0,75. Mais tarde, o mesmo autor, com base nos valores obtidos no seu estudo anterior, desenvolveu a seguinte equação de regressão, em que o parâmetro  $\gamma'\cos\theta$  é expresso em função da concentração média do ar em regime uniforme:

$$\gamma' \cos\theta = a + b \bar{C}^{5/2} + \frac{c}{\bar{C}} \quad (2.41)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes, dados por 1,437, -2,635 e 1,114 respetivamente.

## 2.7. Escoamento gradualmente variado de emulsão ar-água

Neste subcapítulo são definidas as grandezas do escoamento com emulsão de ar em regime gradualmente variado. Este domínio do escoamento é definido entre a seção de afloramento da camada limite e quando o regime uniforme é atingido.

A concentração de ar e a sua distribuição em altura neste domínio do escoamento sofrem alterações graduais em função da sua localização em relação à seção de afloramento da camada limite. Cain (1978) afirma, após a análise dos seus dados experimentais que para cada seção, a distribuição de concentração de ar se assemelha à distribuição da concentração média de ar uniforme à medida que se aproxima deste último regime.

### Equação da conservação da massa de ar

A equação da conservação massa de ar pode ser dada por

$$\frac{d q_{ar}}{d s_*} = u_p - \bar{C} u_r \cos\theta \quad (2.42)$$

sendo que

- $u_p$  - velocidade de penetração do ar através da superfície livre na direção perpendicular à soleira do canal;
- $\bar{C}$  - concentração média de ar, na seção transversal do escoamento;
- $u_r$  - velocidade característica ascensional das bolhas de ar, na direção vertical;
- $s_*$  - coordenada medida segundo a soleira do canal, com origem na seção de afloramento da camada limite, isto é,  $s_* = s - s_i$ ;
- $q_{ar}$  - caudal unitário de ar.

Em regime uniforme verifica-se,  $\frac{d q_{ar}}{d s_*} = 0$ , obtendo-se a partir da Eq.(2.42)

$$0 = u_{pu} - \bar{C}_u u_r \cos\theta \quad (2.43)$$

Substituindo a Eq.(2.43) na Eq.(2.42) obtém-se

$$\frac{d q_{ar}}{ds_*} = (u_p - u_{pu}) + (\bar{C}_u - \bar{C}) u_r \cos \theta \quad (2.44)$$

Assumindo as hipóteses de uma taxa reduzida de entrada de ar no escoamento, uma taxa de penetração de ar constante em todo o regime gradualmente variado e, uma variação desprezável da distribuição de velocidades ao longo do canal descarregador é possível obter:

$$\frac{d q_{ar}}{ds_*} = (\bar{C}_u - \bar{C}) u_r \cos \theta \quad (2.45)$$

Uma vez que o escoamento é apenas composto por água e ar é possível definir o caudal unitário de ar pela expressão:

$$q_{ar} = \frac{\bar{C}}{(1 - \bar{C})} q \quad (2.46)$$

Substituindo a Eq. (2.46) na Eq.(2.45) obtém-se:

$$\frac{d\bar{C}}{ds_*} = \frac{u_r \cos \theta}{q} (\bar{C}_u - \bar{C})(1 - \bar{C})^2 \quad (2.47)$$

Considerando a integração analítica sugerida por Chanson (1996) que comprovada através dos dados experimentais obtidos por diversos autores em protótipos e modelos, considera-se a seguinte expressão

$$A = K_1 s_* + K_0 \quad (2.48)$$

Os parâmetros  $A$ ,  $K$  e  $K_0$  são dados pelas seguintes equações:

$$A = \frac{1}{(1 - \bar{C}_u)^2} \ln \left( \frac{1 - \bar{C}}{\bar{C}_u - \bar{C}} \right) - \frac{1}{(1 - \bar{C}_u)(1 - \bar{C})} \quad (2.49)$$

$$K_1 = \frac{u_r \cos \theta}{q} \quad (2.50)$$

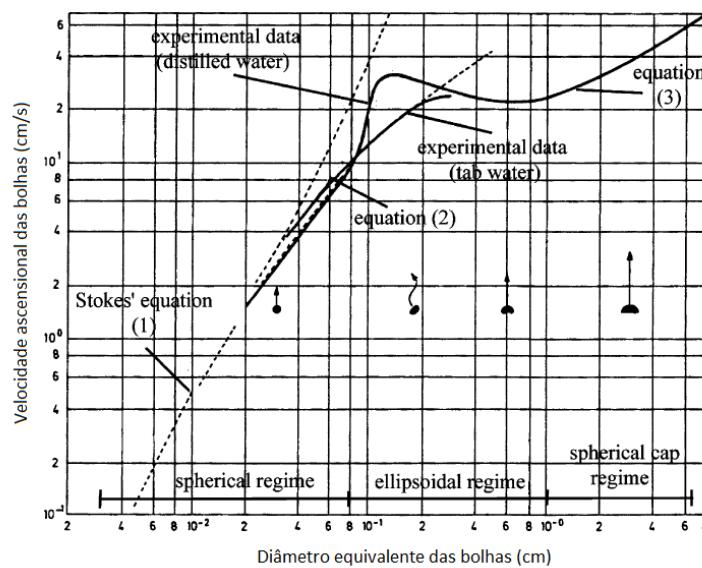
$$K_0 = \frac{1}{(1 - \bar{C}_u)^2} \ln \left( \frac{1 - \bar{C}_i}{\bar{C}_u - \bar{C}_i} \right) - \frac{1}{(1 - \bar{C}_u)(1 - \bar{C}_i)} \quad (2.51)$$

em que  $\bar{C}_i$  é a concentração média de ar na seção de afloramento da camada limite, tomando valores de 5% com base em resultados experimentais obtidos no descarregador de cheias da



barragem de Avimore (1978). No âmbito desta dissertação assumiu-se um valor nulo para este parâmetro, exceptuando na análise comparativa de resultados obtidos por Cain (1978) e por aplicação do modelo numérico.

No âmbito do procedimento numérico relativo à determinação de concentração de ar num extenso intervalo de seções do escoamento envolvendo a integração analítica da Eq. (2.48), nota-se a influência da grandeza relativa à velocidade característica ascensional das bolhas de ar nos potenciais resultados. A grandeza tem sido alvo de estudo por muitos autores, de entre os quais Chanson (1989) que afirma, com base no valor médio medido, que esta variável poderá tomar valores de  $0,40 \text{ ms}^{-1}$  no caso de análise de protótipos e  $0,16 \text{ ms}^{-1}$  no caso de modelos. Estudos posteriores, baseados em dados experimentais, revelam que os valores desta grandeza sofrem maiores alterações aquando de concentrações locais elevadas. Esta conclusão é essencialmente justificada pela velocidade reduzida observada em certas regiões do escoamento como também a existência de baixas concentrações de ar devido a pequenas bolhas de ar no local, como indica a Figura 2.12. A turbulência existente combinada com o efeito de difusão também pode ser responsável por este fenómeno, comportando-se como um gerador de pequenas bolhas de ar distribuindo-as para regiões do escoamento com menores concentrações aleatoriamente.



**Figura 2.12 - Velocidade ascensional das bolhas de ar em função do diâmetro equivalente das bolhas (Haberman e Mortan, 1956 in Kramer e Hager, 2005).**

No entanto, no estudo destinado aos perfis de concentração de ar, optou-se por utilizar o valor sugerido por Chanson (1996).



### 3. Modelação do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite

#### 3.1. Considerações prévias

O presente capítulo destina-se à apresentação do procedimento numérico utilizado para a determinação das grandezas características do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite. Também serão apresentadas duas curvas de regressão, que serão analisadas de acordo com o ajustamento aos valores inicialmente obtidos.

No âmbito deste capítulo, houve o intuito de abranger um intervalo de situações práticas possíveis em termos de caudal unitário do escoamento, declive do canal descarregador e rugosidade do betão utilizado na construção do canal.

Foram utilizados os seguintes valores para a resolução do método de cálculo, posteriormente descrito, para a determinação da seção de afloramento da camada limite.

**Tabela 3.1 – Valores adotados na simulação.**

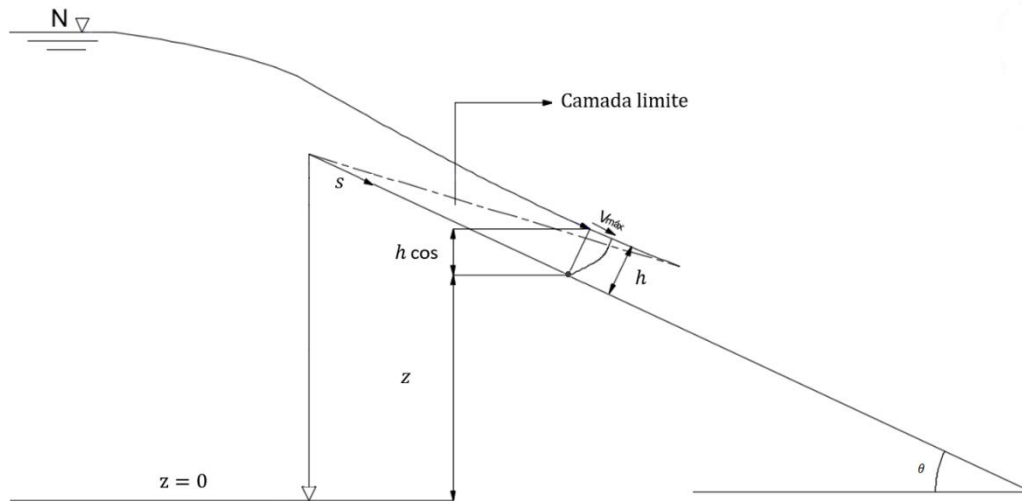
Grandezas	Valores simulados
$q$ ( $m^2s^{-1}$ )	1; 5; 10; 15; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100
$K$ ( $m^{1/3}s^{-1}$ )	50; 75; 90
$\theta$ ( $^\circ$ )	10; 20; 30; 40; 50; 60; 70

Segundo a Tabela 3.1, é possível verificar que o estudo se baseia em 273 situações distintas.

#### 3.2. Metodologia e hipóteses simplificativas

A metodologia adotada para determinação da localização e das grandezas principais do escoamento na seção de afloramento da camada limite, baseou-se nas seguintes hipóteses simplificativas:

- O descarregador apresenta uma seção transversal retangular.
- Utilização de um modelo de descarregador de cheias simplificado em relação ao descarregador de cheias com paramento convencional, como ilustrado na seguinte Figura 3.1.
- A altura do escoamento na seção de entrada do canal é igual à altura crítica.
- A perda de carga do escoamento na entrada do canal é desprezável.
- A distribuição de pressões é hidrostática.



**Figura 3.1 – Representação esquemática para o cálculo da altura do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite**

Com base na aplicação da equação de Bernoulli, obtém-se

$$N = z + h \cos \theta + \frac{V_{máx}^2}{2g} \quad (3.1)$$

onde  $N$  representa a cota da superfície livre a montante do descarregador e  $V_{máx}$  a velocidade do escoamento na zona exterior à camada limite (Figura 3.1). A partir da Eq. (3.1) obtém-se:

$$V_{máx} = \sqrt{2g (N - z - h \cos \theta)} \quad (3.2)$$

Aplicando a equação da continuidade e a equação correspondente à distribuição de velocidades na camada limite turbulenta expressa em (2.6), tem-se que:

$$q = \int_0^h V dy = \int_0^\delta V dy + \int_\delta^h V_{máx} dy = V_{máx} \left( h - \frac{\delta}{N+1} \right) \quad (3.3)$$

A partir das Eq. (3.2) e (3.3), obtém-se, para uma seção a jusante,

$$h = \frac{q}{V_{máx}} + \frac{\delta}{N+1} = \frac{q}{\sqrt{2g (N - z - h \cos \theta)}} + \frac{\delta}{N+1} \quad (3.4)$$

para cada vertical,  $h$  é obtido iterativamente a partir da Eq. (3.4).

No **Anexo I**, é possível consultar o quadro de cálculo e valores das grandezas características do escoamento utilizado no procedimento.

A expressão utilizada no âmbito desta dissertação para a definição de  $\delta$  encontra-se expressa na Eq. (2.15), tendo a rugosidade absoluta sido obtida a partir do coeficiente de Manning-Strickler, de acordo com a seguinte equação (Quintela, 1981):

$$k = \left(\frac{26}{K}\right)^6 \quad (3.5)$$

### 3.3. Modelação numérica simplificada

Após a aplicação do procedimento numérico descrito no capítulo anterior e, através dos valores gerados para 273 situações práticas distintas, procedeu-se à determinação da localização da seção de afloramento da camada limite, assim como caracterizar o escoamento até essa à seção de afloramento da camada limite. Para tal, procedeu-se à adimensionalização da altura do escoamento e da distância ao longo da soleira descarregadora.

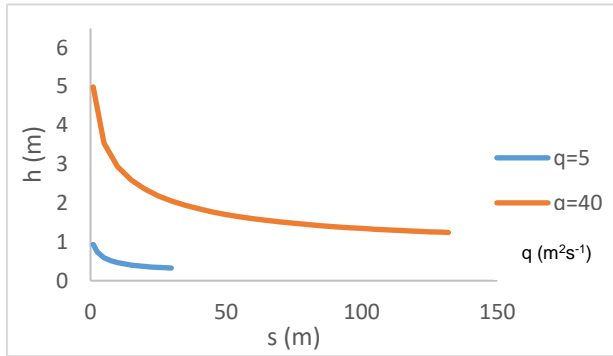
Para uma melhor compreensão acerca da importância relativa das grandezas envolvidas para o processo, entendeu-se que a melhor metodologia, para uma primeira análise, seria fixar uma das três grandezas assumidas para o estudo observando assim o comportamento das restantes variáveis.

Na Figura 3.2 apresenta-se a altura do escoamento em função da distância à crista e na Figura 3.3 a altura do escoamento adimensionalizada em função da distância à crista.

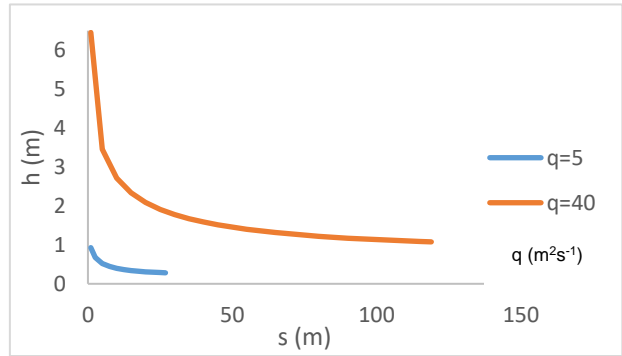
Os resultados mostram que o caudal exerce uma influência significativa na altura do escoamento, independentemente do coeficiente de Manning-Strickler e do declive do descarregador (Figura 3.2 a) a d)).

É também possível verificar através dos resultados apresentados nas Figuras 3.2 e) a h), que o declive não altera significativamente a altura do escoamento, independentemente do coeficiente de Manning-Strickler e do caudal unitário.

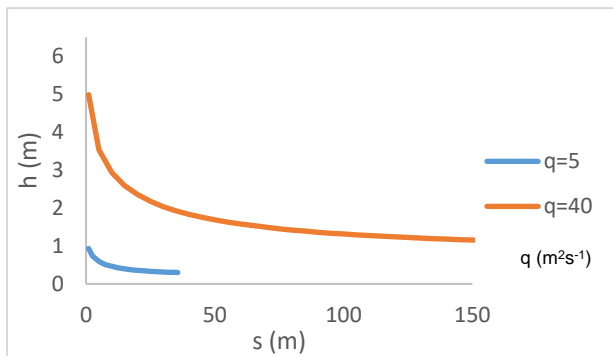
Observa-se ainda nas Figuras 3.2 i) a j) uma influência praticamente nula por parte do coeficiente de Manning-Strickler na altura do escoamento independentemente do caudal unitário e do declive do descarregador.



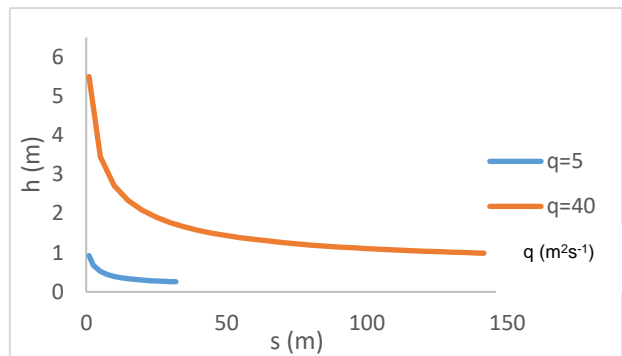
(a)  $K=50 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  e  $\theta=30^\circ$



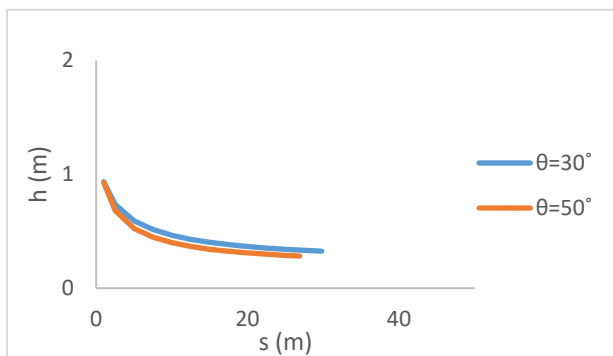
(b)  $K=50 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  e  $\theta=50^\circ$



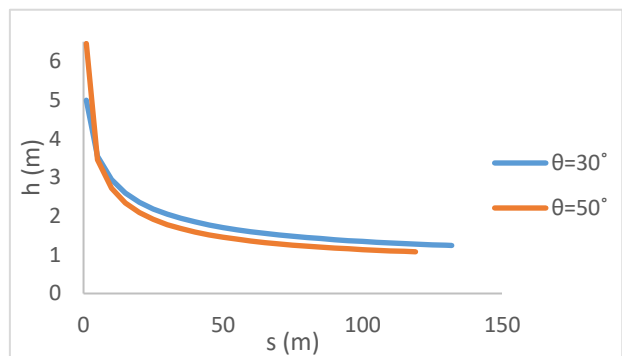
(c)  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  e  $\theta=30^\circ$



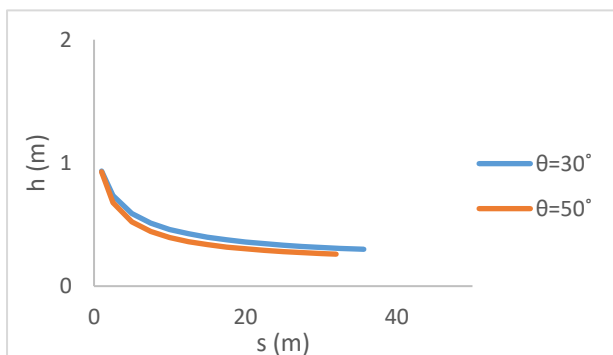
(d)  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  e  $\theta=50^\circ$



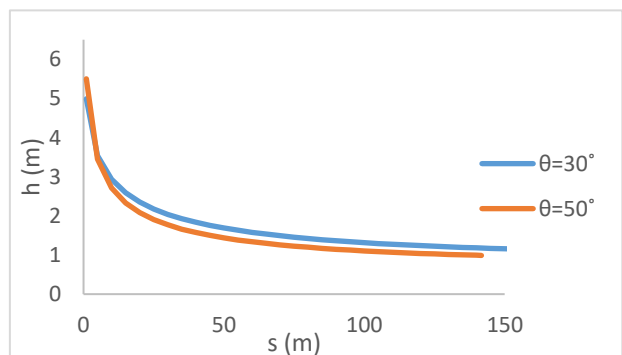
(e)  $K=50 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  e  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$



(f)  $K=50 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  e  $q=40 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$

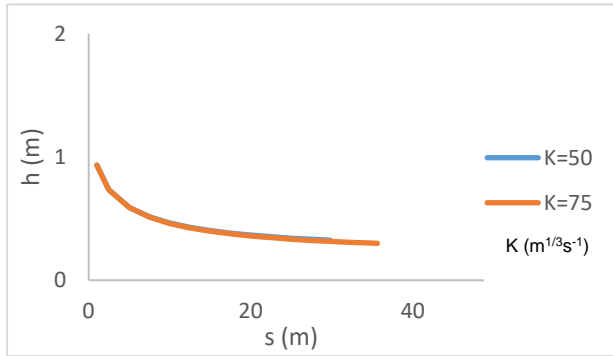


(g)  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  e  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$

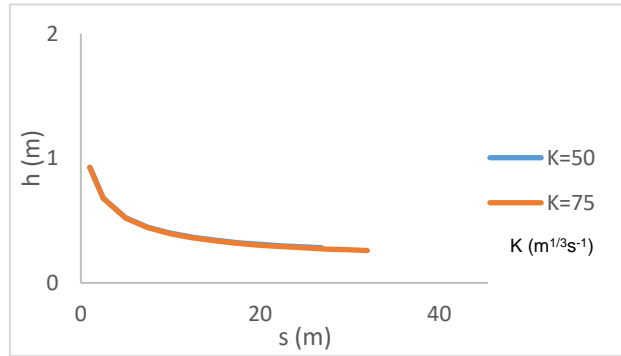


(h)  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  e  $q=40 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$

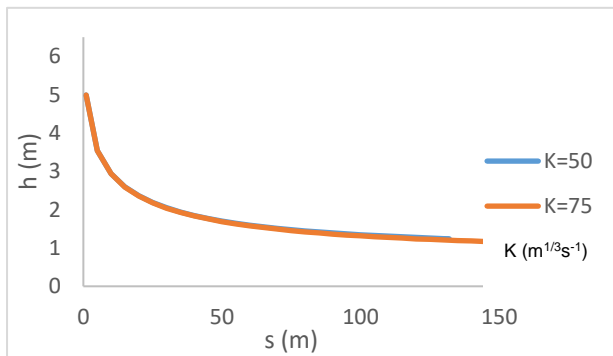
**Figura 3.2. - Altura do escoamento em função da distância ao longo do descarregador desde a crista. Valores obtidos através de formulação empírica e do procedimento iterativo para caudais unitários de 5 e 40  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ , ângulo com a horizontal de 30° e 50° e coeficiente de Manning-Strickler  $K=50$  e  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ .**



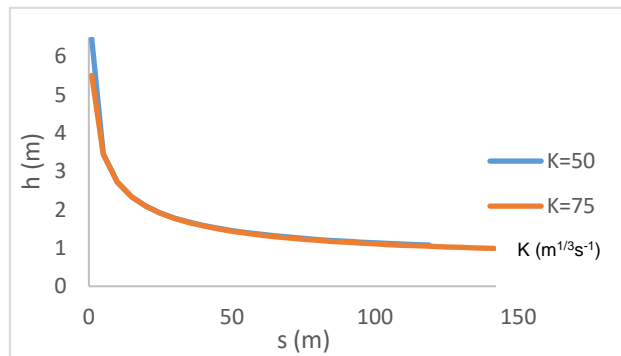
(i)  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e  $\theta=30^\circ$



(j)  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e  $\theta=50^\circ$

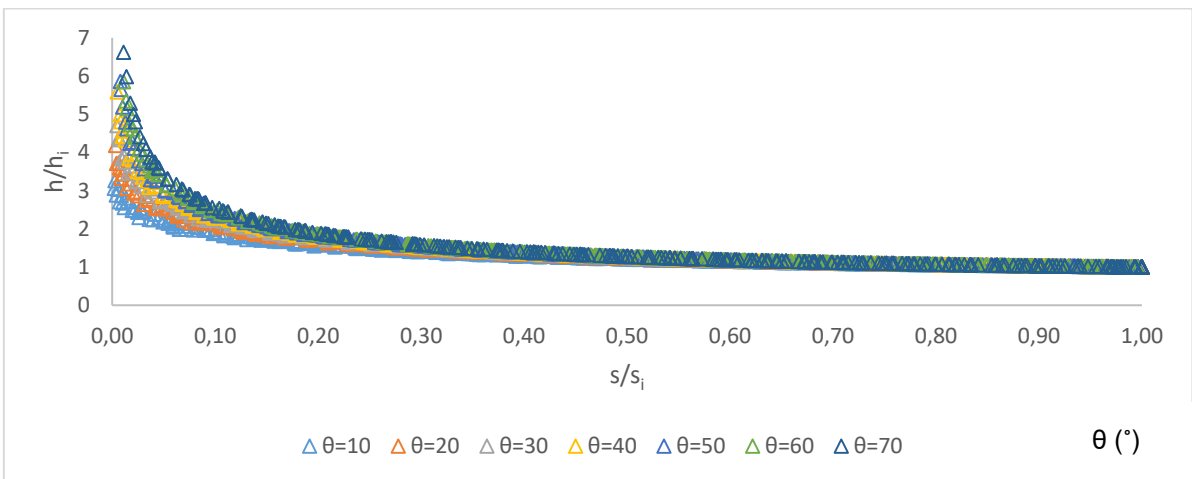
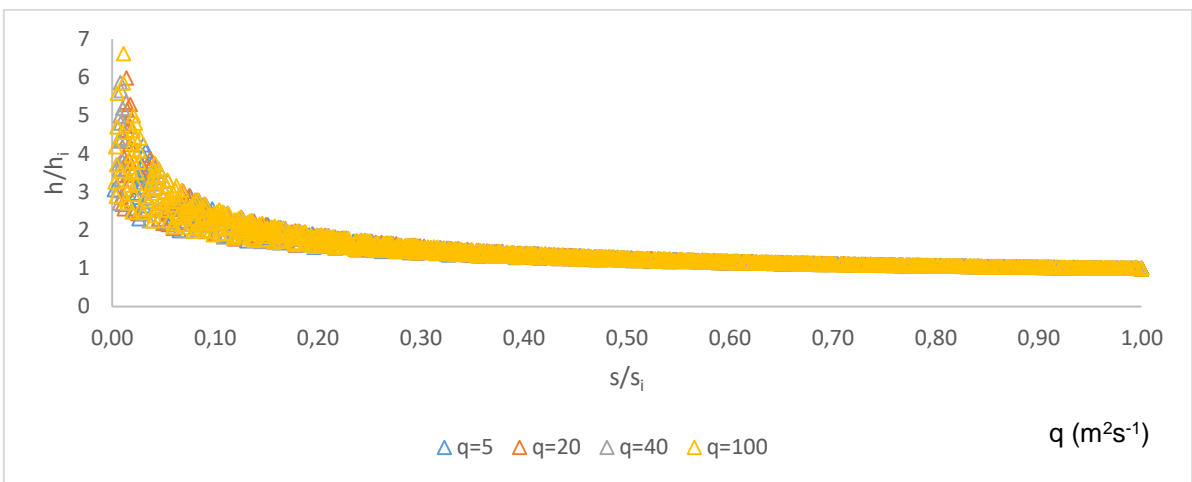
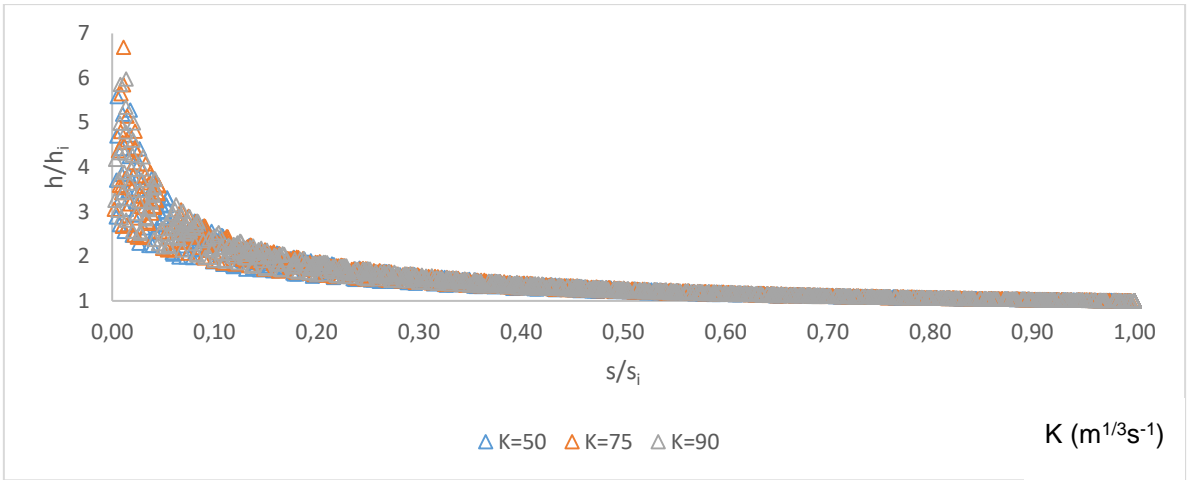


(l)  $q=40 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e  $\theta=30^\circ$



(m)  $q=40 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e  $\theta=50^\circ$

**Figura 3.2. Altura do escoamento em função da distância ao longo do descarregador desde a crista. Valores obtidos através de formulação empírica e do procedimento iterativo para caudais unitários de 5 e 40  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ , ângulo com a horizontal de 30° e 50° e coeficiente de Manning-Strickler  $K=50$ , e  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  (continuação).**

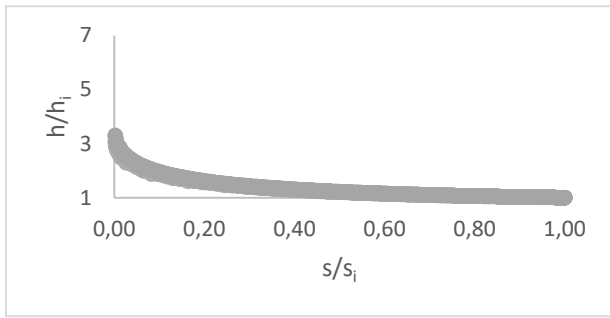


**Figura 3.3 - Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador desde a crista. Valores obtidos através de formulação empírica e do procedimento iterativo para caudais unitários de 5, 20, 40 e 100  $m^2s^{-1}$ , ângulo do canal com a horizontal de 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60° e 70° e coeficiente de Manning-Strickler  $K=50$ ,  $K=75$  e  $K=90 m^{1/3}s^{-1}$ .**

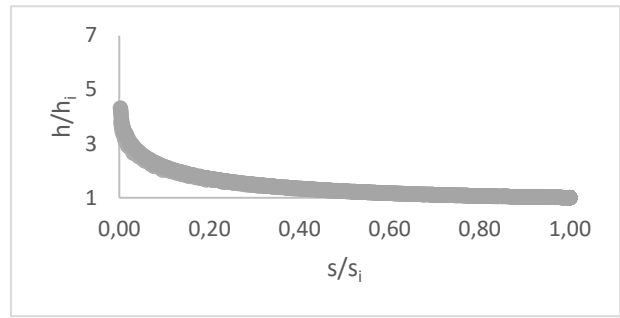


Analisando a Figura 3.3, é possível verificar que para uma amplitude considerável do intervalo de valores de  $K$  e para uma extensa gama de valores de caudais unitários, a caracterização em termos de alturas do escoamento a montante da seção de afloramento não se altera apreciavelmente. Observa-se, através da Figura 3.3 (c), que a altura de água adimensionalizada do escoamento é fortemente dependente do declive num trecho inicial. Ainda na mesma figura, é possível concluir que a relação  $h/h_i$ , num trecho imediatamente a jusante da soleira descarregadora, é tanto maior quanto maior for o declive do canal descarregador.

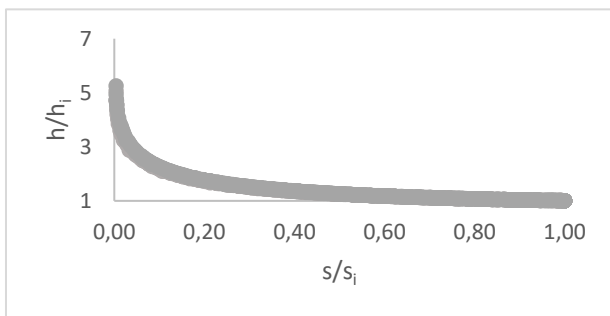
Outra conclusão a considerar, será o facto de a partir do valor  $s/s_i > 0,5$ , a influência do declive na relação  $h/h_i$  se atenuar. Neste contexto, optou-se por apresentar a curva  $h/h_i$  vs  $s/s_i$  em função dos declives estudados nesta dissertação, sem distinguir os caudais unitários nem os valores de  $K$ , como se observa na Figura 3.4.



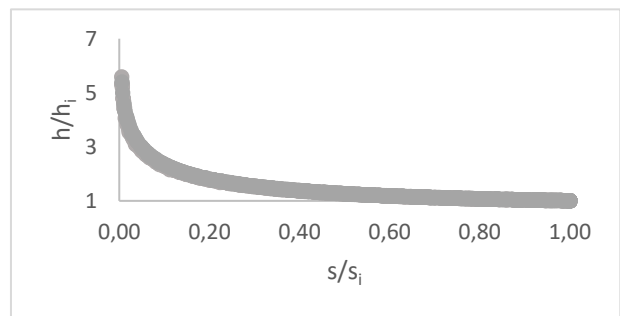
(a)



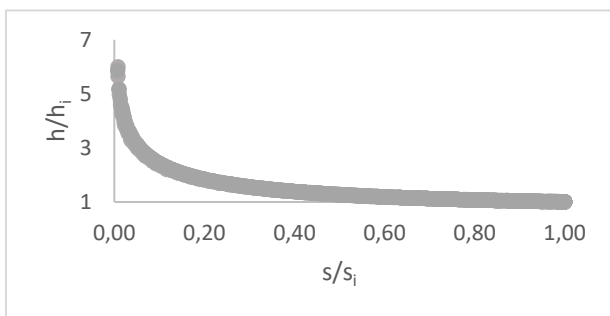
(b)



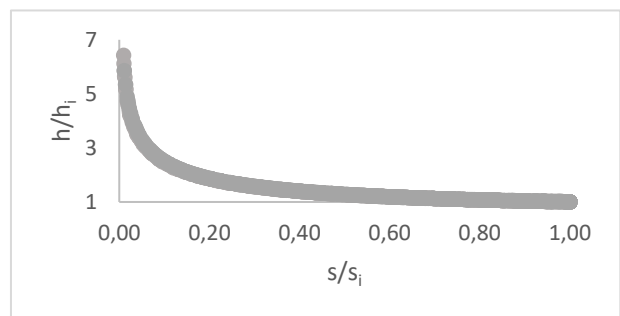
(c)



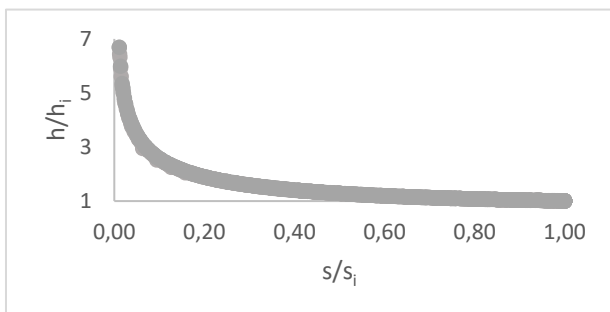
(d)



(e)



(f)

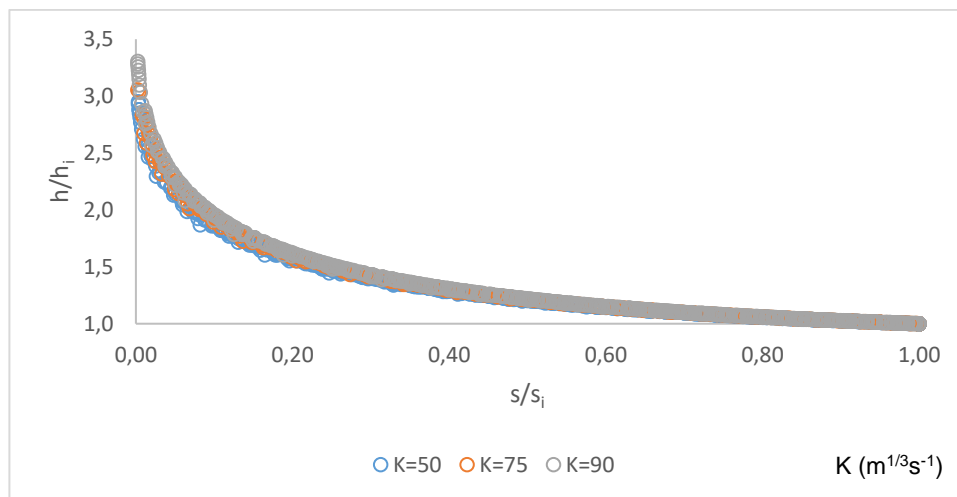


(g)

**Figura 3.4 – Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador desde a crista: (a)  $\theta=10^\circ$ ; (b)  $\theta=20^\circ$ ; (c)  $\theta=30^\circ$ ; (d)  $\theta=40^\circ$ ; (e)  $\theta=50^\circ$ ; (f)  $\theta=60^\circ$  (g)  $\theta=70^\circ$ .**

As representações gráficas da Figura 3.4, evidenciam que, para qualquer que seja o declive do canal descarregador, existe um comportamento em termos de altura do escoamento idêntico para qualquer valor de caudal unitário e para os três tipos de rugosidade em estudo. No entanto, considera-se importante mencionar que os resultados relativos a um ângulo com a horizontal de  $10^\circ$  apresentam uma maior dispersão.

Observando a Figura 3.5 é possível concluir que a dispersão dos valores anteriormente mencionada é função da rugosidade do betão e não dos valores do caudal unitário. Com efeito, é possível distinguir um tipo de curva para cada coeficiente de Manning-Strickler.



**Figura 3.5 – Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do canal: resultados obtidos através de formulação empírica e do procedimento iterativo para diversos caudais, tipos de rugosidade e ângulo com a horizontal de  $10^\circ$ .**

Muito embora a influência da rugosidade seja pouco significativa na caracterização das alturas de escoamento adimensionalizada ao longo do desenvolvimento o mesmo não se verifica para pequenos ângulos com a horizontal.

### 3.4. Desenvolvimento de expressões adimensionais

Após a análise dos valores obtidos no anterior subcapítulo, verifica-se que a altura do escoamento adimensionalizada a montante da seção de afloramento da camada limite depende fortemente da grandeza adimensional  $s/s_i$  e do ângulo do canal descarregador com o plano horizontal. Em sequência, procedeu-se à análise de várias famílias de curvas de regressão obtidas pelo software *TableCurve 2D*<sup>®</sup>, com o intuito de obter um bom compromisso entre a qualidade de ajustamento, através da simplicidade da expressão e coeficiente de determinação  $r^2$ .

Foram analisadas através do software *TableCurve 2D*<sup>®</sup>, todas as situações resultantes dos dados de entrada em função do declive e de  $s/s_i$ . Em face das expressões propostas, optou-se pela Eq. (3.6),

$$\frac{h}{h_i} = \frac{1}{a + b \sqrt{\frac{s}{s_i}}} \quad (3.6)$$

em que  $a$  e  $b$  são expressos em função do declive do canal (Tabela 3.2).

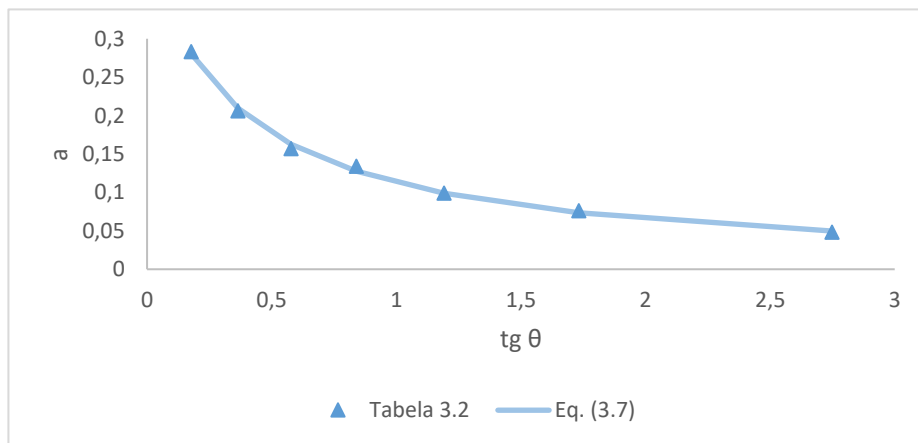
De seguida, apresenta-se o conjunto de valores para os parâmetros  $a$  e  $b$ , representados na Tabela 3.2, que são bem ajustados pelas Eq.(3.7) e (3.8), como se ilustra nas Figuras 3.6 e 3.7.

**Tabela 3.2 - Valores de  $a$  e  $b$  obtidos através do software *TableCurve 2D*®.**

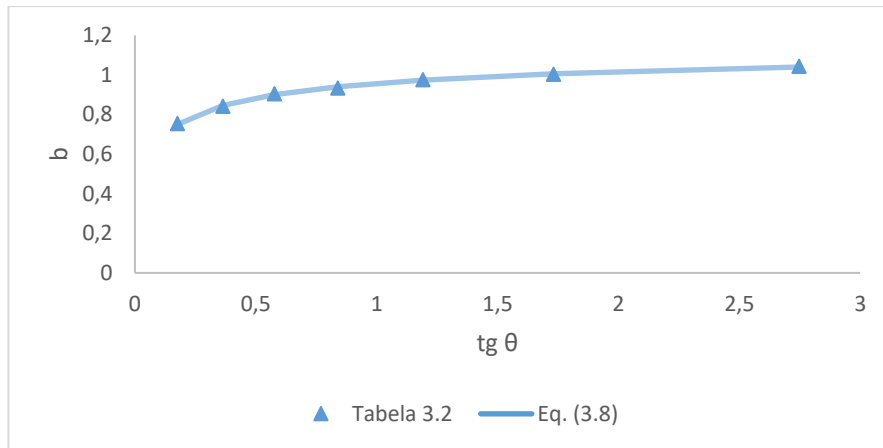
$\theta$	$tg(\theta)$	$a$	$a$ (Eq.3.7)	$b$	$b$ (Eq.3.8)
10°	0,176	0,283	0,281	0,754	0,750
20°	0,364	0,206	0,210	0,841	0,846
30°	0,577	0,157	0,163	0,905	0,901
40°	0,839	0,134	0,128	0,934	0,940
50°	1,192	0,099	0,099	0,976	0,974
60°	1,732	0,076	0,074	1,003	1,006
70°	2,747	0,048	0,050	1,044	1,040

$$a = \frac{1}{2,428 + 6,434 \, tg\theta} \quad (r^2=0,997) \quad (3.7)$$

$$b = \frac{1}{0,835 + \frac{0,209}{\sqrt{tg\theta}}} \quad (r^2=0,997) \quad (3.8)$$



**Figura 3.6 - Parâmetro  $a$  da Eq. (3.7) em função do ângulo do descarregador com o plano horizontal.**



**Figura 3.7 - Parâmetro  $b$  da Eq. (3.8) em função do ângulo do descarregador com o plano horizontal.**

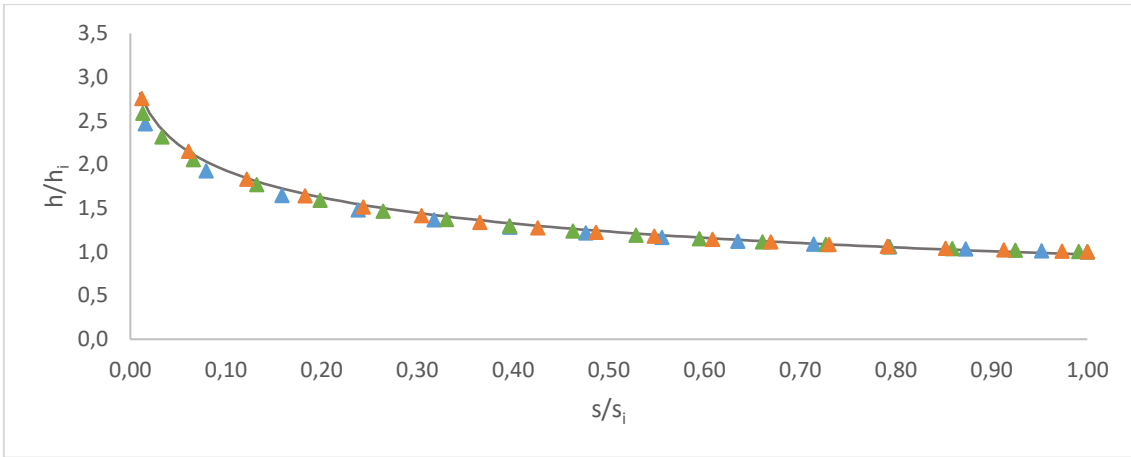
Considerando as anteriores representações, procedeu-se à verificação da qualidade de aproximação das curvas para diferentes caudais unitários, rugosidades e ângulos com a horizontal. Foram obtidos resultados bastante satisfatórios para as várias combinações possíveis. São então de seguida, representados os resultados obtidos através de formulação empírica, apresentada no Capítulo 2, em comparação com as curvas de regressão obtidas pelo software *TableCurve 2D*®. Entendeu-se focar a análise contemplando diversas combinações das grandezas. Na Figura 3.8, apresenta-se a curva de regressão relativa a  $10^\circ$ , expressa por:

$$\frac{h}{h_i} = \frac{1}{0,281 + 0,750 \sqrt{\frac{S}{S_i}}} \quad (3.9)$$

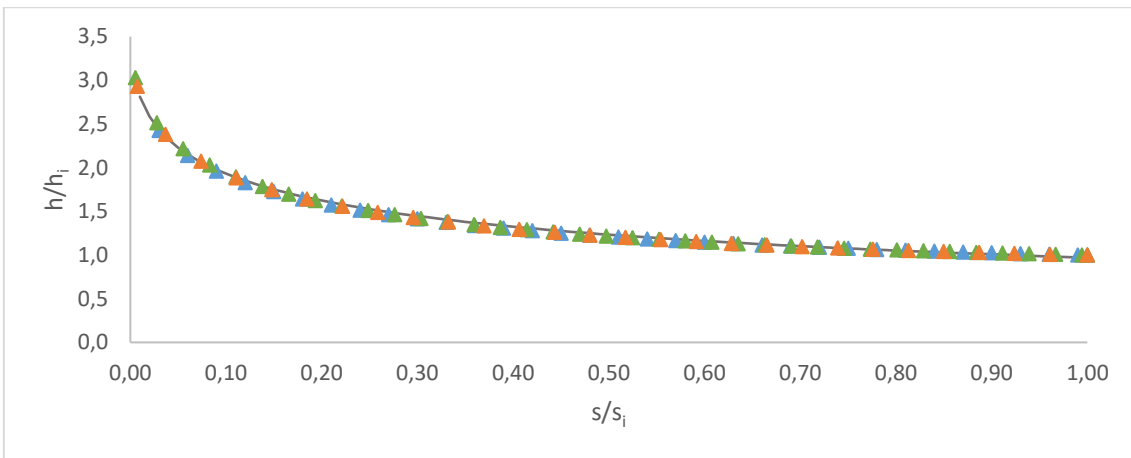
Analogamente é possível observar nas Figuras 3.9 e 3.10 as curvas de regressão relativas aos ângulos com o plano horizontal de  $40^\circ$  e  $70^\circ$ , expressos pelas Eq. (3.10) e (3.11), respetivamente.

$$\frac{h}{h_i} = \frac{1}{0,128 + 0,940 \sqrt{\frac{S}{S_i}}} \quad (3.10)$$

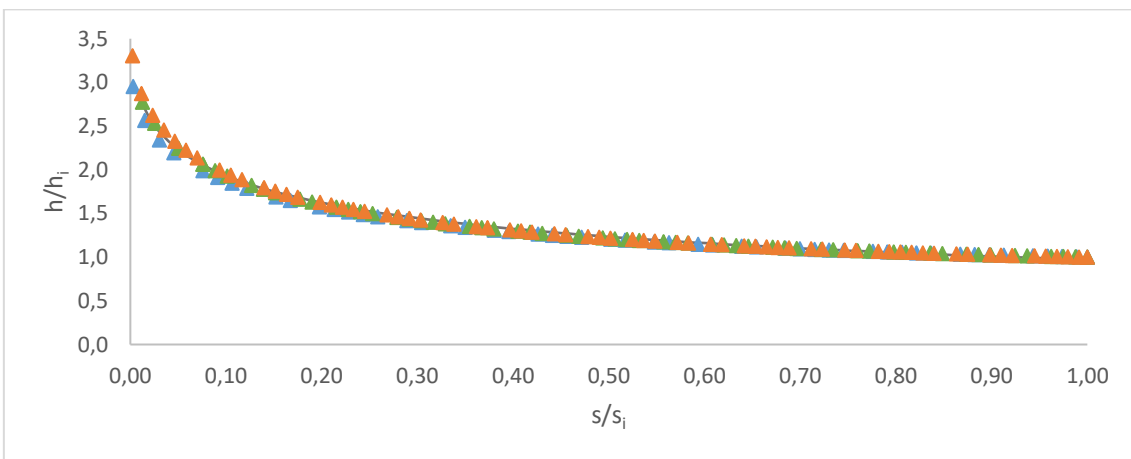
$$\frac{h}{h_i} = \frac{1}{0,050 + 1,040 \sqrt{\frac{S}{S_i}}} \quad (3.11)$$



(a)



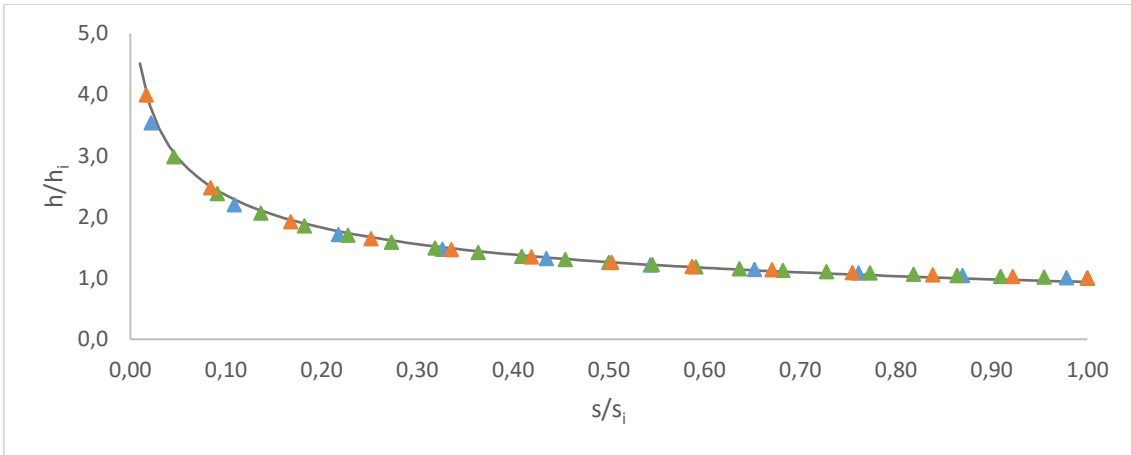
(b)



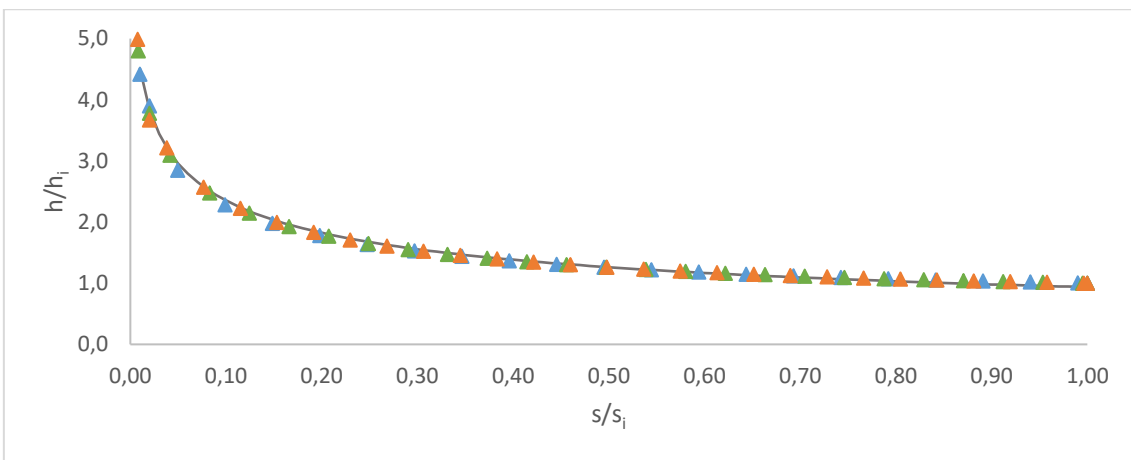
(c)

▲ K=50 ▲ K=75 ▲ K=90 — Eq.(3.9)

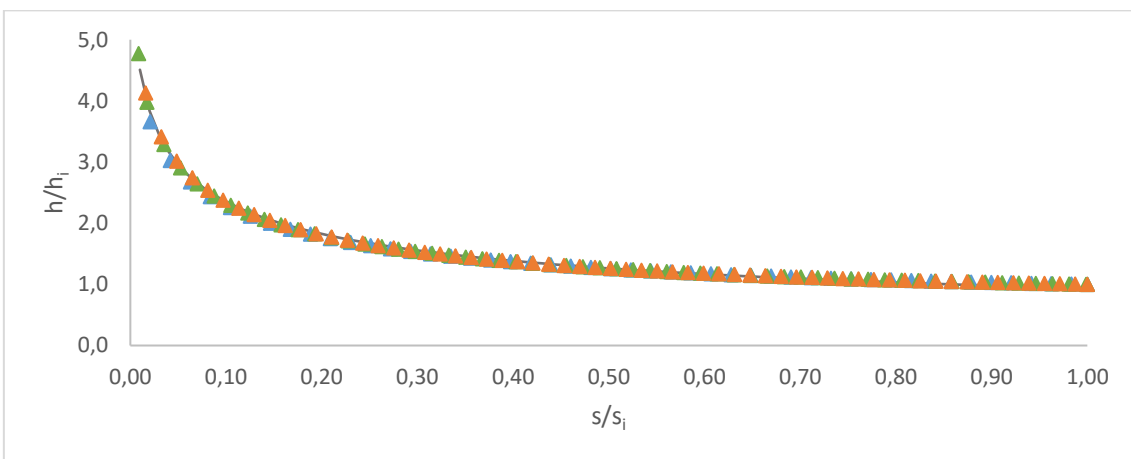
**Figura 3.8 - Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador desde a crista. Comparação de resultados para o ângulo com a horizontal de  $10^\circ$ : (a)  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (b)  $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (c)  $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .**



(a)



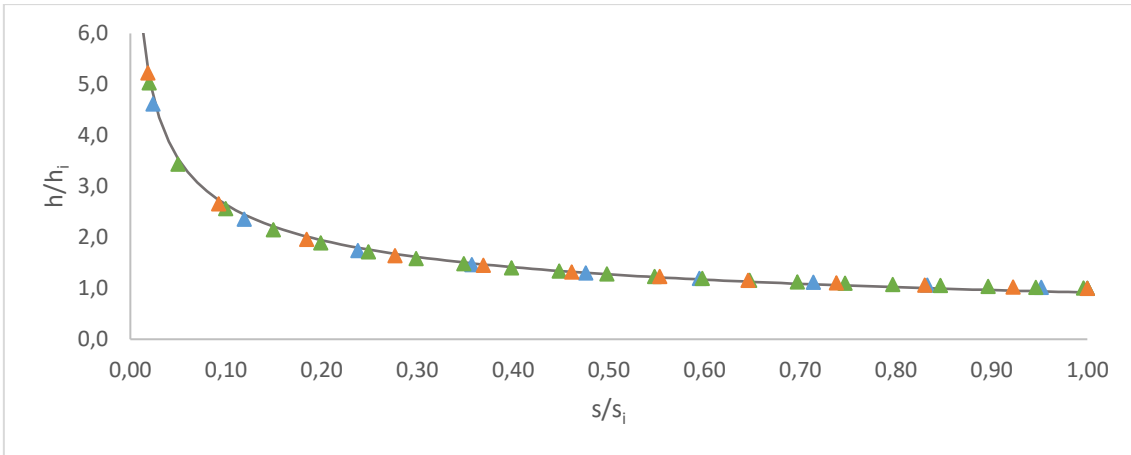
(b)



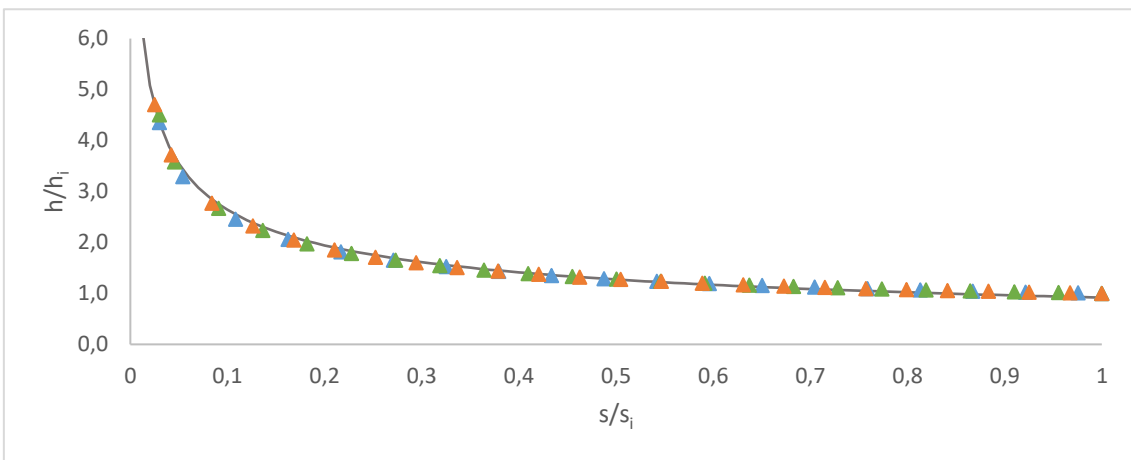
(c)

▲ K=50 ▲ K=75 ▲ K=90 — Eq.(3.10)

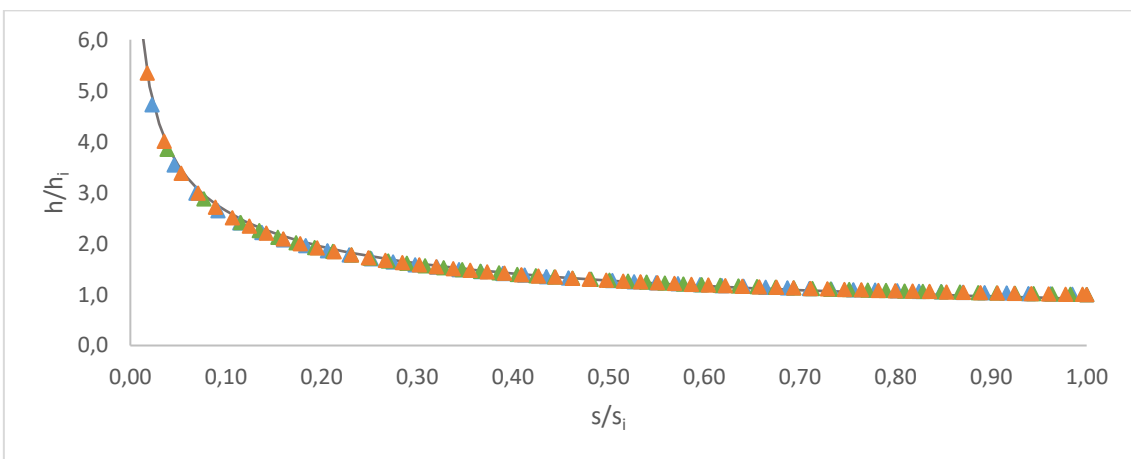
**Figura 3.9 - Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador desde a crista. Comparação de resultados para o ângulo com a horizontal de 40°: (a)  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (b)  $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (c)  $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .**



(a)



(b)



(c)

▲ K=50 ▲ K=75 ▲ K=90 — Eq.(3.11)

**Figura 3.10 - Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador desde a crista. Comparação de resultados para o ângulo com a horizontal de  $70^\circ$ : (a)  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (b)  $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (c)  $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .**



As curvas de regressão anteriormente representadas, apresentam de um modo geral, uma excelente aproximação face aos dados obtidos pelo procedimento numérico anteriormente descrito, apresentando diferenças relativas na ordem de 2-3%.

Na Figura 3.8 (a), onde é apresentada a solução para valores do ângulo do canal descarregador de  $10^\circ$ , é possível observar um ligeiro afastamento dos resultados da curva de regressão quando  $s/s_i < 0,3$ .

A curva representada pela Eq.(3.11), para qualquer das rugosidades do canal estudadas, enquadra-se satisfatoriamente nos casos de estudo de caudais superiores. A Figura 3.9 retrata a curva de regressão relativa aos resultados referentes ao ângulo com a horizontal de  $40^\circ$ , verificando-se comportamentos análogos para os casos práticos de  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . Na Figura 3.9 (b), são verificados valores com maiores desvios quando  $s/s_i < 0,5$  do desenvolvimento do escoamento, com alturas de escoamento ligeiramente superiores às obtidas pelo procedimento numérico. A curva tende a evidenciar um comportamento mais satisfatório para caudais superiores.

Por último, na Figura 3.10 (a) e (b), a maior diferença de resultados ocorrem quando  $s/s_i < 0,5$ , como anteriormente observado na Figura 3.8. No entanto, a curva de regressão para o maior declive do canal tende a afastar-se dos valores obtidos pelo procedimento numérico para caudais superiores ( $100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ).

Observando que a grandeza  $h/h_i$  pode ser expressa apenas em função de duas variáveis, declive do canal descarregador e  $s/s_i$ , procedeu-se à utilização do software *TableCurve 3D*<sup>®</sup> no sentido de se ajustar uma superfície de regressão. No entanto não se obtiveram resultados mais satisfatórios do que os obtidos com recurso ao software *TableCurve 2D*<sup>®</sup>.

Os resultados obtidos poderão ser consultados no **Anexo II**.

A solução que melhor se ajusta aos resultados obtidos é a solução obtida com auxílio do software *TableCurve 2D*<sup>®</sup>. Embora tenha um cariz de aplicação ligeiramente mais complexo do que a solução obtida pelo software *TableCurve 3D*<sup>®</sup>, é uma solução bastante razoável e que satisfaz o intuito deste estudo. É uma solução de fácil aplicação, e com interesse prático, uma vez que incide numa significativa gama de caudais unitários, rugosidades e declives. O facto de ser caracterizada por grandezas adimensionais, torna o processo do estudo da caracterização do escoamento a montante da seção de afloramento facilitado.

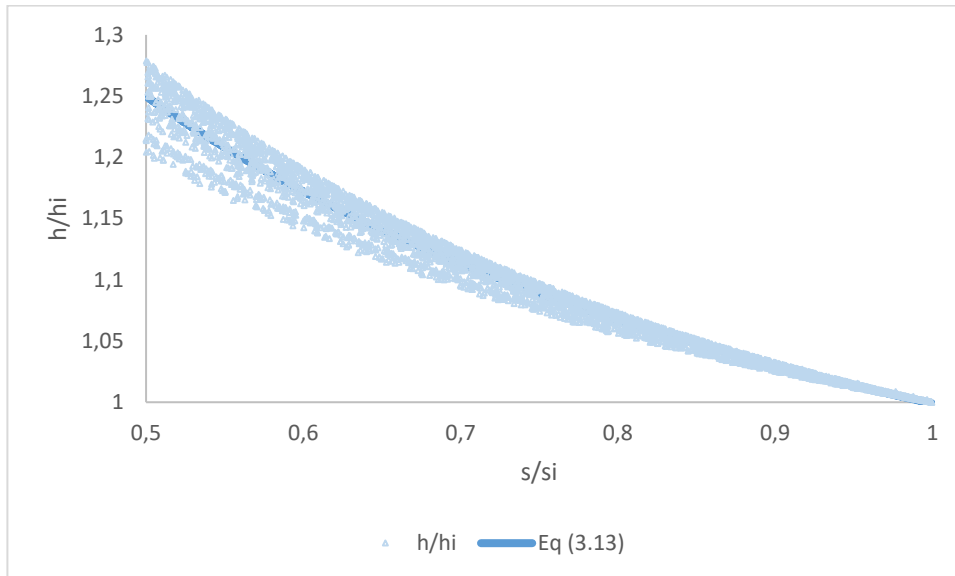
Devido ao facto de o ângulo  $\theta$  ter influência reduzida na altura do escoamento adimensionalizada, para o trecho correspondente a  $s/s_i$  entre 0,5 e 1, considerou-se interessante aplicar novamente o software *TableCurve 2D*<sup>®</sup>, com o intuito de se obter uma expressão do tipo:

$$\frac{h}{h_i} = \phi\left(\frac{s}{s_i}\right) \quad (3.12)$$

Desta forma, obteve-se a curva de regressão seguinte para  $0,5 \leq \frac{s}{s_i} \leq 1$ :

$$\frac{h}{h_i} = \sqrt{0,43 + 0,56 \frac{s}{s_i}} \quad (r^2=0,979) \quad (3.13)$$

O erro máximo da equação em relação aos resultados obtidos pela Eq. (3.13) é inferior a 5%, o que evidencia uma boa aproximação para uma caracterização simplificada do escoamento neste trecho.



**Figura 3.11 - Representação da Eq. (3.13) e valores obtidos através do procedimento numérico.**

Considerou-se interessante o estudo das curvas de regressão associadas aos valores em que  $s/s_i$  se encontra entre 0,5 e 1 de modo a ser possível caracterizar o escoamento em termos de altura em todo o seu percurso até a seção de afloramento da camada limite. Porém, a solução encontrada foi análoga à solução estudada anteriormente (Eq.3.6) não se traduzindo numa melhoria apreciável.

## 4. Modelação do escoamento com emulsão de ar a jusante da seção de afloramento da camada limite

### 4.1. Considerações prévias

No presente capítulo efetua-se o estudo da concentração média de ar em função da distância longitudinal do trecho do escoamento gradualmente variado com emulsão de ar, até ser atingido o regime uniforme.

Os valores de base que serviram de análise para os distintos casos práticos em estudo, encontram-se expressos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Valores de base para a resolução da integração analítica da Eq. (2.48).

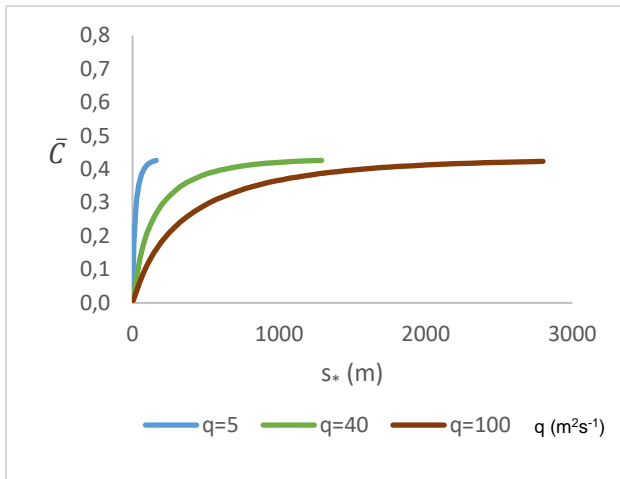
Grandezas	Valores de entrada
$q (m^2 s^{-1})$	1; 5; 10; 20; 30; 40; 50; 100
$K (m^{1/3} s^{-1})$	75
$\theta (^\circ)$	10; 20; 30; 40; 50; 60; 70

A metodologia adotada baseou-se nas seguintes hipóteses simplificativas, usualmente adotadas (Chanson, 1996):

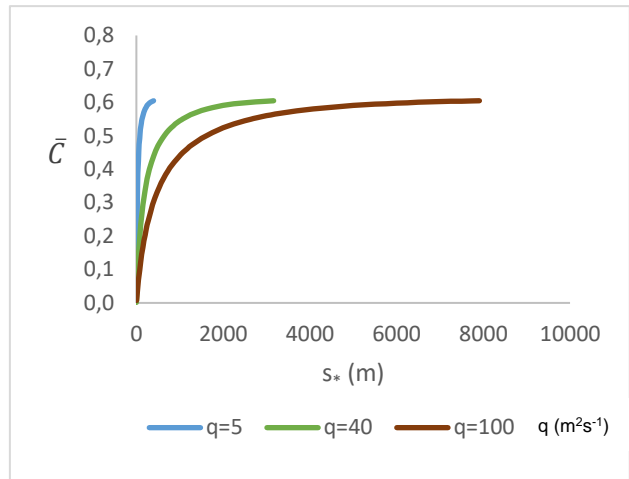
- A água e o ar comportam-se como fluidos não miscíveis.
- A emulsão de ar-água é compressível.
- O escoamento ar-água é homogéneo, sendo a velocidade do ar igual à velocidade da água na direção do escoamento.
- As equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia são aplicáveis a cada volume elementar do fluido, considerado homogéneo, sendo para tal necessário conhecer a concentração de ar em qualquer ponto do fluido.
- A taxa de penetração de ar é constante.
- As variações de velocidade desde a seção de afloramento até ao regime uniforme são reduzidas.

O estudo foi efetuado para apenas um valor de coeficiente de Manning-Strickler uma vez que é desprezável o impacto que esta grandeza tem na evolução da concentração de ar ao longo do descarregador.

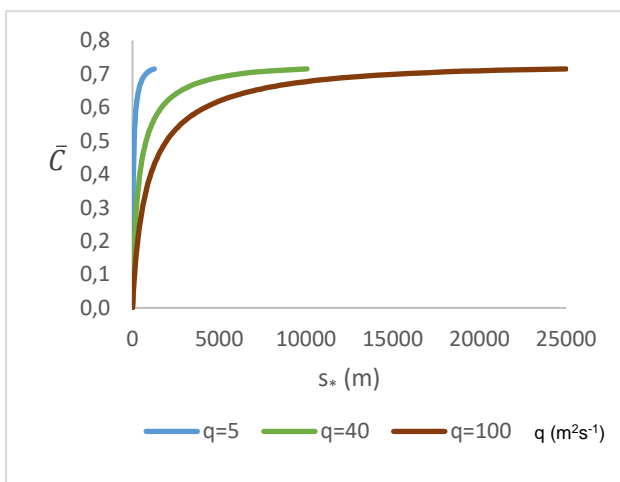
Recorrendo à resolução das Eq. (2.48) a (2.51) apresentadas no Capítulo 2, obtiveram-se os resultados que se apresentam na Figura 4.1 e **Anexo III**.



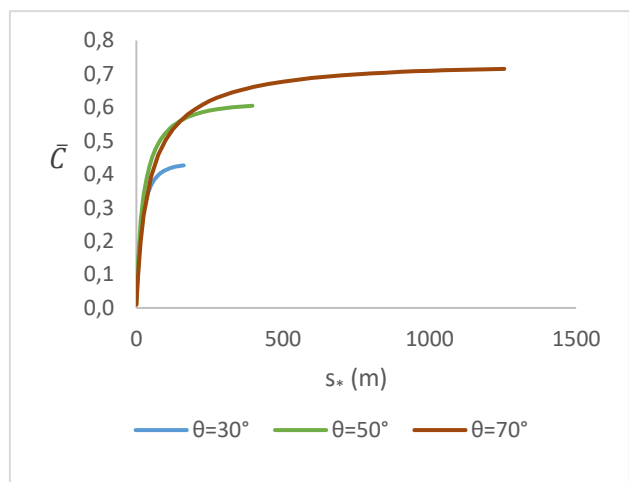
(a)  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  e  $\theta=30^\circ$



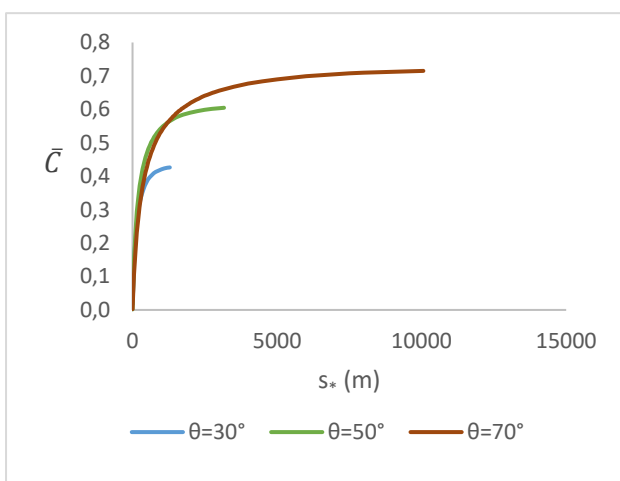
(b)  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  e  $\theta=50^\circ$



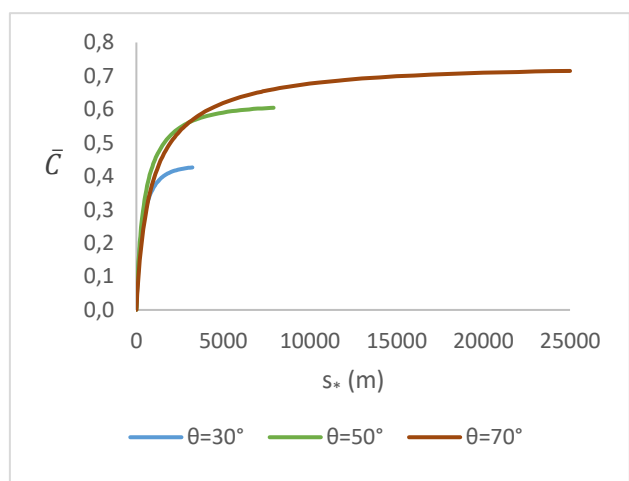
(c)  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  e  $\theta=70^\circ$



(d)  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$



(e)  $q=40 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$



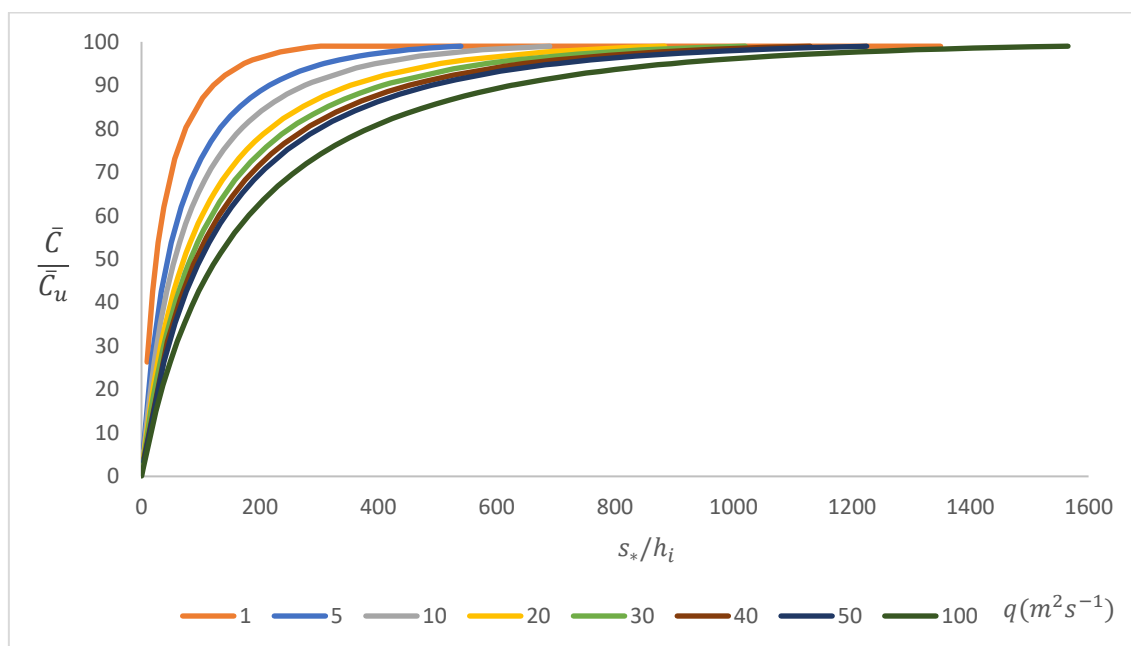
(f)  $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$

**Figura 4.1 – Concentração média de ar a jusante da seção de afloramento da camada limte: valores obtidos por integração analítica para ângulos com a horizontal de  $30^\circ$ ,  $50^\circ$  e  $70^\circ$ , caudais unitários de  $5$ ,  $40$  e  $100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e coeficiente de Manning-Strickler  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ .**

Os resultados da Figura 4.1 a) a c). mostram que o caudal exerce uma influência significativa nos valores da concentração média de ar independentemente do declive do descarregador

Na Fig. 4.1 d) a f) os resultados evidenciam uma influência acentuada do declive independentemente do caudal.

Na Figura 4.2 ilustra-se a razão entre a concentração média de ar e a concentração de ar em regime uniforme em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador.



**Figura 4.2 – Concentração média de ar a jusante da seção de afloramento da camada limite: valores obtidos por integração analítica para um ângulo com a horizontal de 30° e valores do caudal representados na Tabela 4.1.**

Numa primeira análise, é possível concluir que a concentração de ar é bastante condicionada pelo caudal. Na Figura 4.2, é também possível observar que os caudais intermédios do intervalo definido na Tabela 4.1, ou seja, caudais unitários de 20, 30, 40 e 50  $m^2s^{-1}$  apresentam um andamento da curva muito próximo, enquanto que a curva é fortemente dependente de valores muito reduzidos ou elevados do caudal.

## 4.2. Desenvolvimento de expressões adimensionais

Para o estudo adimensional, considerou-se interessante criar uma superfície de regressão, em que  $\frac{\bar{C}}{\bar{C}_u}$  fosse expresso em função das grandezas  $sen\theta$ ,  $\frac{h_c}{k}$ , e  $\frac{s_*}{h_i}$  de modo a realçar a influência que os parâmetros  $\theta$ , caudal unitário, coeficiente de Manning-Strickler e  $\frac{s_*}{h_i}$  têm no desenvolvimento da concentração média de ar no escoamento a jusante da seção de afloramento da camada limite, tal que

$$\frac{\bar{C}}{\bar{C}_u} = \Phi \left( \text{sen}\theta; \frac{h_c}{k}; \frac{S_*}{h_i} \right) \quad (4.1)$$

Para o efeito, recorreu-se à utilização do software *TableCurve 3D*®. Após a aplicação do software, concluiu-se que soluções de simples aplicação teriam coeficientes de determinação  $r^2$  inferiores a 0,84, pelo que não foram não seriam consideradas.

Uma segunda solução foi desenvolvida recorrendo ao software *TableCurve 2D*®, tendo-se obtida a seguinte família de curvas, com coeficientes de determinação  $r^2 = 0,99$  para todas as curvas de regressão correspondentes às 56 situações práticas distintas sugeridas na anterior Tabela 4.1.

Para cada uma das 56 situações práticas, obteve-se um valor para os parâmetros  $a$  e  $b$ .

$$\frac{\bar{C}}{\bar{C}_u} = \frac{a \frac{S_*}{h_i}}{b + \frac{S_*}{h_i}} \quad (4.2)$$

onde  $a$  pode ser descrito em função de  $\text{sen}\theta$  e  $b$  em função de  $\text{sen}\theta$  e  $h_c/k$ , nomeadamente.

Após a análise das mesmas, expressas nas Tabelas 4.2 e 4.3, foram obtidas as e Eq.(4.3) e (4.4), através dos softwares *TableCurve 2D*® e *TableCurve 3D*®, cujas representações gráficas podem ser consultadas nas Fig. 4.3 e 4.4.

$$a = 132,33 - 31,33\sqrt{\text{sen}(\theta)} \quad (4.3)$$

$$b = -82,85 + \frac{(-16,2)}{\ln(\text{sen}\theta)} + 3,25 \sqrt{\frac{h_c}{k}} \quad (4.4)$$

**Tabela 4.2 - Valores de  $a$  utilizados para obtenção da Eq. (4.3).**

		q (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )							
		1	5	10	20	30	40	50	100
θ (°)	10	119,6	117,8	118,7	119,7	120,6	118,6	118,5	119,1
	20	113,7	113,7	114,1	114,1	114,9	113,3	113,1	115,0
	30	110,1	109,9	110,7	110,9	111,0	110,4	110,2	111,0
	40	107,3	107,3	107,4	107,5	107,6	107,1	107,3	107,7
	50	105,0	105,1	105,0	105,0	104,9	105,0	105,0	104,8
	60	103,5	103,4	103,2	103,1	102,9	103,1	103,0	103,0
	70	101,1	101,9	101,8	101,4	101,6	101,4	101,9	101,7

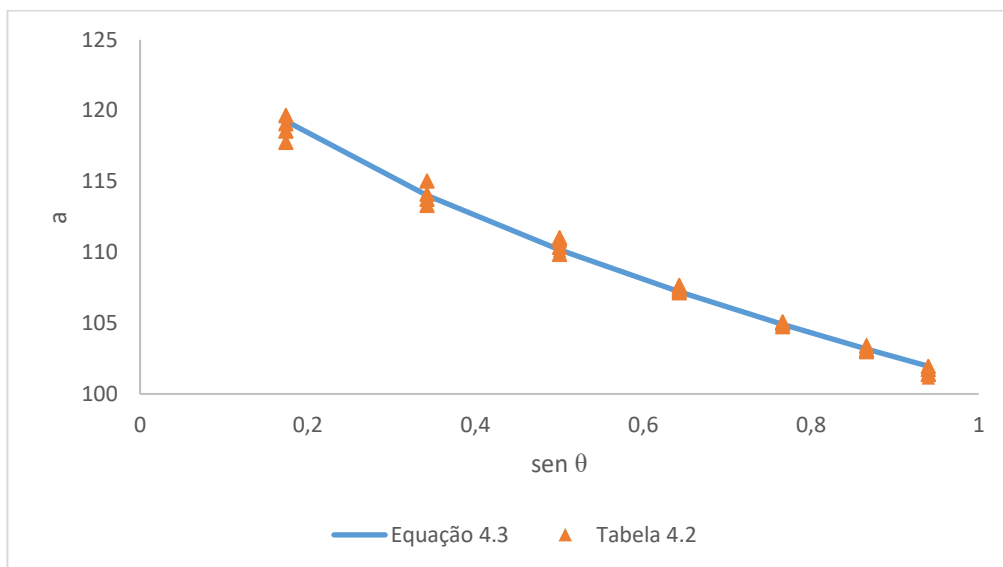


Figura 4.3 – Parâmetro  $\alpha$  da Eq. (4.2) em função do  $\text{sen}\theta$ .

Tabela 4.3 - Valores de  $b$  utilizados para a obtenção da Eq. (4.4).

		$q \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$							
		1	5	10	20	30	40	50	100
$\theta \text{ (}^\circ\text{)}$	10	31,1	16,9	38,7	50,3	60,1	62,5	68,0	89,1
	20	22,6	40,4	51,6	67,3	78,8	82,5	89,1	119,9
	30	28,9	50,5	66,3	86,1	100,0	108,1	116,7	152,1
	40	36,8	65,5	84,3	108,0	125,3	136,1	148,7	192,4
	50	48,1	86,5	110,3	140,4	161,4	181,3	196,1	248,5
	60	68,4	120,8	154,3	196,1	222,8	251,6	271,6	347,4
	70	99,5	181,9	230,6	297,1	344,0	384,6	424,8	536,9

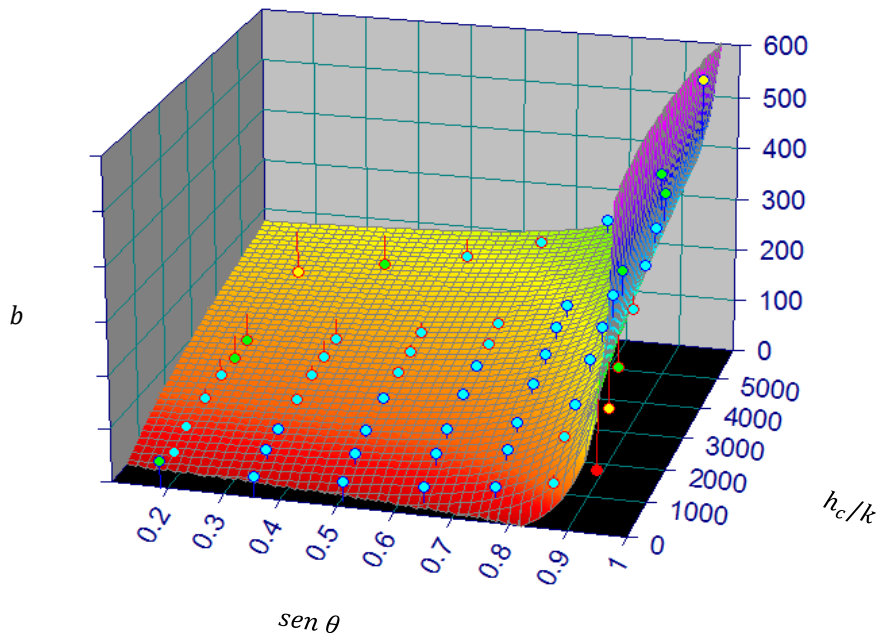


Figura 4.4 - Parâmetro  $b$  da Eq.(4.2) em função do  $\text{sen}\theta$  e  $h_c/k$ .

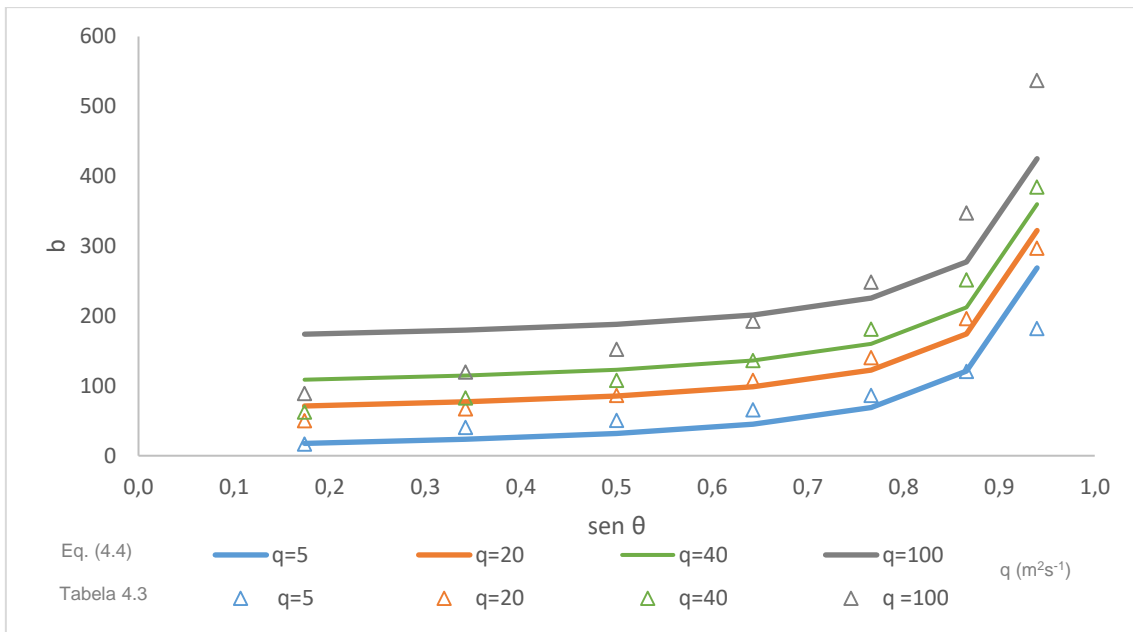
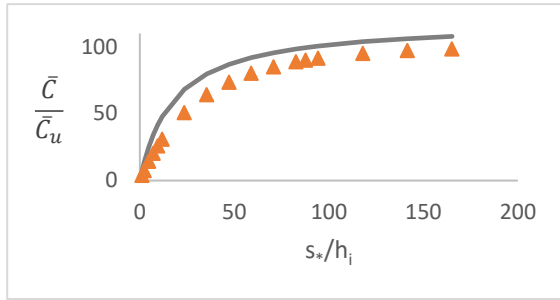


Figura 4.5 – Parâmetro  $b$  da Eq. (4.2) em função do  $\text{sen}\theta$  e para valores de  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $q=40 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e  $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .

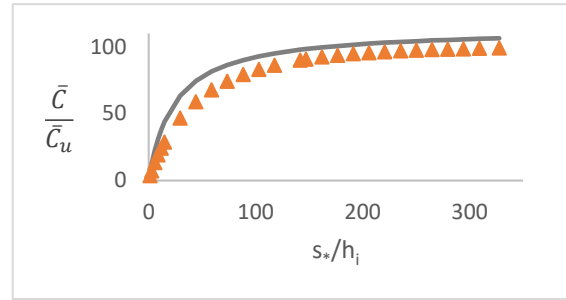


Recorreu-se à verificação da qualidade de aproximação das curvas de regressão em função do ângulo, caudal unitário e distância ao longo do descarregador desde a seção de afloramento da camada limite, assim como a sua análise.

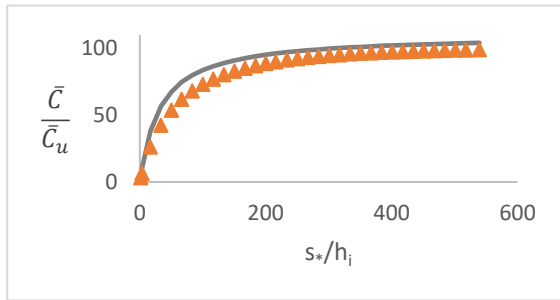
Nesta análise, considerou-se interessante analisar a aproximação das curvas de regressão proposta pela Eq. (4.2) para os caudais  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $q=40 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e  $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , representando todos os declives.



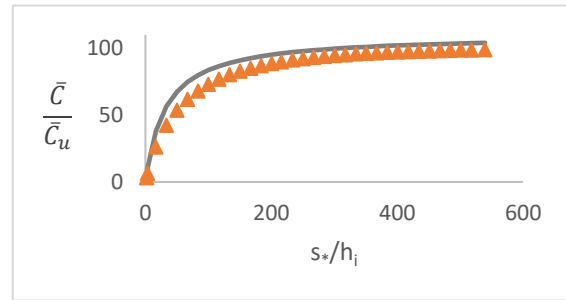
(a)



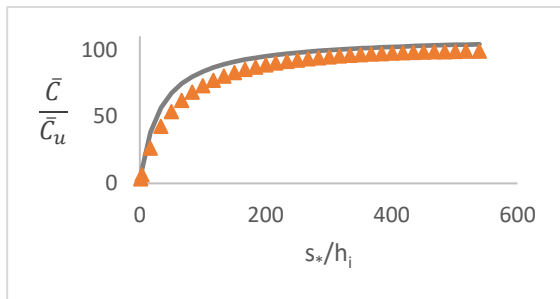
(b)



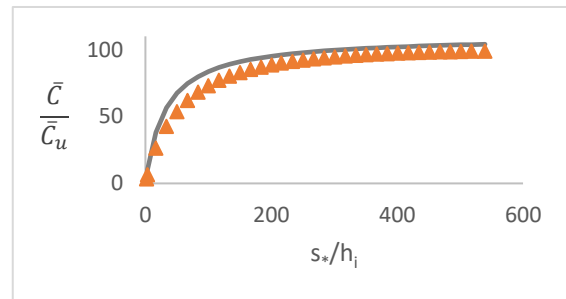
(c)



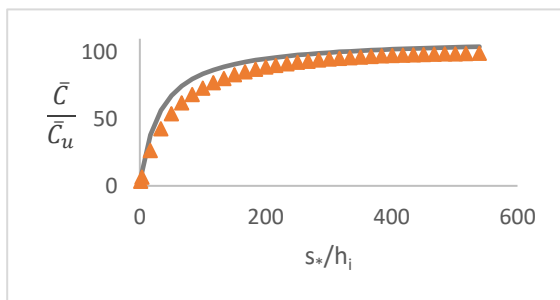
(d)



(e)



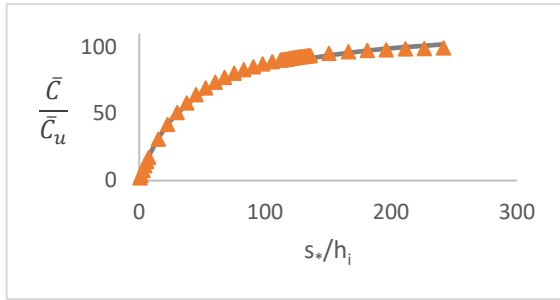
(f)



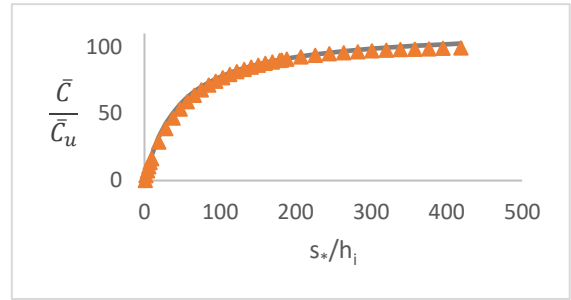
(g)

— Eq. (4.2) a (4.4) ▲ Eq. (2.48) a (2.51)

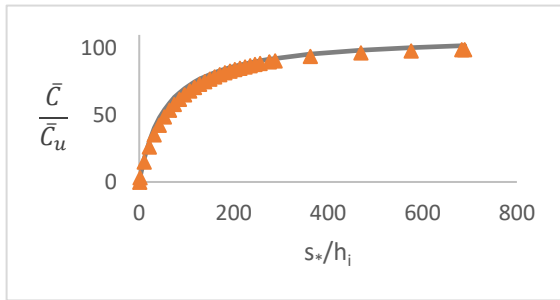
**Figura 4.6 – Concentração média de ar adimensionalizada em função da distância longitudinal à seção de afloramento da camada limite: comparação de resultados para  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . (a)  $\theta=10^\circ$  (b)  $\theta=20^\circ$  (c)  $\theta=30^\circ$  (d)  $\theta=40^\circ$  (e)  $\theta=50^\circ$  (f)  $\theta=60^\circ$  (g)  $\theta=70^\circ$ .**



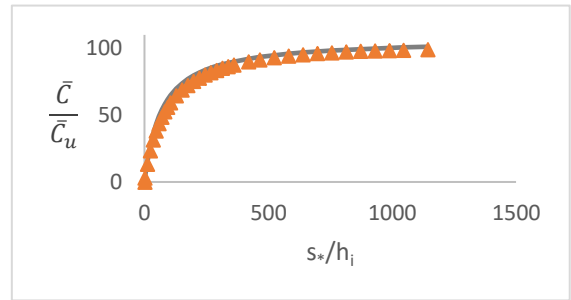
(a)



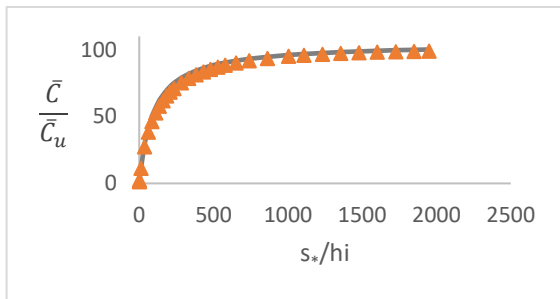
(b)



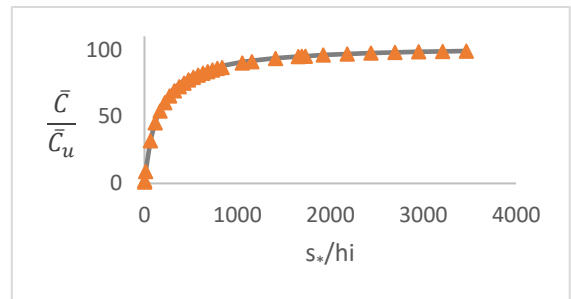
(c)



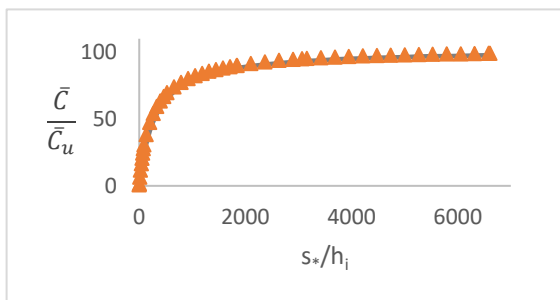
(d)



(e)



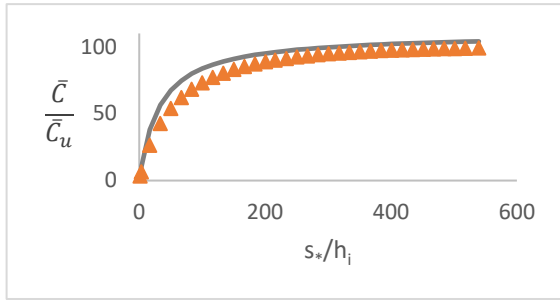
(f)



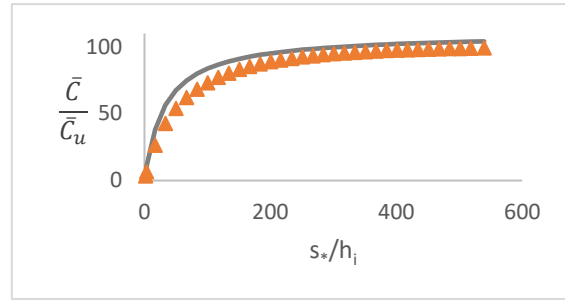
(g)

— Eq. (4.2) a (4.4) ▲ Eq. (2.48) a (2.51)

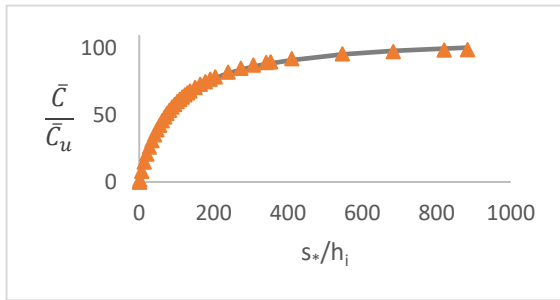
**Figura 4.7- Concentração média de ar adimensionalizada em função da distância longitudinal à seção de afloramento da camada limite: comparação de resultados para  $q=10 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . (a)  $\theta=10^\circ$  (b)  $\theta=20^\circ$  (c)  $\theta=30^\circ$  (d)  $\theta=40^\circ$  (e)  $\theta=50^\circ$  (f)  $\theta=60^\circ$  (g)  $\theta=70^\circ$ .**



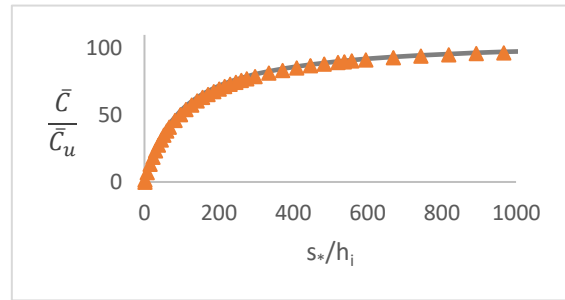
(a)



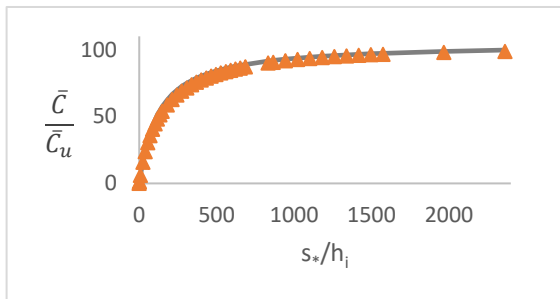
(b)



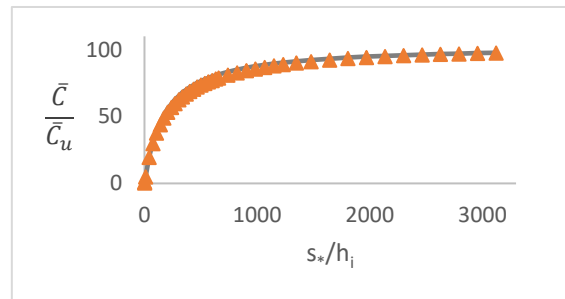
(c)



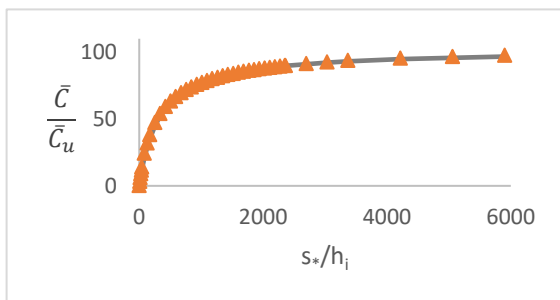
(d)



(e)



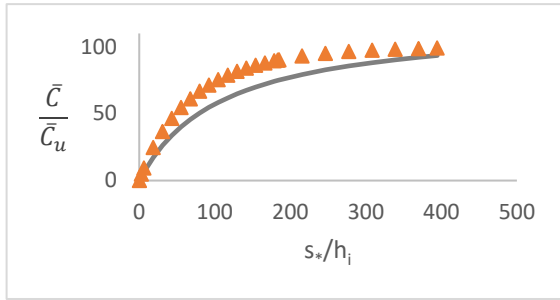
(f)



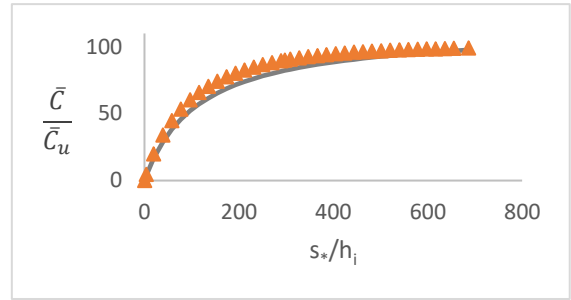
(g)

— Eq. (4.2) a (4.4) ▲ Eq. (2.48) a (2.51)

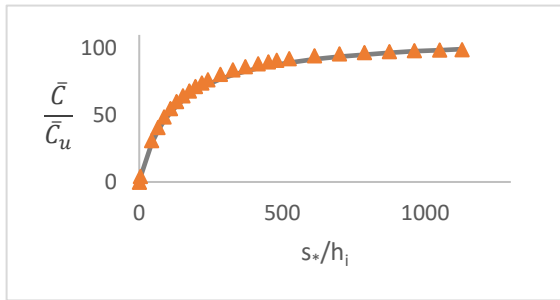
**Figura 4.8 - Concentração média de ar adimensionalizada em função da distância longitudinal à seção de afloramento da camada limite: comparação de resultados para  $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  (a)  $\theta=10^\circ$  (b)  $\theta=20^\circ$  (c)  $\theta=30^\circ$  (d)  $\theta=40^\circ$  (e)  $\theta=50^\circ$  (f)  $\theta=60^\circ$  (g)  $\theta=70^\circ$ .**



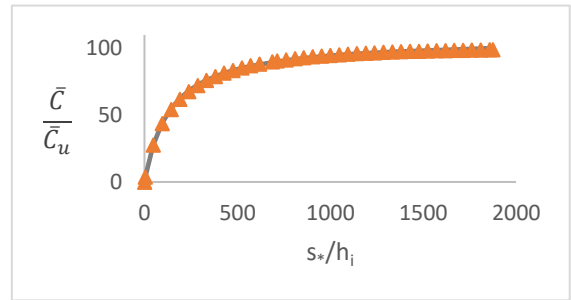
(a)



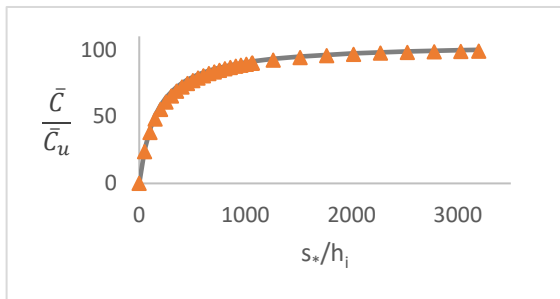
(b)



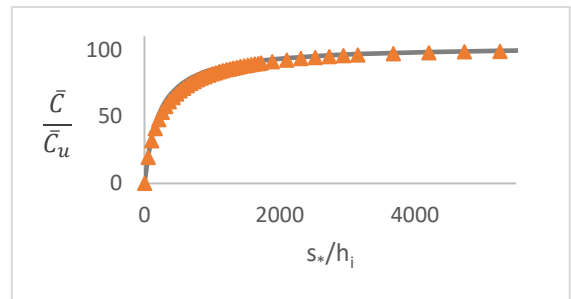
(c)



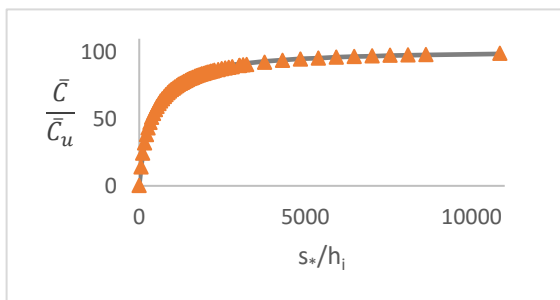
(d)



(e)



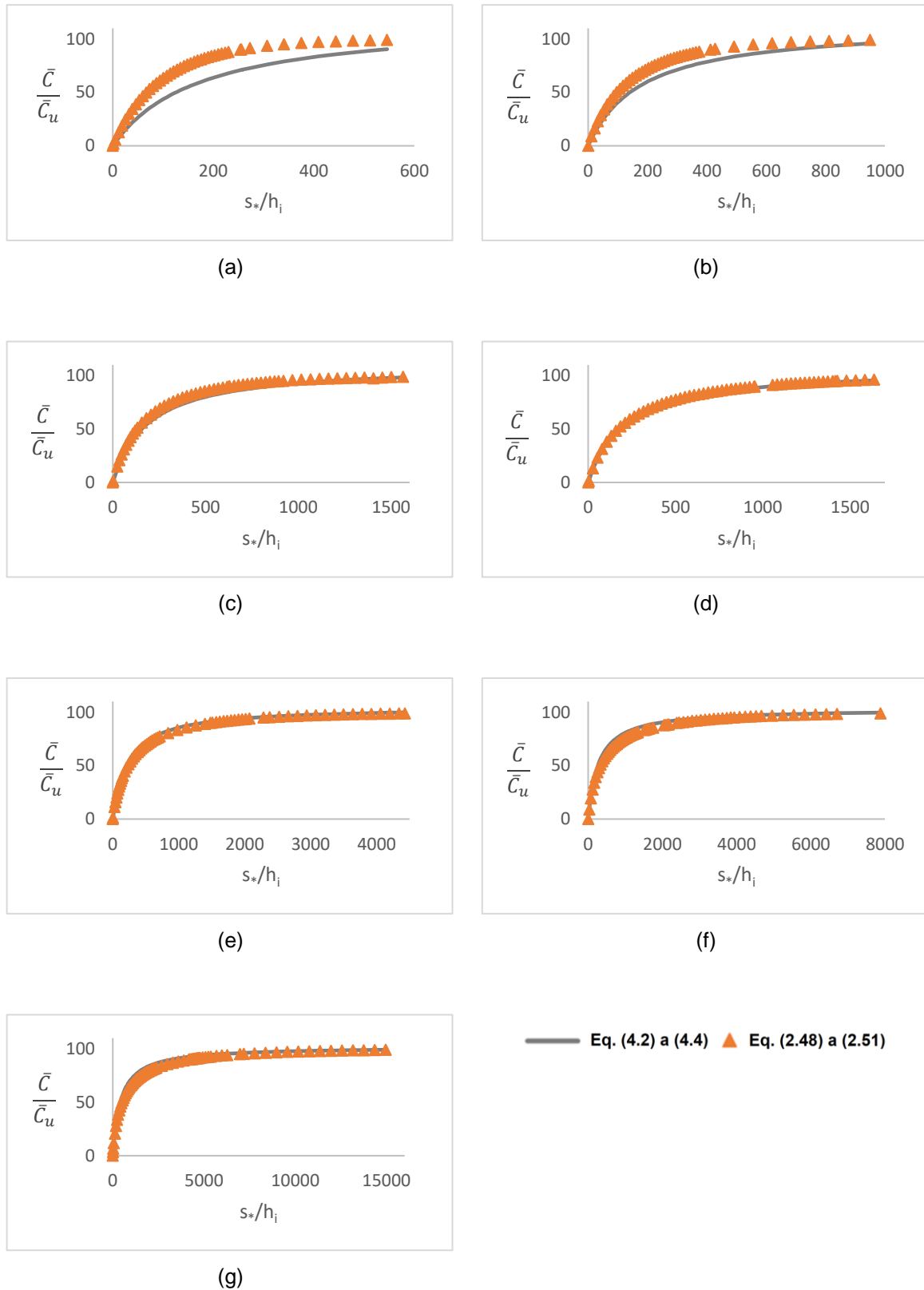
(f)



(g)

— Eq. (4.2) a (4.4) ▲ Eq. (2.48) a (2.51)

**Figura 4.9 - Concentração média de ar adimensionalizada em função da distância longitudinal à seção de afloramento da camada limite: comparação de resultados para  $q=40 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . (a)  $\theta=10^\circ$  (b)  $\theta=20^\circ$  (c)  $\theta=30^\circ$  (d)  $\theta=40^\circ$  (e)  $\theta=50^\circ$  (f)  $\theta=60^\circ$  (g)  $\theta=70^\circ$ .**



**Figura 4.10 - Concentração média de ar adimensionalizada em função da distância longitudinal à seção de afloramento da camada limite: comparação de resultados para  $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . (a)  $\theta=10^\circ$  (b)  $\theta=20^\circ$  (c)  $\theta=30^\circ$  (d)  $\theta=40^\circ$  (e)  $\theta=50^\circ$  (f)  $\theta=60^\circ$  (g)  $\theta=70^\circ$ .**

Os resultados da regressão revelaram um bom ajustamento para caudais superiores a  $5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . Face a esta prévia conclusão, houve a tentativa de elaborar um estudo de uma possível superfície de regressão aplicável a caudais de menor dimensão, no entanto, não foram obtidas soluções adequadas.

Observando a Figura 4.6, para o caudal unitário de  $5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , nota-se a aproximação gradual das curvas de regressão em relação aos valores obtidos através da resolução numérica das Eq. (2.48) à (2.51) à medida que o declive é maior. A superfície de regressão estimada pela Eq. (4.2) não apresenta um bom ajustamento para ângulos com a horizontal inferiores a  $40^\circ$ , não sendo aconselhada a sua aplicação. Para valores superiores do ângulo, a curva confirma-se adequada.

Na Figura 4.7, verifica-se uma melhor aproximação dos resultados para declives suaves. Para os restantes casos, os resultados pouco diferem, embora para ângulos de  $30^\circ$ ,  $40^\circ$  e  $50^\circ$  as curvas de regressão atingem mais rapidamente a concentração relativa ao escoamento uniforme.

Na Figura 4.8, observa-se um pior ajustamento ajuste das curvas sugeridas pela Eq. (4.2) para declives pouco significativos. Para canais descarregadores cujo ângulo com o plano horizontal é de  $\theta=30^\circ$ , observam-se valores ligeiramente inferiores quando  $s_*/h_i$  se encontra entre 0 e 0,3. Verifica-se, no entanto, uma excelente aproximação para ângulos superiores a  $30^\circ$ , embora se note um melhor ajustamento.

A Figura 4.9 exibe resultados semelhantes aos da Figura 4.8, para ângulos superiores a  $20^\circ$ .

Analisando a Figura 4.10 onde se encontram os resultados obtidos para um caudal unitário de  $100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , observa-se uma maior dispersão de resultados para todos os ângulos que o canal descarregador faz com a horizontal. A superfície de regressão não revela boas soluções sendo inadequado a sua utilização na estimativa de concentração média de ar do escoamento a jusante da seção de afloramento da camada limite, quando se trata de canais com ângulos com  $10^\circ$ . Para canais com ângulos de  $20^\circ$  e  $30^\circ$ , a comparação de resultados revela um aumento menor da concentração média de ar obtida a partir da Eq. (4.2). Relativamente aos restantes ângulos com o plano horizontal, verifica-se um bom ajuste das curvas de regressão, embora para declives mais acentuados exista uma tendência para concentrações média de ar ligeiramente superiores numa posição intermédia da sua trajetória.

Conclui-se que a Eq. (4.2) apresenta resultados bastante satisfatórios para um significativo intervalo de caudais e declives. Sugere-se a utilização da mesma para escoamentos em canais descarregadores que fazem um ângulo não inferior a  $20^\circ$  com o plano horizontal e caudais unitários superiores a  $20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .

### **4.3. Estudo comparativo**

No âmbito deste capítulo é feita uma análise comparativa dos resultados da concentração média de ar obtida através das curvas de regressão anteriormente referidas com os valores experimentais obtidos por Cain (1978).e numéricos por Wood (1985, 1991).

Teve-se em consideração os seguintes valores de entrada, expressos na seguinte Tabela 4.4.

**Tabela 4.4 - Valores de entrada para a análise comparativa de resultados obtidos por Cain (1978).**

q (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	2,23	3,15
θ (°)	45	
sen(θ)	0,707	
u <sub>r</sub> (m/s)	0,4	
k (m)	0,001	

Uma vez, que a concentração média de ar no escoamento é dada em função da grandeza adimensional  $s_*/h_i$ , procedeu-se à determinação da altura do escoamento na seção de afloramento da camada limite através do método anteriormente descrito no Capítulo 3.

A localização da seção de afloramento da camada limite e as grandezas características do escoamento nessa seção, para os casos experimentais descritos por Cain (1978), podem ser consultadas na Tabela 4.5.

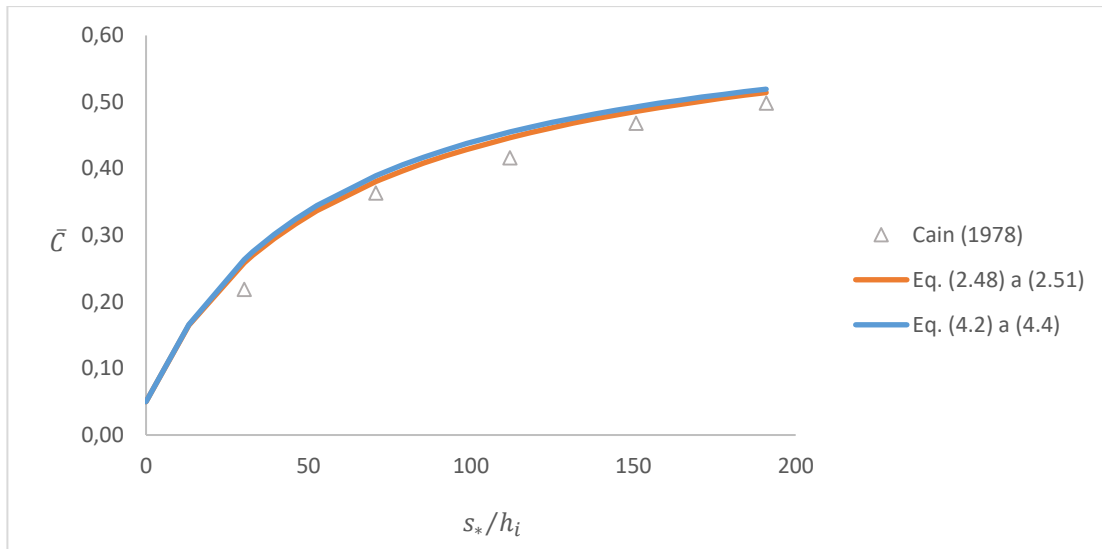
**Tabela 4.5 –Localização e grandezas características do escoamento na seção de afloramento da camada limite: resultados experimentais de Cain (1978).**

q (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	2,23	3,15
h <sub>i</sub> (m)	0,152	0,194
s <sub>i</sub> (m)	18,4	23,8
V <sub>90</sub> (m s <sup>-1</sup> )	16,0	18,2

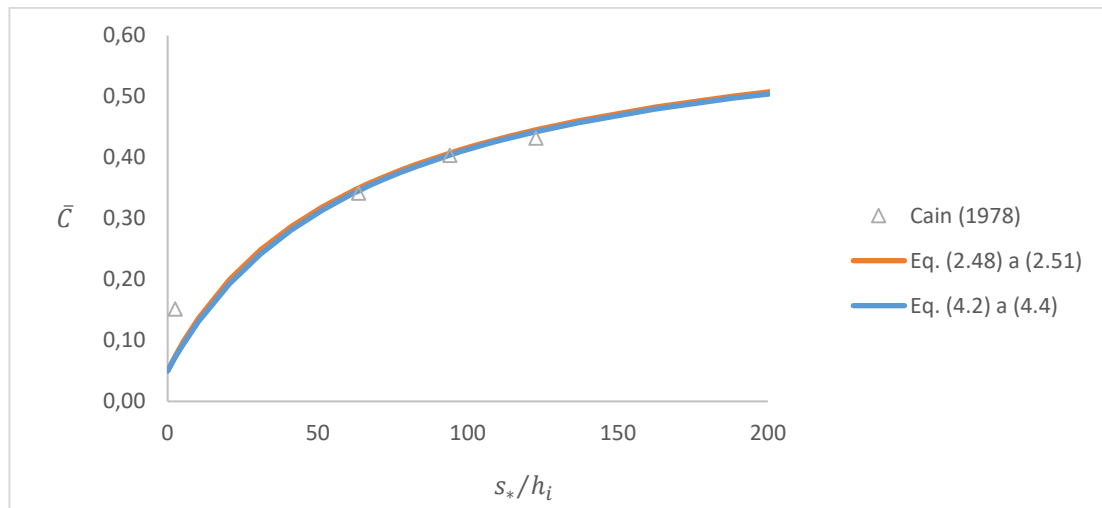
Procedeu-se ao cálculo da concentração média de ar através da resolução das Eq. (2.48) a (2.51) e à sua comparação com os resultados obtidos experimentalmente e através da superfície de regressão, de acordo com as Eq.(4.2) a (4.4).

Em face dos resultados apresentados na Figura 4.11 e na Tabela 4.6 ( $q = 2,23 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ), verifica-se que os valores obtidos através da resolução das Eq.(2.48) a (2.51) ou das Eq. (4.2) a (4.4) são relativamente próximos dos experimentais (<10%), excetuando na seção mais próxima do afloramento da camada limite, onde se observa uma diferença apreciável (~20%). Conclusões análogas podem ser formuladas para  $q = 3,15 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (Figura 4.12 e na Tabela 4.7), com uma diferença mais significativa na seção imediatamente a jusante da seção de afloramento da camada limite (~50%), e valores muito próximos no trecho gradualmente variado, mais a jusante (<4%).





**Figura 4.11 - Concentração média de ar em função da distância adimensionalizada à seção de afloramento da camada limite, para  $q=2,23 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .**



**Figura 4.12 - Concentração média de ar em função da distância adimensionalizada à seção de afloramento da camada limite, para  $q=3,15 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .**

**Tabela 4.6 – Análise comparativa de  $\bar{C}$  para  $q=2,23 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .**

$s_*/h_i$	$\bar{C}$			$\delta$ (%)	
	Cain (1978)	Eq. (2.48) a (2.51)	Eq. (4.2) a (4.4)	Eq. (2.48) a (2.51)	Eq. (4.2) a (4.4)
30,22	0,22	0,26	0,26	18,21	20,45
70,74	0,36	0,38	0,39	4,72	7,11
111,97	0,42	0,45	0,45	7,33	9,34
150,79	0,47	0,49	0,49	3,77	5,23
190,91	0,50	0,51	0,52	3,23	4,26

Tabela 4.7 - Comparação de valores de  $\bar{C}$  para  $q=3,15 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .

$s_*/h_i$	$\bar{C}$			$\delta$ (%)	
	Cain (1978)	Eq. (2.48) a (2.51)	Eq. (4.2) a (4.4)	Eq. (2.48) a (2.51)	Eq. (4.2) a (4.4)
2,51	0,15	0,07	0,07	51,20	52,51
63,54	0,34	0,35	0,35	2,37	1,10
93,94	0,40	0,41	0,40	0,99	0,22
122,69	0,43	0,45	0,44	3,10	2,44

Em face dos resultados apresentados na Figura 4.11 e na Tabela 4.6, verifica-se que os valores obtidos através da resolução das Eq. (4.2) a (4.4) são satisfatórios embora ligeiramente superiores face aos valores registados por Cain (1978) ao longo do trecho correspondente ao regime gradualmente variado, atingindo um erro máximo relativo de 20,25%, enquanto que a resolução das Eq.(2.48) a (2.51) com um erro inferior a 18,21%. Em geral, os valores provenientes da resolução das Eq.(4.2) a (4.4) apresenta resultados mais favoráveis quando se trata dos dados relativos ao caudal  $3,15 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . Analisando os dados relativos ao escoamento de caudal  $3,15 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , os valores obtidos pelas Eq. (2.48) a (2.51), e por sua vez das Eq. (4.2) a (4.4), ajustam-se aos dados obtidos por Cain, apresentando erros relativos na ordem dos 0,2-3,1 %, à exceção da seção inicial do trecho gradualmente variado.

#### 4.4. Extensão do trecho gradualmente variado

No seguimento do subcapítulo anterior, considerou-se interessante a análise de uma possível relação entre  $s_i$  e  $s_{u*}$ , em que  $s_{u*}$  é o desenvolvimento do trecho gradualmente variado com emulsão de ar, a jusante da seção de afloramento da camada limite.

Uma vez que os valores de  $s_{u*}$  se distinguem pela elevada ordem de grandeza quando  $\bar{C}/\bar{C}_u$  atinge 99%, procedeu-se à análise da relação entre as grandezas  $s_i$  e  $s_{u*}$ , para valores de 90%, 95% e 99% da concentração média de ar uniforme. Nas Tabelas 4.8, 4.9 e 4.10 apresentam-se os resultados relativos a  $s_{u*}/s_i$  quando  $\bar{C}/\bar{C}_u$  é igual a 0,9, 0,95 e 0,99.

**Tabela 4.8 - Valores de  $s_{u^*}/s_i$  quando  $\bar{C}/\bar{C}_u=0,90$ .**

q (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	θ (°)						
	10	20	30	40	50	60	70
1	0,51	0,78	1,16	1,70	2,58	4,13	7,24
5	0,81	1,23	1,81	2,70	4,11	6,63	11,43
10	0,98	1,50	2,22	3,29	5,01	8,01	13,90
20	1,19	1,82	2,69	4,01	6,16	9,76	16,96
30	1,34	2,05	3,03	4,49	6,90	10,99	19,06
40	1,45	2,22	3,27	4,88	7,45	11,90	20,67
50	1,55	2,36	3,49	5,20	7,97	12,73	22,01
100	1,88	2,88	4,27	6,33	9,67	15,44	26,91

**Tabela 4.9 - Valores de  $s_{u^*}/s_i$  quando  $\bar{C}/\bar{C}_u=0,95$ .**

q (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	θ (°)						
	10	20	30	40	50	60	70
1	0,68	1,07	1,66	2,52	3,98	6,65	12,09
5	1,08	1,70	2,59	4,00	6,35	10,62	19,07
10	1,32	2,07	3,17	4,87	7,74	12,88	23,21
20	1,60	2,52	3,84	5,95	9,50	15,70	28,31
30	1,80	2,83	4,33	6,67	10,64	17,65	31,82
40	1,95	3,07	4,68	7,24	11,51	19,14	34,50
50	2,08	3,26	4,98	7,71	12,30	20,46	36,73
100	2,53	3,98	6,11	9,39	14,93	24,84	44,92

**Tabela 4.10 - Valores de  $s_{u^*}/s_i$  quando  $\bar{C}/\bar{C}_u=0,99$ .**

q (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	θ (°)						
	10	20	30	40	50	60	70
1	1,09	1,79	2,90	4,63	6,34	13,63	26,06
5	1,73	2,84	4,52	7,34	12,33	21,75	41,08
10	2,11	3,47	5,54	8,95	15,00	26,39	50,00
20	2,57	4,21	6,72	10,90	18,46	32,17	61,35
30	2,88	4,72	7,57	12,24	20,68	36,18	69,17
40	3,13	5,12	8,17	13,29	22,31	39,21	74,49
50	3,33	5,46	8,71	14,15	24,12	41,94	79,14
100	4,05	6,65	10,68	17,22	28,94	50,90	96,39

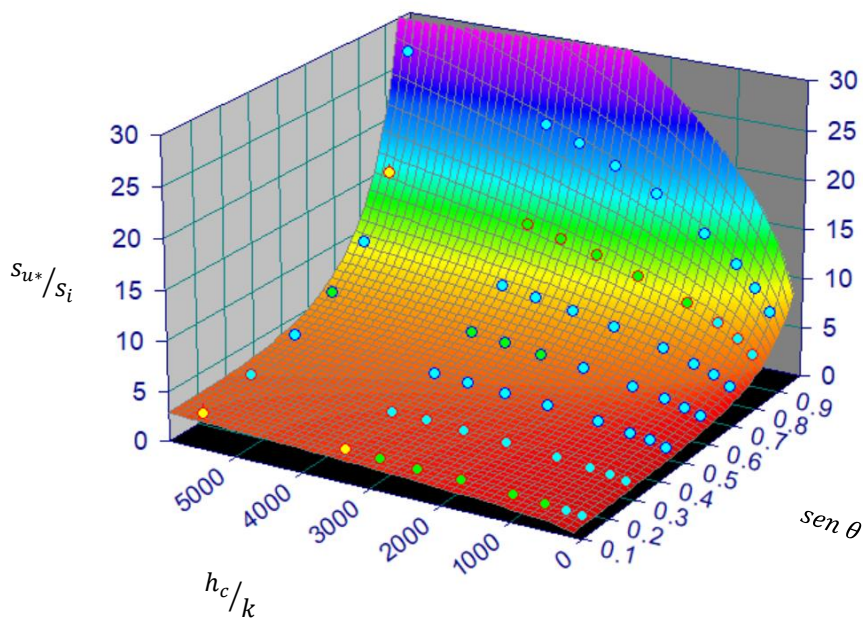
Para os três casos de estudo, observa-se que a relação  $s_{u^*}/s_i$  é crescente com o declive e com o caudal unitário como expectável.

Posto isto, e dada a utilidade prática de que  $s_{u^*}/s_i$  poderá vir a ter, recorreu-se ao software *TableCurve 3D*® de modo a relacionar as grandezas adimensionais  $s_{u^*}/s_i$ ,  $h_c/k$  e  $\text{sen } \theta$ .

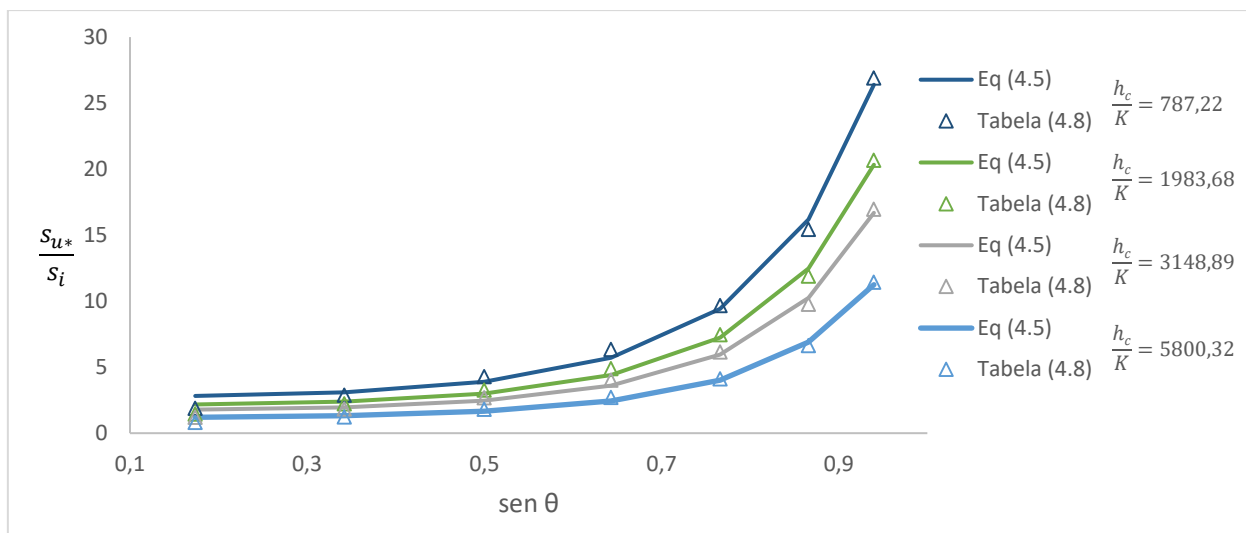
A superfície de regressão proposta para representar a relação entre  $s_{u^*}/s_i$  para  $\bar{C}/\bar{C}_u=0,90$ , é dada por:

$$\frac{s_{u^*}}{s_i} = e^{a+b(\text{sen}\theta)^3+c \ln\left(\frac{h_c}{k}\right)} \quad (r^2=0,996) \quad (4.5)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes e tomam valores de  $(-2,678)$ ,  $2,712$  e  $0,427$



**Figura 4.13 - Representação gráfica da superfície de regressão dos valores de  $s_{u^*}/s_i$  para  $\bar{C}/\bar{C}_u=0,9$ .**



**Figura 4.14 - Representação gráfica da superfície de regressão dos valores de  $s_{u^*}/s_i$  para  $\bar{C}/\bar{C}_u=0,9$  e para  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $q=40 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e  $q=100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .**

De seguida, na Tabela 4.11, apresentam-se os valores referentes aos erros máximos da superfície de regressão dada pela Eq. (4.5).

**Tabela 4.11 - Erros máximos (em percentagem) dos valores obtidos pela Eq. (4.5) face à relação  $s_{u^*}/s_i$  para  $\bar{C}/\bar{C}_u=0,90$ .**

q (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	θ (°)						
	10	20	30	40	50	60	70
1	49,6	7,7	9,5	9,5	1,7	5,5	1,8
5	49,1	7,5	8,1	9,7	2,6	4,0	1,6
10	48,9	7,2	8,7	9,8	2,5	4,9	1,5
20	49,3	7,5	8,2	9,9	3,4	4,8	1,6
30	49,5	7,4	8,6	9,8	3,2	4,5	1,8
40	49,3	7,6	8,2	9,8	2,8	4,7	1,7
50	49,3	7,7	8,2	9,8	3,1	4,4	1,6
100	49,6	7,5	8,7	9,8	2,7	4,8	2,0

A Eq.(4.5) revela ser uma boa solução para a maioria dos caudais e declives, não existindo erros relativos superiores a 10% exceccionalmente para pequenos ângulos com o plano horizontal. Recomenda-se a utilização da expressão apenas para declives superiores a 10°.

Procedeu-se à mesma metodologia para a determinação da superfície de regressão em função de  $h_c/k$  e  $\text{sen } \theta$  para o cálculo de  $s_{u^*}/s_i$  para  $\bar{C}/\bar{C}_u=0,95$  e  $\bar{C}/\bar{C}_u=0,99$ , tendo-se obtido os seguintes valores:

**Tabela 4.12 - Parâmetros a,b e c.**

$\bar{C}/\bar{C}_u$ (%)	a	b	c
90	-2,678	2,712	0,427
95	-2,347	2.932	0,427
99	-1,818	3.230	0,427

Para as três situações anteriores obteve-se idêntico coeficiente de determinação  $r^2=0,997$ .

Apresentam-se de seguida as seguintes tabelas representativas dos erros máximos da utilização da Eq. (4.5), para os valores das constantes  $a, b$  e  $c$  anteriormente descritas.

**Tabela 4.13 - Erros máximos (em percentagem) dos valores obtidos pela Eq (4.5) face à relação  $s_{u^*}/s_i$  para  $\bar{C}/\bar{C}_u=0,95$ .**

q (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	$\theta$ (°)						
	10	20	30	40	50	60	70
1	55,5	9,4	9,3	10,0	2,1	5,3	1,7
5	54,8	9,2	8,0	10,1	3,0	4,3	1,4
10	54,7	8,9	8,6	10,2	3,0	4,7	1,4
20	55,2	9,2	8,1	10,3	3,8	4,7	1,5
30	55,3	9,1	8,5	10,2	3,6	4,5	1,7
40	55,2	9,3	8,0	10,3	3,2	4,6	1,6
50	55,1	9,4	8,0	10,3	3,5	4,3	1,5
100	55,5	9,3	8,6	10,2	3,1	4,6	1,8

**Tabela 4.14 – Erros máximos (em percentagem) dos valores obtidos pela Eq (4.5) face à relação  $s_{u^*}/s_i$  para  $\bar{C}/\bar{C}_u=0,99$ .**

q (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	$\theta$ (°)						
	10	20	30	40	50	60	70
1	64,8	12,5	8,5	9,9	4,5	5,9	0,9
5	64,2	12,2	7,2	10,1	3,0	4,9	0,6
10	64,0	12,0	7,9	10,1	2,9	5,3	0,5
20	64,5	12,3	7,4	10,2	3,9	5,2	1,2
30	64,6	12,3	7,8	10,2	3,7	5,0	1,7
40	64,5	12,4	7,2	10,2	3,1	5,2	0,9
50	64,5	12,5	7,3	10,2	4,5	4,8	0,6
100	65,0	12,4	7,9	10,1	3,1	5,2	0,6

Analogamente aos resultados obtidos pela Eq. (4.5) para  $s_{u^*}/s_i$  quando  $\bar{C}/\bar{C}_u=0,90$ , a Tabela 4.13 e Tabela 4.14, indicam que a solução proposta para o estudo do escoamento num canal

com ângulo de 10, não é satisfatória, atingindo erros máximos da ordem de 60%. No entanto, os resultados para as restantes situações são aceitáveis, sendo possível confirmar que as grandezas  $s_{u*}$  e  $s_i$  são relacionáveis em função do caudal e declive do canal descarregador.

Os resultados expressos pela Eq. (4.5) não estão em concordância com as conclusões retiradas por Falvey (1980), a partir dos resultados de medição da interface ar-água obtidos por Bormann (1968). Com efeito, a partir daqueles resultados experimentais, Falvey (1980) refere que a extensão do trecho correspondente ao escoamento gradualmente variado com emulsionamento de ar seria da mesma ordem de grandeza da relativa ao trecho de desenvolvimento da camada limite, o que apenas se verifica para valores relativamente pequenos do caudal unitário e para declives não muito acentuados.





## 5. Conclusões e sugestões para o prosseguimento do estudo

Com o presente trabalho pretendeu-se contribuir para a sistematização e o aprofundamento dos conhecimentos relativos à temática do escoamento com velocidade elevada em descarregadores de cheias com paramento convencional, a montante e a jusante da seção de afloramento da camada limite.

Apresentam-se de seguida, as principais conclusões do presente estudo:

Relativamente ao capítulo 2, destinado à revisão bibliográfica da presente dissertação, é dedicada atenção ao estudo aprofundado do arejamento da veia líquida através da superfície livre, sendo apresentados métodos que visam quantificar as grandezas características do escoamento na seção de afloramento da camada limite e a montante dessa seção. Nas últimas duas décadas, registaram-se poucos avanços nos estudos referentes a canais descarregadores convencionais.

Dos resultados obtidos no capítulo 3, realça-se que a altura adimensionalizada do escoamento ao longo do descarregador, a montante da seção de afloramento da camada limite, depende fortemente do declive do canal num trecho inicial, sendo pouco influenciada pelo caudal unitário e pela rugosidade do canal.

Verificou-se que os resultados obtidos pela expressão empírica para caudais reduzidos apresentavam pior ajustamento em relação aos obtidos mediante aplicação da modelação numérica simplificada. Contudo, em geral, os resultados obtidos indicam que as expressões empíricas permitem estimar adequadamente as principais grandezas do escoamento.

No que concerne à análise do escoamento com emulsão de ar a jusante da seção de afloramento da camada limite (capítulo 4), constatou-se que o declive e o caudal exercem grande influência na concentração média de ar do escoamento gradualmente variado. Por outro lado, os resultados obtidos pela expressão empírica ajustaram-se bem aos obtidos mediante aplicação da modelação numérica simplificada, com coeficientes de determinação de cerca de 0.9. No entanto, observaram-se maiores diferenças de resultados para caudais e declives de menor magnitude, não se afigurando, nestas situações, adequada a utilização da superfície de regressão sugerida no presente capítulo.

Numa fase posterior, a expressão semi-empírica e a modelação numérica simplificada foram validadas por comparação com os resultados obtidos experimentalmente por Cain (1978), no descarregador de cheias da barragem de Aviemore, para dois valores do caudal unitário.

Por fim, foi analisada a relação entre a extensão do trecho com escoamento gradualmente variado (desde a seção de afloramento da camada limite até à seção em que o regime uniforme com emulsão de ar é praticamente atingido) e a extensão do trecho a montante da seção

de afloramento da camada limite ( $s_{u*}/s_i$ ). Recorrendo ao auxílio do *software TableCurve 2D*<sup>®</sup>, foi possível determinar uma expressão empírica de simples aplicação para  $s_{u*}/s_i$ .

Em termos de recomendações futuras relativas à modelação de escoamentos com elevada velocidade em superfície livre, seria interessante obter um conjunto adicional de resultados experimentais que permitisse validar, ou reformular, as expressões desenvolvidas neste estudo. Além disso, existem ainda alguns tópicos de interesse para futura investigação:

- Modelação numérica de outras grandezas relevantes do escoamento com emulsão de ar a jusante da seção de afloramento da camada limite, nomeadamente a altura equivalente de água, a altura característica do escoamento, a velocidade média da água, o fator de resistência do escoamento, a energia específica e a perda de carga.
- Modelação numérica do escoamento para condições geométricas distintas das consideradas neste estudo, nomeadamente as condições de entrada no canal.
- Desenvolvimento de expressões empíricas para estimar as grandezas principais do escoamento com emulsão de ar.
- Análise comparativa dos resultados obtidos a partir da modelação numérica simplificada e de expressões empíricas em descarregadores com paramento convencional e em descarregadores com soleira em degraus, com escoamento deslizante sobre turbilhões.

## Referências bibliográficas

- Bauer, W. (1951). The development of the turbulent boundary layer on steep slopes. EUA: State University of Iowa.
- Boes, R. M., Hager, W. H. (2003). Two-phase flow characteristics of stepped spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE.
- Bormann, K. (1968). Der abfluss in schussringnen unter berucksichtigung der luftaufnahme (discharge in chutes considering air entrainment). *Versuchsanalt fur Wasserbau der Technischen Hochschule Munchen*, 13.
- Brito, R. J. (2011). Análise da aeração em escoamentos de altas velocidade sem calhas de vertedores. Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo, Brasil
- Bung, D. (2013). Non-intrusive detection of air-water surface roughness in self-aerated chute flows. *Journal of Hydraulic Research*, ASCE, 51, 322-329.
- Cain, P. (1978). Measurements within self-aerated flow on large spillway. Dissertação de doutoramento, University of Canterbury, Christchurch, Nova Zelândia.
- Cardoso, G. (2007). Ressalto hidráulico em bacias de dissipação com acessórios a jusante de descarregadores de cheias em degraus. Estudo experimental. Dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa, (Portugal).
- Chanson, H. (1996). Air bubble entrainment in free-surface turbulent shear flows. Academic Press.
- Decreto-Lei n.º 344/2007 de 15 de Outubro: Regulamento de segurança de barragens.
- Falvey, H. T. (1980). Air-water flow in hydraulic structures. Denver: United States Department Of The Interior.
- Falvey, H. T. (1990). Cavitation in chutes and spillways. Bureau of Reclamation, No 42.
- Ferreira, R. (2007). Introdução ao cálculo de curvas de regolfo pelo método das diferenças finitas. Lisboa: Instituto Superior Técnico.
- Halbronn, G. (1952). Etude de la mise en régime des écoulements sur les ouvrages à forte pente. *La Houille Blanche* (3), 347-371. Obtido de 10.1051/lhb/1952018
- Hall, L. (1943). Entrainment of air in flowing water, A Symposium: Open channel flow at high velocities. *Trans. ASCE*, 1943.
- Keller, R., Lai, K., Wood, I. (1974). Developing region in self-aerated flows. *Journal of Hydraulic Division*, ASCE, 553-568.

- Keller, R., Rastogi, A. (1975). Prediction of flow development on spillways. *Journal of Hydraulic Div.*, ASCE, Vol. 101, No.HY9, pp.1171-1184.
- Keller, R., Rastogi, A. (1977). Design chart for predicting critical point on spillways. *Journal of Hydraulic Div.*, ASCE, Vol. 103, No.HY12, pp.1417-1427.
- Khatsuria, R. M. (2005). *Hydraulics of spillways and energy dissipators*. New York: Marcel Dekker.
- Killen, J. (1968). The surface characteristics of self-aerated flow in steep channels. Ph.D. thesis, University of Minnesota, Minnesota, USA
- Kramer, K., Hager, W. H. (2005). Air transport in chute flows. *International Journal of Multiphase Flow*, pp. 1181-1197.
- Lane, E. (1939). Entrainment of air in swiftly flowing water. *Civil Eng.* 9 (2), 88-91.
- Lúcio, I. (2015). Modelação numérica do escoamento deslizante sobre turbilhões em descarregadores de cheias em degraus: aplicação a pequenas barragens de aterro. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa (Portugal).
- Matos, J. (1990). O arejamento como medida de protecção contra erosão de cavitação em obras hidráulicas. Dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa (Portugal).
- Matos, J. (1999). Emulsão de ar e dissipação de energia do escoamento em descarregadores em degraus. Dissertação de doutoramento, Instituto Superior Técnico, Lisboa (Portugal).
- Matos, J. (2012). Escoamento de emulsão ar-água em descarregadores de cheias. Slides de apoio aos Seminários de Investigação em Hidráulica e Recursos Hídricos. Diploma de Estudos Avançados em Engenharia Civil. Lisboa (Portugal).
- Meireles, I. (2004). Caracterização do escoamento deslizante em turbilhões e energia específica residual em descarregadores de cheias. Dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa, (Portugal).
- Nalluri, C., Feather, R. (2001). *Civil engineering hydraulics*. Oxford, England: Blackwell Science.
- Peterka, A. J. (1953). The effect of entrained air on cavitation pitting. 5th IAHR Congress, Joint meeting paper, IAHR/ASCE, 507-518.
- Pinheiro, A. (2007). Descarregadores de cheias em canal de encosta. Dimensionamento e implementação. Instituto Superior Técnico. Lisboa, (Portugal):
- Prandtl, L. (1904). *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses*. Heidelberg (in German).
- Quintela, A. (1998). *Hidráulica*, 6ª edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (Portugal).

- Reis, M.(2015). Estudo experimental do escoamento em descarregadores de cheias em degraus com soleira em teclado de piano. Dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa (Portugal).
- Robinson, J. (1948). An investigation of the formation of cavitation about modified cylindrical models. Georgia School of Technology.
- Straub, L., Lamb, O. (1953). Experimental studies of air entrainment in open channel flow. *Proc. 5<sup>th</sup> IAHR Congress* . IAHR-ASCE, Minneapolis, EUA (pp. 425-437).
- Straub, L., Anderson, A. (1958). Experiments on self-aerated flow in open channels. *Journal of Hydraulic Div., ASCE*, 84(7), 1-35.
- Tani, I. (1977). History of Boundary-Layer Theory. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, (pp. 87-111).
- USBR (1983). Safety of Existing Dams: Evaluation and Improvement. Water Resources Technical Publication. U.S. Department of the Interior, Denver.
- Valero, D., Bung, D. B. (2016). Development of the interfacial air layer in the non-aerated region of high-velocity spillway flows. Instabilities growth, entrapped air and influence on the self-aeration onset. *International Journal of Multiphase Flow*, 66-74.
- Wei, W., Deng, J., Zhang, F. (2016). Development of self-aeration process for supercritical chute flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 172-180.
- Wilhelms, S., Gulliver, J. (2005). Bubbles and waves description of self-aerated spillway flow. *Journal of Hydraulic Research*, ASCE, 43, No. 5, 522-531.
- Wilhelms, S., Gulliver, J. (2010). Bubbles and waves description of self-aerated spillway flow. *Journal of Hydraulic Research*, ASCE, pp. 522-531.
- Wood, I. (1983). Uniform region of self-aerated flow, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol.109, No. 3, pp. 447-461.
- Wood, I. (1985). Free-surface air entrainment on spillways. Air Entrainment in free-surface flows, Ed. Ian R. Wood, IAHR, Hydraulic Structures Design Manual no 4, Hydraulic Design Consideration, Balkema.
- Wood, I., Cain, P. (1981b). Measurements of self-aerated flow on a spillway. *Journal of Hydraulic Engineering*, 107, 1407-1242.
- Wood, I.R. (1991). Free surface air entrainment on spillways, in Wood, I.R. "Air entrainment in free-surface flows", IAHR, Hydraulic Structures Design Manual 4, Hydraulic Design Considerations, A. A. Balkema, Rotterdam, the Netherlands, 55–84.

## Anexo I – Tabela de cálculo para obtenção das grandezas características do escoamento a montante e na seção de afloramento da camada limite

Considere-se seguidamente a seguinte tabela de cálculo, utilizada para a determinação da seção de afloramento da camada limite e das grandezas características do escoamento para cada uma das 273 situações práticas.

Tenha-se como exemplo a análise da situação prática correspondente ao escoamento com  $q=10\text{m}^2/\text{s}$ , num canal descarregador de betão com  $K=75\text{m}^{1/3}/\text{s}$  e cujo ângulo com a horizontal seja  $\theta=30^\circ$ .

**Tabela I.1 - Dados de entrada para a resolução do procedimento numérico para a determinação da seção de afloramento da camada limite.**

q ( $\text{m}^2/\text{s}^{-1}$ )	k (m)	K ( $\text{m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ )	$\theta$ ( $^\circ$ )	$h_c$ (m)	$E_A=E_c$ (m)	N (m)
10	0,00174	75	30	2,17	2,82	152,82

**Tabela I.2 - Resultados do procedimento numérico para a determinação da seção de afloramento da camada limite e grandezas características do escoamento, a montante daquela seção.**

x (m)	$\Delta z(x)$ (m)	$\delta$ (m)	$\delta_d$ (m)	$h_p$ (m)	$U_p$ (m/s)	h (m)	U (m/s)	$V_{\text{máx}}$ (m/s)	$\alpha$ (-)	$h/h_i$ (-)	$s/s_i$ (-)
1,00	0,50	0,01	0,00	1,64	6,10	1,64	6,09	6,10	1,00	3,51	0,02
5,00	2,50	0,05	0,01	1,08	9,27	1,09	9,21	9,26	1,00	2,33	0,08
10,00	5,00	0,10	0,01	0,85	11,78	0,86	11,60	11,77	1,01	1,85	0,17
15,00	7,50	0,14	0,02	0,73	13,78	0,75	13,42	13,77	1,01	1,60	0,25
20,00	10,00	0,18	0,03	0,65	15,50	0,67	14,91	15,49	1,02	1,44	0,34
25,00	12,50	0,22	0,03	0,59	17,04	0,62	16,18	17,02	1,03	1,32	0,42
30,00	15,00	0,26	0,04	0,54	18,44	0,58	17,27	18,42	1,03	1,24	0,51
35,00	17,50	0,29	0,04	0,51	19,74	0,55	18,23	19,72	1,04	1,17	0,59
40,00	20,00	0,33	0,05	0,48	20,96	0,52	19,06	20,94	1,05	1,12	0,68
45,00	22,50	0,37	0,05	0,45	22,10	0,51	19,80	22,08	1,05	1,08	0,76
50,00	25,00	0,41	0,06	0,43	23,19	0,49	20,44	23,17	1,05	1,05	0,85
55,00	27,50	0,44	0,06	0,41	24,23	0,48	21,02	24,21	1,06	1,02	0,93
58,86	29,43	0,47	0,07	0,40	25,00	0,47	21,41	24,98	1,06	1,00	1,00

Para o processo iterativo da Eq. (3.4) foi utilizada a ferramenta *Goal Seek* do software MSExcel.

(Continuação)

q	k	K	$\theta$	$h_c$	$E_A=E_C$	N
( $m^2/s^{-1}$ )	(m)	( $m^{1/3}s^{-1}$ )	( $^\circ$ )	(m)	(m)	(m)
20	0,00174	75	20	2,17	4,85	154,85

x	$\Delta z(x)$	$\delta$	$\delta_d$	$E_p(x)$	$h_p$	$V_{m\acute{a}x}$	h	U	$U_p$	$\alpha$	s/ $s_i$	h/ $h_i$
(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(-)	(-)	(-)
1,00	149,7	0,01	0,002	5,20	2,85	7,03	2,85	7,03	7,03	1,00	3,43	0,01
5,00	148,3	0,05	0,008	6,56	2,11	9,47	2,12	9,44	9,47	1,00	2,55	0,05
10,00	146,6	0,10	0,014	8,27	1,76	11,38	1,77	11,30	11,39	1,00	2,13	0,09
15,00	144,9	0,14	0,020	9,98	1,55	12,92	1,57	12,76	12,93	1,01	1,89	0,14
20,00	143,2	0,19	0,027	11,69	1,40	14,24	1,43	14,00	14,26	1,01	1,72	0,19
25,00	141,4	0,23	0,032	13,40	1,29	15,44	1,33	15,08	15,46	1,01	1,6	0,24
30,00	139,7	0,27	0,038	15,11	1,21	16,53	1,25	16,05	16,55	1,02	1,5	0,28
35,00	138	0,31	0,044	16,82	1,14	17,55	1,18	16,92	17,57	1,02	1,42	0,33
40,00	136,3	0,35	0,049	18,53	1,08	18,51	1,13	17,72	18,53	1,02	1,36	0,38
45,00	134,6	0,38	0,055	20,24	1,03	19,41	1,08	18,45	19,44	1,03	1,31	0,43
50,00	132,9	0,42	0,060	21,95	0,99	20,27	1,05	19,13	20,30	1,03	1,26	0,47
55,00	131,2	0,46	0,066	23,66	0,95	21,10	1,01	19,75	21,13	1,03	1,22	0,52
60,00	129,5	0,50	0,071	25,37	0,91	21,89	0,98	20,33	21,92	1,04	1,19	0,57
65,00	127,8	0,54	0,077	27,08	0,88	22,65	0,96	20,87	22,69	1,04	1,15	0,61
70,00	126,1	0,57	0,082	28,79	0,85	23,39	0,94	21,37	23,42	1,04	1,13	0,66
75,00	124,3	0,61	0,087	30,50	0,83	24,10	0,92	21,84	24,14	1,05	1,1	0,71
80,00	122,6	0,65	0,092	32,21	0,81	24,80	0,90	22,28	24,83	1,05	1,08	0,76
85,00	120,9	0,68	0,097	33,92	0,78	25,47	0,88	22,69	25,50	1,05	1,06	0,80
90,00	119,2	0,72	0,103	35,63	0,76	26,12	0,87	23,07	26,16	1,05	1,04	0,85
95,00	117,5	0,75	0,108	37,35	0,75	26,76	0,85	23,42	26,80	1,05	1,03	0,90
105,70	113,8	0,83	0,119	41,00	0,71	28,08	0,83	24,10	28,12	1,05	1,00	1,00

(Continuação)

q	k	K	$\theta$	$h_c$	$E_A=E_C$	N
( $m^2/s^{-1}$ )	(m)	( $m^{1/3}s^{-1}$ )	( $^\circ$ )	(m)	(m)	(m)
40	0,00174	75	20	5,47	7,704	157,70

x	$\Delta z(x)$	$\delta$	$\delta_d$	$E_p(x)$	$h_p$	$V_{m\acute{a}x}$	h	U	$U_p$	$\alpha$	s/ $s_i$	h/ $h_i$
(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(-)	(-)	(-)
1,00	149,7	0,01	0,002	8,05	4,81	8,31	4,82	8,31	8,31	1,00	0,01	3,71
5,00	148,3	0,05	0,008	9,41	3,71	10,77	3,72	10,76	10,78	1,00	0,03	2,87
10,00	146,6	0,10	0,014	11,12	3,16	12,63	3,18	12,58	12,64	1,00	0,06	2,45
15,00	144,9	0,14	0,020	12,83	2,83	14,11	2,85	14,02	14,12	1,00	0,09	2,20
20,00	143,2	0,19	0,027	14,54	2,60	15,39	2,62	15,25	15,40	1,00	0,12	2,02
25,00	141,4	0,23	0,032	16,25	2,42	16,54	2,45	16,34	16,56	1,01	0,14	1,89
30,00	139,7	0,27	0,038	17,96	2,27	17,59	2,31	17,32	17,61	1,01	0,17	1,78
35,00	138	0,31	0,044	19,67	2,15	18,58	2,19	18,23	18,60	1,01	0,2	1,69
40,00	136,3	0,35	0,049	21,38	2,05	19,51	2,10	19,07	19,53	1,01	0,23	1,62
45,00	134,6	0,38	0,055	23,09	1,96	20,39	2,01	19,85	20,41	1,01	0,26	1,55
50,00	132,9	0,42	0,060	24,80	1,88	21,22	1,94	20,59	21,25	1,02	0,29	1,50
55,00	131,2	0,46	0,066	26,51	1,81	22,02	1,88	21,28	22,05	1,02	0,32	1,45
60,00	129,5	0,50	0,071	28,23	1,75	22,80	1,82	21,93	22,82	1,02	0,35	1,41
65,00	127,8	0,54	0,077	29,94	1,70	23,54	1,77	22,55	23,57	1,02	0,37	1,37
70,00	126,1	0,57	0,082	31,65	1,65	24,26	1,73	23,14	24,29	1,02	0,4	1,33
75,00	124,3	0,61	0,087	33,36	1,60	24,95	1,69	23,70	24,99	1,03	0,43	1,30
80,00	122,6	0,65	0,092	35,07	1,56	25,63	1,65	24,23	25,66	1,03	0,46	1,27
85,00	120,9	0,68	0,097	36,78	1,52	26,29	1,62	24,74	26,32	1,03	0,49	1,25
90,00	119,2	0,72	0,103	38,49	1,48	26,93	1,59	25,22	26,96	1,03	0,52	1,22
95,00	117,5	0,75	0,108	40,20	1,45	27,55	1,56	25,68	27,59	1,04	0,55	1,20
100,00	115,8	0,79	0,113	41,91	1,42	28,16	1,53	26,12	28,20	1,04	0,58	1,18
105,00	114,1	0,83	0,118	43,62	1,39	28,76	1,51	26,54	28,80	1,04	0,6	1,16
110,00	112,4	0,86	0,123	45,33	1,36	29,34	1,48	26,95	29,38	1,04	0,63	1,14
115,00	110,7	0,90	0,128	47,04	1,34	29,92	1,46	27,34	29,96	1,04	0,66	1,13
120,00	109	0,93	0,133	48,75	1,31	30,48	1,44	27,71	30,52	1,04	0,69	1,11
125,00	107,2	0,97	0,138	50,46	1,29	31,03	1,43	28,06	31,07	1,05	0,72	1,10
130,00	105,5	1,00	0,143	52,17	1,27	31,57	1,41	28,40	31,61	1,05	0,75	1,09
135,00	103,8	1,03	0,148	53,88	1,24	32,10	1,39	28,73	32,14	1,05	0,78	1,07
140,00	102,1	1,07	0,153	55,59	1,22	32,62	1,38	29,04	32,66	1,05	0,81	1,06
145,00	100,4	1,10	0,158	57,30	1,21	33,13	1,36	29,34	33,18	1,05	0,83	1,05
150,00	98,7	1,14	0,162	59,01	1,19	33,64	1,35	29,63	33,68	1,05	0,86	1,04
155,00	96,99	1,17	0,167	60,72	1,17	34,14	1,34	29,91	34,18	1,05	0,89	1,03
160,00	95,28	1,21	0,172	62,43	1,15	34,63	1,33	30,17	34,67	1,05	0,92	1,02
165,00	93,57	1,24	0,177	64,14	1,14	35,11	1,31	30,42	35,16	1,05	0,95	1,01
170,00	91,86	1,27	0,182	65,85	1,12	35,59	1,30	30,67	35,64	1,05	0,98	1,01
173,72	90,59	1,30	0,185	67,12	1,11	35,94	1,30	30,84	35,99	1,05	1,00	1,00



(Continuação)

q	k	K	$\theta$	$h_c$	$E_A=E_C$	N
( $m^2/s^{-1}$ )	(m)	( $m^{1/3}s^{-1}$ )	( $^\circ$ )	(m)	(m)	(m)
100	0,00174	75	20	10,07	14,19	164,19

x	$\Delta z(x)$	$\delta$	$\delta_d$	$E_p(x)$	$h_p$	$V_{m\acute{a}x}$	h	U	$U_p$	$\alpha$	s/ $s_i$	h/ $h_i$
(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(-)	(-)	(-)
1,00	149,7	0,01	0,002	14,53	9,73	10,28	9,73	10,28	10,28	1,00	0	4,15
2,50	149,1	0,03	0,004	15,05	8,50	11,76	8,51	11,75	11,76	1,00	0,01	3,63
5,00	148,3	0,05	0,008	15,90	7,65	13,06	7,66	13,05	13,06	1,00	0,01	3,27
10,00	146,6	0,10	0,014	17,61	6,72	14,87	6,73	14,85	14,88	1,00	0,03	2,88
15,00	144,9	0,14	0,020	19,32	6,13	16,29	6,16	16,25	16,30	1,00	0,04	2,63
20,00	143,2	0,19	0,027	21,03	5,71	17,51	5,73	17,44	17,53	1,00	0,06	2,45
25,00	141,4	0,23	0,032	22,74	5,37	18,61	5,40	18,51	18,62	1,00	0,07	2,31
30,00	139,7	0,27	0,038	24,45	5,09	19,61	5,13	19,49	19,63	1,00	0,09	2,19
35,00	138,0	0,31	0,044	26,16	4,86	20,55	4,90	20,39	20,57	1,00	0,1	2,09
40,00	136,3	0,35	0,049	27,87	4,66	21,44	4,71	21,23	21,46	1,00	0,12	2,01
45,00	134,6	0,38	0,055	29,58	4,48	22,28	4,54	22,03	22,30	1,00	0,13	1,94
50,00	132,9	0,42	0,060	31,29	4,33	23,08	4,39	22,78	23,10	1,01	0,15	1,87
55,00	131,2	0,46	0,066	33,00	4,19	23,84	4,26	23,50	23,87	1,01	0,16	1,82
60,00	129,5	0,50	0,071	34,71	4,06	24,58	4,14	24,18	24,61	1,01	0,18	1,77
65,00	127,8	0,54	0,077	36,42	3,95	25,29	4,03	24,84	25,32	1,01	0,19	1,72
70,00	126,1	0,57	0,082	38,13	3,84	25,98	3,93	25,47	26,01	1,01	0,21	1,68
75,00	124,3	0,61	0,087	39,84	3,75	26,65	3,84	26,08	26,68	1,01	0,22	1,64
80,00	122,6	0,65	0,092	41,55	3,66	27,30	3,75	26,66	27,33	1,01	0,24	1,60
85,00	120,9	0,68	0,097	43,26	3,58	27,93	3,67	27,22	27,97	1,01	0,25	1,57
90,00	119,2	0,72	0,103	44,97	3,50	28,55	3,60	27,77	28,58	1,01	0,27	1,54
95,00	117,5	0,75	0,108	46,68	3,43	29,15	3,53	28,30	29,19	1,02	0,28	1,51
100,00	115,8	0,79	0,113	48,39	3,36	29,74	3,47	28,81	29,78	1,02	0,3	1,48
105,00	114,1	0,83	0,118	50,10	3,29	30,32	3,41	29,31	30,35	1,02	0,31	1,46
110,00	112,4	0,86	0,123	51,81	3,23	30,88	3,36	29,79	30,92	1,02	0,33	1,43
115,00	110,7	0,90	0,128	53,52	3,18	31,44	3,31	30,25	31,47	1,02	0,34	1,41
120,00	109	0,93	0,133	55,23	3,12	31,98	3,26	30,71	32,02	1,02	0,36	1,39
125,00	107,2	0,97	0,138	56,94	3,07	32,51	3,21	31,15	32,55	1,02	0,37	1,37
130,00	105,5	1,00	0,143	58,65	3,02	33,03	3,17	31,58	33,07	1,02	0,39	1,35
135,00	103,8	1,03	0,148	60,36	2,98	33,55	3,12	32,00	33,59	1,03	0,4	1,33
140,00	102,1	1,07	0,153	62,07	2,93	34,06	3,09	32,41	34,10	1,03	0,42	1,32
145,00	100,4	1,10	0,158	63,78	2,89	34,55	3,05	32,81	34,60	1,03	0,43	1,30
150,00	98,7	1,14	0,162	65,49	2,85	35,05	3,01	33,20	35,09	1,03	0,45	1,29
155,00	96,99	1,17	0,167	67,20	2,81	35,53	2,98	33,57	35,57	1,03	0,46	1,27
160,00	95,28	1,21	0,172	68,91	2,77	36,01	2,95	33,94	36,05	1,03	0,48	1,26
165,00	93,57	1,24	0,177	70,62	2,74	36,48	2,92	34,30	36,52	1,03	0,49	1,25
170,00	91,86	1,27	0,182	72,33	2,70	36,94	2,89	34,65	36,99	1,03	0,51	1,23
175,00	90,15	1,31	0,187	74,04	2,67	37,40	2,86	35,00	37,44	1,03	0,52	1,22
180,00	88,44	1,34	0,191	75,75	2,64	37,85	2,83	35,33	37,90	1,04	0,54	1,21

(Continuação)

x	$\Delta z(x)$	$\delta$	$\delta_d$	$E_p(x)$	$h_p$	$V_{m\acute{a}x}$	h	U	$U_p$	$\alpha$	s/s <sub>i</sub>	h/h <sub>i</sub>
(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(-)	(-)	(-)
185,00	86,73	1,37	0,196	77,46	2,61	38,30	2,80	35,66	38,34	1,04	0,55	1,20
190,00	85,02	1,41	0,201	79,17	2,58	38,74	2,78	35,98	38,79	1,04	0,57	1,19
195,00	83,31	1,44	0,206	80,88	2,55	39,17	2,76	36,29	39,22	1,04	0,58	1,18
200,00	81,6	1,47	0,210	82,59	2,52	39,60	2,73	36,60	39,65	1,04	0,6	1,17
205,00	79,89	1,51	0,215	84,30	2,49	40,03	2,71	36,90	40,08	1,04	0,61	1,16
210,00	78,18	1,54	0,220	86,01	2,47	40,45	2,69	37,19	40,50	1,04	0,63	1,15
215,00	76,47	1,57	0,225	87,72	2,44	40,87	2,67	37,47	40,92	1,04	0,64	1,14
220,00	74,76	1,61	0,229	89,44	2,42	41,28	2,65	37,75	41,33	1,04	0,66	1,13
225,00	73,05	1,64	0,234	91,15	2,40	41,69	2,63	38,03	41,74	1,04	0,67	1,12
230,00	71,34	1,67	0,239	92,86	2,37	42,09	2,61	38,29	42,15	1,04	0,69	1,12
235,00	69,63	1,70	0,243	94,57	2,35	42,49	2,59	38,55	42,55	1,05	0,7	1,11
240,00	67,92	1,74	0,248	96,28	2,33	42,89	2,58	38,81	42,94	1,05	0,72	1,10
245,00	66,21	1,77	0,253	97,99	2,31	43,28	2,56	39,06	43,34	1,05	0,73	1,09
250,00	64,49	1,80	0,257	99,70	2,29	43,67	2,54	39,30	43,73	1,05	0,75	1,09
255,00	62,78	1,83	0,262	101,41	2,27	44,06	2,53	39,54	44,11	1,05	0,76	1,08
260,00	61,07	1,87	0,267	103,12	2,25	44,44	2,51	39,78	44,49	1,05	0,78	1,07
265,00	59,36	1,90	0,271	104,83	2,23	44,82	2,50	40,00	44,87	1,05	0,79	1,07
270,00	57,65	1,93	0,276	106,54	2,21	45,19	2,49	40,23	45,25	1,05	0,81	1,06
275,00	55,94	1,96	0,280	108,25	2,19	45,56	2,47	40,45	45,62	1,05	0,82	1,06
280,00	54,23	1,99	0,285	109,96	2,17	45,93	2,46	40,66	45,99	1,05	0,84	1,05
285,00	52,52	2,03	0,290	111,67	2,16	46,30	2,45	40,87	46,36	1,05	0,85	1,05
290,00	50,81	2,06	0,294	113,38	2,14	46,66	2,43	41,08	46,72	1,05	0,87	1,04
295,00	49,1	2,09	0,299	115,09	2,12	47,02	2,42	41,28	47,08	1,05	0,88	1,03
300,00	47,39	2,12	0,303	116,80	2,11	47,38	2,41	41,47	47,44	1,05	0,9	1,03
305,00	45,68	2,15	0,308	118,51	2,09	47,73	2,40	41,67	47,79	1,05	0,91	1,03
310,00	43,97	2,19	0,312	120,22	2,08	48,09	2,39	41,85	48,15	1,05	0,93	1,02
315,00	42,26	2,22	0,317	121,93	2,06	48,44	2,38	42,04	48,50	1,05	0,94	1,02
320,00	40,55	2,25	0,321	123,64	2,05	48,78	2,37	42,22	48,84	1,05	0,96	1,01
325,00	38,84	2,28	0,326	125,35	2,03	49,13	2,36	42,39	49,19	1,05	0,97	1,01
330,00	37,13	2,31	0,330	127,06	2,02	49,47	2,35	42,56	49,53	1,05	0,99	1,00
334,36	35,64	2,34	0,334	128,55	2,01	49,76	2,34	42,71	49,83	1,05	1,00	1,00

(Continuação)

q	k	K	$\theta$	$h_c$	$E_A=E_C$	N
( $m^2/s^{-1}$ )	(m)	( $m^{1/3}s^{-1}$ )	( $^\circ$ )	(m)	(m)	(m)
20	0,00174	75	40	3,44	3,96	153,96

x	$\Delta z(x)$	$\delta$	$\delta_d$	$E_p(x)$	$h_p$	$V_{m\acute{a}x}$	h	U	$U_p$	$\alpha$	s/s <sub>i</sub>	h/h <sub>i</sub>
(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(-)	(-)	(-)
1,00	149,4	0,01	0,002	4,60	2,96	6,76	2,96	6,76	6,76	1,00	0,01	4,40
5,00	146,8	0,05	0,007	7,17	1,89	10,59	1,90	10,55	10,59	1,00	0,06	2,82
10,00	143,6	0,09	0,013	10,38	1,49	13,45	1,50	13,34	13,46	1,00	0,11	2,23
15,00	140,4	0,13	0,019	13,60	1,27	15,72	1,29	15,50	15,73	1,01	0,17	1,92
20,00	137,1	0,17	0,025	16,81	1,13	17,67	1,16	17,30	17,68	1,01	0,22	1,72
25,00	133,9	0,21	0,030	20,03	1,03	19,41	1,06	18,86	19,42	1,02	0,28	1,58
30,00	130,7	0,25	0,036	23,24	0,95	20,99	0,99	20,25	21,00	1,02	0,33	1,47
35,00	127,5	0,29	0,041	26,45	0,89	22,46	0,93	21,49	22,48	1,03	0,39	1,38
40,00	124,3	0,32	0,046	29,67	0,84	23,84	0,88	22,61	23,85	1,03	0,44	1,32
45,00	121,1	0,36	0,051	32,88	0,80	25,14	0,85	23,63	25,15	1,03	0,5	1,26
50,00	117,9	0,39	0,056	36,10	0,76	26,37	0,81	24,56	26,38	1,04	0,55	1,21
55,00	114,6	0,43	0,061	39,31	0,73	27,54	0,79	25,41	27,56	1,04	0,61	1,17
60,00	111,4	0,47	0,066	42,52	0,70	28,67	0,76	26,19	28,69	1,05	0,67	1,14
65,00	108,2	0,50	0,071	45,74	0,67	29,75	0,74	26,91	29,77	1,05	0,72	1,11
70,00	105	0,53	0,076	48,95	0,65	30,80	0,73	27,57	30,82	1,05	0,78	1,08
75,00	101,8	0,57	0,081	52,17	0,63	31,81	0,71	28,18	31,83	1,05	0,83	1,06
80,00	98,58	0,60	0,086	55,38	0,61	32,79	0,70	28,75	32,81	1,06	0,89	1,04
85,00	95,36	0,64	0,091	58,59	0,59	33,74	0,68	29,27	33,76	1,06	0,94	1,02
90,00	92,15	0,67	0,096	61,81	0,58	34,66	0,67	29,74	34,68	1,06	1,00	1,00
90,14	92,06	0,67	0,096	61,90	0,58	34,69	0,67	29,76	34,71	1,06	1,00	1,00

(Continuação)

q	k	K	$\theta$	$h_c$	$E_A=E_C$	N
( $m^2/s^{-1}$ )	(m)	( $m^{1/3}s^{-1}$ )	( $^\circ$ )	(m)	(m)	(m)
40	0,00174	75	40	5,47	6,28	156,28

x	$\Delta z(x)$	$\delta$	$\delta_d$	$E_p(x)$	$h_p$	$V_{m\acute{a}x}$	h	U	$U_p$	$\alpha$	s/ $s_i$	h/ $h_i$
(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(-)	(-)	(-)
1,00	149,4	0,01	0,002	6,92	5,45	7,34	5,45	7,34	7,34	1,00	5,19	0,01
5,00	146,8	0,05	0,007	9,49	3,45	11,58	3,46	11,56	11,59	1,00	3,3	0,03
10,00	143,6	0,09	0,013	12,71	2,78	14,39	2,79	14,33	14,40	1,00	2,66	0,07
15,00	140,4	0,13	0,019	15,92	2,41	16,60	2,43	16,48	16,61	1,00	2,31	0,10
20,00	137,1	0,17	0,025	19,14	2,16	18,50	2,19	18,30	18,51	1,01	2,08	0,14
25,00	133,9	0,21	0,030	22,35	1,98	20,20	2,01	19,90	20,21	1,01	1,91	0,17
30,00	130,7	0,25	0,036	25,56	1,84	21,75	1,87	21,35	21,76	1,01	1,78	0,20
35,00	127,5	0,29	0,041	28,78	1,72	23,18	1,77	22,66	23,20	1,01	1,68	0,24
40,00	124,3	0,32	0,046	31,99	1,63	24,53	1,68	23,87	24,55	1,02	1,6	0,27
45,00	121,1	0,36	0,051	35,21	1,55	25,81	1,60	24,99	25,82	1,02	1,52	0,30
50,00	117,9	0,39	0,056	38,42	1,48	27,02	1,54	26,04	27,03	1,02	1,46	0,34
55,00	114,6	0,43	0,061	41,63	1,42	28,17	1,48	27,02	28,19	1,02	1,41	0,37
60,00	111,4	0,47	0,066	44,85	1,37	29,28	1,43	27,94	29,30	1,03	1,36	0,41
65,00	108,2	0,50	0,071	48,06	1,32	30,35	1,39	28,81	30,37	1,03	1,32	0,44
70,00	105,0	0,53	0,076	51,28	1,27	31,38	1,35	29,62	31,40	1,03	1,29	0,47
75,00	101,8	0,57	0,081	54,49	1,23	32,38	1,32	30,40	32,40	1,03	1,25	0,51
80,00	98,6	0,60	0,086	57,70	1,20	33,34	1,29	31,13	33,36	1,04	1,22	0,54
85,00	95,4	0,64	0,091	60,92	1,17	34,28	1,26	31,82	34,30	1,04	1,2	0,57
90,00	92,1	0,67	0,096	64,13	1,14	35,19	1,23	32,48	35,21	1,04	1,17	0,61
95,00	88,9	0,70	0,100	67,35	1,11	36,08	1,21	33,10	36,10	1,04	1,15	0,64
100,00	85,7	0,74	0,105	70,56	1,08	36,95	1,19	33,69	36,97	1,05	1,13	0,68
105,00	82,5	0,77	0,110	73,77	1,06	37,79	1,17	34,26	37,82	1,05	1,11	0,71
110,00	79,3	0,80	0,115	76,99	1,04	38,62	1,15	34,79	38,64	1,05	1,1	0,74
115,00	76,1	0,84	0,119	80,20	1,01	39,43	1,13	35,30	39,46	1,05	1,08	0,78
120,00	72,9	0,87	0,124	83,41	0,99	40,23	1,12	35,78	40,25	1,05	1,06	0,81
125,00	69,7	0,90	0,129	86,63	0,97	41,00	1,10	36,25	41,03	1,05	1,05	0,84
130,00	66,4	0,93	0,133	89,84	0,96	41,77	1,09	36,68	41,79	1,06	1,04	0,88
135,00	63,2	0,97	0,138	93,06	0,94	42,52	1,08	37,10	42,54	1,06	1,03	0,91
140,00	60,0	1,00	0,142	96,27	0,92	43,25	1,07	37,50	43,28	1,06	1,02	0,95
145,00	56,8	1,03	0,147	99,48	0,91	43,98	1,06	37,88	44,00	1,06	1,01	0,98
148,10	54,8	1,05	0,150	101,48	0,90	44,42	1,05	38,10	44,45	1,06	1,00	1,00

(Continuação)

q	k	K	$\theta$	$h_c$	$E_A=E_C$	N
( $m^2/s^{-1}$ )	(m)	( $m^{1/3}s^{-1}$ )	( $^\circ$ )	(m)	(m)	(m)
100	0,00174	75	40	10,07	11,57	161,57

x	$\Delta z(x)$	$\delta$	$\delta_d$	$E_p(x)$	$h_p$	$V_{m\acute{a}x}$	h	U	$U_p$	$\alpha$	s/s <sub>i</sub>	h/h <sub>i</sub>
(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(-)	(-)	(-)
2,50	148,4	0,03	0,004	13,18	9,03	11,07	9,03	11,07	11,08	1,00	0,01	4,77
5,00	146,8	0,05	0,007	14,78	7,52	13,29	7,53	13,29	13,30	1,00	0,02	3,98
10,00	143,6	0,09	0,013	18,00	6,21	16,10	6,22	16,08	16,11	1,00	0,04	3,29
15,00	140,4	0,13	0,019	21,21	5,48	18,25	5,49	18,20	18,26	1,00	0,05	2,90
20,00	137,1	0,17	0,025	24,42	4,98	20,09	5,00	20,00	20,10	1,00	0,07	2,64
25,00	133,9	0,21	0,030	27,64	4,60	21,73	4,63	21,60	21,74	1,00	0,09	2,45
30,00	130,7	0,25	0,036	30,85	4,30	23,23	4,34	23,05	23,24	1,00	0,11	2,29
35,00	127,5	0,29	0,041	34,07	4,06	24,62	4,10	24,39	24,63	1,01	0,12	2,17
40,00	124,3	0,32	0,046	37,28	3,86	25,93	3,90	25,63	25,94	1,01	0,14	2,06
45,00	121,1	0,36	0,051	40,49	3,68	27,16	3,73	26,80	27,17	1,01	0,16	1,97
50,00	117,9	0,39	0,056	43,71	3,53	28,33	3,58	27,90	28,35	1,01	0,18	1,89
55,00	114,6	0,43	0,061	46,92	3,39	29,46	3,45	28,95	29,47	1,01	0,19	1,82
60,00	111,4	0,47	0,066	50,14	3,27	30,54	3,34	29,95	30,55	1,01	0,21	1,76
65,00	108,2	0,50	0,071	53,35	3,17	31,58	3,24	30,90	31,59	1,01	0,23	1,71
70,00	105,0	0,53	0,076	56,56	3,07	32,58	3,14	31,81	32,60	1,01	0,25	1,66
75,00	101,8	0,57	0,081	59,78	2,98	33,55	3,06	32,68	33,57	1,02	0,26	1,62
80,00	98,6	0,60	0,086	62,99	2,90	34,49	2,98	33,52	34,51	1,02	0,28	1,58
85,00	95,4	0,64	0,091	66,21	2,82	35,41	2,91	34,32	35,43	1,02	0,3	1,54
90,00	92,1	0,67	0,096	69,42	2,75	36,30	2,85	35,10	36,32	1,02	0,32	1,50
95,00	88,9	0,70	0,100	72,63	2,69	37,17	2,79	35,85	37,19	1,02	0,33	1,47
100,00	85,7	0,74	0,105	75,85	2,63	38,02	2,73	36,58	38,04	1,02	0,35	1,44
105,00	82,5	0,77	0,110	79,06	2,57	38,85	2,68	37,28	38,87	1,02	0,37	1,42
110,00	79,3	0,80	0,115	82,27	2,52	39,66	2,63	37,96	39,68	1,03	0,39	1,39
115,00	76,1	0,84	0,119	85,49	2,47	40,46	2,59	38,61	40,48	1,03	0,4	1,37
120,00	72,9	0,87	0,124	88,70	2,42	41,23	2,55	39,25	41,26	1,03	0,42	1,35
125,00	69,7	0,90	0,129	91,92	2,38	42,00	2,51	39,87	42,02	1,03	0,44	1,32
130,00	66,4	0,93	0,133	95,13	2,34	42,75	2,47	40,47	42,77	1,03	0,46	1,31
135,00	63,2	0,97	0,138	98,34	2,30	43,49	2,44	41,05	43,51	1,03	0,47	1,29
140,00	60,0	1,00	0,142	101,56	2,26	44,21	2,40	41,61	44,23	1,03	0,49	1,27
145,00	56,8	1,03	0,147	104,77	2,22	44,92	2,37	42,16	44,95	1,03	0,51	1,25
150,00	53,6	1,06	0,152	107,99	2,19	45,62	2,34	42,69	45,65	1,04	0,53	1,24
155,00	50,4	1,09	0,156	111,20	2,16	46,31	2,31	43,21	46,34	1,04	0,54	1,22
160,00	47,2	1,12	0,161	114,41	2,13	46,99	2,29	43,71	47,02	1,04	0,56	1,21
165,00	43,9	1,16	0,165	117,63	2,10	47,66	2,26	44,21	47,69	1,04	0,58	1,19

(Continuação)

x (m)	$\Delta z(x)$ (m)	$\delta$ (m)	$\delta_d$ (m)	$E_p(x)$ (m)	$h_p$ (m)	$V_{m\acute{a}x}$ (m/s)	h (m)	U (m/s)	$U_p$ (m/s)	$\alpha$ (-)	s/s <sub>i</sub> (-)	h/h <sub>i</sub> (-)
170,00	40,7	1,19	0,170	120,84	2,07	48,32	2,24	44,68	48,35	1,04	0,6	1,18
175,00	37,5	1,22	0,174	124,06	2,04	48,97	2,22	45,15	49,00	1,04	0,61	1,17
180,00	34,3	1,25	0,179	127,27	2,01	49,61	2,19	45,60	49,64	1,04	0,63	1,16
185,00	31,1	1,28	0,183	130,48	1,99	50,25	2,17	46,04	50,28	1,04	0,65	1,15
190,00	27,9	1,31	0,188	133,70	1,96	50,87	2,15	46,47	50,90	1,05	0,67	1,14
195,00	24,7	1,34	0,192	136,91	1,94	51,49	2,13	46,88	51,52	1,05	0,68	1,13
200,00	21,4	1,37	0,196	140,13	1,92	52,10	2,11	47,29	52,13	1,05	0,7	1,12
205,00	18,2	1,41	0,201	143,34	1,90	52,71	2,10	47,69	52,74	1,05	0,72	1,11
210,00	15,0	1,44	0,205	146,55	1,88	53,30	2,08	48,07	53,33	1,05	0,74	1,10
215,00	11,8	1,47	0,210	149,77	1,85	53,89	2,06	48,45	53,92	1,05	0,75	1,09
220,00	8,6	1,50	0,214	152,98	1,83	54,48	2,05	48,81	54,51	1,05	0,77	1,08
225,00	5,4	1,53	0,218	156,20	1,82	55,05	2,03	49,17	55,08	1,05	0,79	1,07
230,00	2,2	1,56	0,223	159,41	1,80	55,62	2,02	49,52	55,65	1,05	0,81	1,07
235,00	-1,1	1,59	0,227	162,62	1,78	56,19	2,01	49,86	56,22	1,05	0,82	1,06
240,00	-4,3	1,62	0,231	165,84	1,76	56,75	1,99	50,19	56,78	1,05	0,84	1,05
245,00	-7,5	1,65	0,236	169,05	1,74	57,30	1,98	50,51	57,33	1,05	0,86	1,05
250,00	-10,7	1,68	0,240	172,27	1,73	57,85	1,97	50,82	57,88	1,06	0,88	1,04
255,00	-13,9	1,71	0,244	175,48	1,71	58,40	1,96	51,13	58,43	1,06	0,89	1,03
260,00	-17,1	1,74	0,249	178,69	1,70	58,93	1,94	51,42	58,97	1,06	0,91	1,03
265,00	-20,3	1,77	0,253	181,91	1,68	59,47	1,93	51,71	59,50	1,06	0,93	1,02
270,00	-23,6	1,80	0,257	185,12	1,67	60,00	1,92	52,00	60,03	1,06	0,95	1,02
275,00	-26,8	1,83	0,262	188,33	1,65	60,52	1,91	52,27	60,55	1,06	0,96	1,01
280,00	-30,0	1,86	0,266	191,55	1,64	61,04	1,90	52,54	61,07	1,06	0,98	1,01
285,00	-33,2	1,89	0,270	194,76	1,62	61,55	1,89	52,80	61,59	1,06	1,00	1,00
285,37	-33,4	1,89	0,270	195,00	1,62	61,59	1,89	52,82	61,63	1,06	1,00	1,00

(Continuação)

q	k	K	$\theta$	$h_c$	$E_A=E_C$	N
( $m^2/s^{-1}$ )	(m)	( $m^{1/3}s^{-1}$ )	( $^\circ$ )	(m)	(m)	(m)
20	0,00174	75	60	3,44	2,58	152,58

x	$\Delta z(x)$	$\delta$	$\delta_d$	$E_p(x)$	$h_p$	$V_{m\acute{a}x}$	h	U	$U_p$	$\alpha$	s/s <sub>i</sub>	h/h <sub>i</sub>
(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(-)	(-)	(-)
1,00	149,134	0,01	0,002	3,45	3,43	5,83	3,43	5,82	5,83	1,00	0,012	5,64
5,00	145,67	0,05	0,007	6,91	1,85	10,83	1,85	10,79	10,84	1,00	0,06	3,04
10,00	141,34	0,09	0,013	11,24	1,39	14,37	1,40	14,25	14,38	1,00	0,119	2,31
15,00	137,01	0,13	0,018	15,57	1,17	17,14	1,19	16,87	17,14	1,01	0,179	1,95
20,00	132,679	0,17	0,024	19,90	1,03	19,49	1,05	19,05	19,49	1,01	0,238	1,73
25,00	128,349	0,20	0,029	24,23	0,93	21,58	0,96	20,92	21,58	1,02	0,298	1,57
30,00	124,019	0,24	0,034	28,56	0,85	23,48	0,89	22,57	23,48	1,02	0,357	1,46
35,00	119,689	0,28	0,040	32,89	0,79	25,23	0,83	24,04	25,24	1,03	0,417	1,37
40,00	115,359	0,31	0,045	37,22	0,74	26,87	0,79	25,35	26,88	1,03	0,477	1,30
45,00	111,029	0,35	0,050	41,55	0,70	28,41	0,75	26,55	28,42	1,04	0,536	1,24
50,00	106,699	0,38	0,055	45,88	0,67	29,87	0,72	27,63	29,88	1,04	0,596	1,19
55,00	102,369	0,42	0,059	50,21	0,64	31,26	0,70	28,61	31,27	1,05	0,655	1,15
60,00	98,0385	0,45	0,064	54,54	0,61	32,59	0,68	29,51	32,60	1,05	0,715	1,11
65,00	93,7083	0,48	0,069	58,87	0,59	33,87	0,66	30,33	33,88	1,05	0,774	1,08
70,00	89,3782	0,52	0,074	63,20	0,57	35,11	0,64	31,08	35,12	1,05	0,834	1,06
75,00	85,0481	0,55	0,079	67,53	0,55	36,30	0,63	31,77	36,31	1,06	0,893	1,03
80,00	80,718	0,58	0,083	71,86	0,53	37,45	0,62	32,40	37,46	1,06	0,953	1,01
83,94	77,3044	0,61	0,087	75,28	0,52	38,33	0,61	32,86	38,34	1,06	1,00	1,00

(Continuação)

q	k	K	$\theta$	$h_c$	$E_A=E_C$	N
( $m^2/s^{-1}$ )	(m)	( $m^{1/3}s^{-1}$ )	( $^\circ$ )	(m)	(m)	(m)
40	0,00174	75	60	5,47	4,10	154,1

x	$\Delta z(x)$	$\delta$	$\delta_d$	$E_p(x)$	$h_p$	$V_{m\acute{a}x}$	h	U	$U_p$	$\alpha$	s/ $s_i$	h/ $h_i$
(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(-)	(-)	(-)
2,50	147,835	0,03	0,004	6,26	4,51	8,86	4,52	8,85	8,86	1,00	0,018	4,75
5,00	145,67	0,05	0,007	8,43	3,50	11,44	3,50	11,42	11,44	1,00	0,036	3,68
10,00	141,34	0,09	0,013	12,76	2,67	14,96	2,69	14,89	14,96	1,00	0,073	2,83
15,00	137,01	0,13	0,018	17,09	2,26	17,68	2,28	17,54	17,69	1,00	0,109	2,40
20,00	132,679	0,17	0,024	21,42	2,00	20,00	2,02	19,77	20,01	1,01	0,145	2,13
25,00	128,349	0,20	0,029	25,75	1,81	22,06	1,84	21,72	22,07	1,01	0,182	1,94
30,00	124,019	0,24	0,034	30,08	1,67	23,93	1,71	23,46	23,94	1,01	0,218	1,79
35,00	119,689	0,28	0,040	34,41	1,56	25,67	1,60	25,04	25,67	1,01	0,254	1,68
40,00	115,359	0,31	0,045	38,74	1,47	27,29	1,51	26,49	27,29	1,02	0,29	1,59
45,00	111,029	0,35	0,050	43,07	1,39	28,81	1,44	27,82	28,82	1,02	0,327	1,51
50,00	106,699	0,38	0,055	47,40	1,32	30,26	1,38	29,07	30,27	1,02	0,363	1,45
55,00	102,369	0,42	0,059	51,73	1,26	31,64	1,32	30,22	31,65	1,03	0,399	1,39
60,00	98,0385	0,45	0,064	56,06	1,21	32,96	1,28	31,31	32,97	1,03	0,436	1,34
65,00	93,7083	0,48	0,069	60,39	1,17	34,23	1,24	32,33	34,24	1,03	0,472	1,30
70,00	89,3782	0,52	0,074	64,72	1,13	35,45	1,20	33,28	35,46	1,04	0,508	1,26
75,00	85,0481	0,55	0,079	69,05	1,09	36,63	1,17	34,18	36,64	1,04	0,545	1,23
80,00	80,718	0,58	0,083	73,38	1,06	37,78	1,14	35,03	37,79	1,04	0,581	1,20
85,00	76,3878	0,62	0,088	77,71	1,03	38,89	1,12	35,83	38,90	1,04	0,617	1,17
90,00	72,0577	0,65	0,093	82,04	1,00	39,97	1,09	36,59	39,98	1,05	0,653	1,15
95,00	67,7276	0,68	0,097	86,37	0,97	41,02	1,07	37,31	41,03	1,05	0,69	1,13
100,00	63,3975	0,71	0,102	90,70	0,95	42,04	1,05	37,99	42,05	1,05	0,726	1,11
105,00	59,0673	0,74	0,106	95,03	0,93	43,04	1,04	38,63	43,05	1,05	0,762	1,09
110,00	54,7372	0,78	0,111	99,36	0,91	44,02	1,02	39,24	44,03	1,05	0,799	1,07
115,00	50,4071	0,81	0,115	103,69	0,89	44,97	1,00	39,81	44,99	1,05	0,835	1,06
120,00	46,077	0,84	0,120	108,02	0,87	45,91	0,99	40,36	45,92	1,06	0,871	1,04
125,00	41,7468	0,87	0,124	112,35	0,85	46,82	0,98	40,88	46,84	1,06	0,908	1,03
130,00	37,4167	0,90	0,129	116,68	0,84	47,72	0,97	41,37	47,74	1,06	0,944	1,02
135,00	33,0866	0,93	0,133	121,01	0,82	48,61	0,96	41,83	48,62	1,06	0,98	1,01
137,74	30,7171	0,95	0,136	123,38	0,81	49,08	0,95	42,08	49,09	1,06	1,00	1,00



(Continuação)

q	k	K	$\theta$	$h_c$	$E_A=E_C$	N
( $m^2/s^{-1}$ )	(m)	( $m^{1/3}s^{-1}$ )	( $^\circ$ )	(m)	(m)	(m)
100	0,00174	75	60	10,07	7,55	157,55

x	$\Delta z(x)$	$\delta$	$\delta_d$	$E_p(x)$	$h_p$	$V_{m\acute{a}x}$	h	U	$U_p$	$\alpha$	s/s <sub>i</sub>	h/h <sub>i</sub>
(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(-)	(-)	(-)
2,50	147,8	0,03	0,004	9,72	11,00	9,09	11,01	9,09	9,09	1,00	0,009	6,42
5,00	145,7	0,05	0,007	11,88	8,06	12,40	8,07	12,39	12,40	1,00	0,019	4,71
10,00	141,3	0,09	0,013	16,21	6,24	16,01	6,26	15,98	16,02	1,00	0,038	3,65
15,00	137,0	0,13	0,018	20,54	5,34	18,71	5,36	18,65	18,71	1,00	0,057	3,13
20,00	132,7	0,17	0,024	24,87	4,76	20,99	4,79	20,89	21,00	1,00	0,075	2,79
25,00	128,3	0,20	0,029	29,20	4,34	23,01	4,37	22,86	23,02	1,00	0,094	2,55
30,00	124,0	0,24	0,034	33,53	4,02	24,85	4,06	24,64	24,86	1,00	0,113	2,37
35,00	119,7	0,28	0,040	37,86	3,77	26,55	3,81	26,28	26,56	1,01	0,132	2,22
40,00	115,4	0,31	0,045	42,19	3,55	28,14	3,60	27,80	28,14	1,01	0,151	2,10
45,00	111,0	0,35	0,050	46,52	3,37	29,64	3,42	29,21	29,64	1,01	0,17	2,00
50,00	106,7	0,38	0,055	50,85	3,22	31,06	3,27	30,55	31,07	1,01	0,189	1,91
55,00	102,4	0,42	0,059	55,18	3,08	32,42	3,14	31,81	32,42	1,01	0,207	1,83
60,00	98,0	0,45	0,064	59,51	2,97	33,72	3,03	33,01	33,73	1,01	0,226	1,77
65,00	93,7	0,48	0,069	63,84	2,86	34,97	2,93	34,15	34,98	1,01	0,245	1,71
70,00	89,4	0,52	0,074	68,17	2,76	36,17	2,84	35,24	36,18	1,02	0,264	1,66
75,00	85,0	0,55	0,079	72,50	2,68	37,34	2,76	36,28	37,35	1,02	0,283	1,61
80,00	80,7	0,58	0,083	76,83	2,60	38,47	2,68	37,28	38,48	1,02	0,302	1,57
85,00	76,4	0,62	0,088	81,16	2,53	39,56	2,61	38,24	39,57	1,02	0,321	1,53
90,00	72,1	0,65	0,093	85,49	2,46	40,63	2,55	39,16	40,64	1,02	0,339	1,49
95,00	67,7	0,68	0,097	89,82	2,40	41,67	2,50	40,05	41,68	1,02	0,358	1,46
100,00	63,4	0,71	0,102	94,15	2,34	42,68	2,44	40,91	42,69	1,02	0,377	1,43
105,00	59,1	0,74	0,106	98,48	2,29	43,67	2,40	41,74	43,68	1,03	0,396	1,40
110,00	54,7	0,78	0,111	102,81	2,24	44,63	2,35	42,54	44,65	1,03	0,415	1,37
115,00	50,4	0,81	0,115	107,14	2,19	45,58	2,31	43,31	45,59	1,03	0,434	1,35
120,00	46,1	0,84	0,120	111,47	2,15	46,50	2,27	44,06	46,52	1,03	0,452	1,32
125,00	41,7	0,87	0,124	115,80	2,11	47,41	2,23	44,78	47,42	1,03	0,471	1,30
130,00	37,4	0,90	0,129	120,13	2,07	48,30	2,20	45,48	48,31	1,03	0,49	1,28
135,00	33,1	0,93	0,133	124,46	2,03	49,18	2,17	46,16	49,19	1,04	0,509	1,26
140,00	28,8	0,97	0,138	128,79	2,00	50,03	2,14	46,82	50,05	1,04	0,528	1,25
145,00	24,4	1,00	0,142	133,12	1,96	50,88	2,11	47,46	50,89	1,04	0,547	1,23
150,00	20,1	1,03	0,147	137,45	1,93	51,71	2,08	48,07	51,72	1,04	0,566	1,21
155,00	15,8	1,06	0,151	141,78	1,90	52,52	2,05	48,67	52,54	1,04	0,584	1,20

(Continuação)

x (m)	$\Delta z(x)$ (m)	$\delta$ (m)	$\delta_d$ (m)	$E_p(x)$ (m)	$h_p$ (m)	$V_{m\acute{a}x}$ (m/s)	h (m)	U (m/s)	$U_p$ (m/s)	$\alpha$ (-)	s/s <sub>i</sub> (-)	h/h <sub>i</sub> (-)
160,00	11,4	1,09	0,155	146,11	1,87	53,33	2,03	49,26	53,34	1,04	0,603	1,18
165,00	7,1	1,12	0,160	150,44	1,85	54,12	2,01	49,82	54,14	1,04	0,622	1,17
170,00	2,8	1,15	0,164	154,77	1,82	54,90	1,99	50,37	54,92	1,04	0,641	1,16
175,00	-1,6	1,18	0,169	159,11	1,80	55,67	1,96	50,91	55,69	1,05	0,66	1,15
180,00	-5,9	1,21	0,173	163,44	1,77	56,43	1,94	51,43	56,44	1,05	0,679	1,13
185,00	-10,2	1,24	0,177	167,77	1,75	57,18	1,93	51,93	57,19	1,05	0,698	1,12
190,00	-14,5	1,27	0,181	172,10	1,73	57,92	1,91	52,42	57,93	1,05	0,716	1,11
195,00	-18,9	1,30	0,186	176,43	1,70	58,65	1,89	52,90	58,66	1,05	0,735	1,10
200,00	-23,2	1,33	0,190	180,76	1,68	59,37	1,87	53,36	59,38	1,05	0,754	1,09
205,00	-27,5	1,36	0,194	185,09	1,66	60,08	1,86	53,81	60,09	1,05	0,773	1,08
210,00	-31,9	1,39	0,199	189,42	1,64	60,78	1,84	54,25	60,80	1,05	0,792	1,08
215,00	-36,2	1,42	0,203	193,75	1,63	61,48	1,83	54,67	61,49	1,05	0,811	1,07
220,00	-40,5	1,45	0,207	198,08	1,61	62,17	1,82	55,09	62,18	1,05	0,83	1,06
225,00	-44,9	1,48	0,211	202,41	1,59	62,85	1,80	55,49	62,86	1,06	0,848	1,05
230,00	-49,2	1,51	0,216	206,74	1,57	63,52	1,79	55,88	63,53	1,06	0,867	1,04
235,00	-53,5	1,54	0,220	211,07	1,56	64,18	1,78	56,26	64,20	1,06	0,886	1,04
240,00	-57,8	1,57	0,224	215,40	1,54	64,84	1,77	56,63	64,86	1,06	0,905	1,03
245,00	-62,2	1,60	0,228	219,73	1,53	65,49	1,75	56,99	65,51	1,06	0,924	1,02
250,00	-66,5	1,63	0,232	224,06	1,51	66,14	1,74	57,34	66,16	1,06	0,943	1,02
255,00	-70,8	1,66	0,236	228,39	1,50	66,78	1,73	57,68	66,80	1,06	0,962	1,01
260,00	-75,2	1,68	0,241	232,72	1,48	67,41	1,72	58,01	67,43	1,06	0,98	1,01
265,00	-79,5	1,71	0,245	237,05	1,47	68,04	1,71	58,34	68,06	1,06	0,999	1,00
265,21	-79,7	1,72	0,245	237,23	1,47	68,07	1,71	58,35	68,08	1,06	1,00	1,00



## Anexo II – Curva de regressão $h/h_i$ vs $s/s_i$ : solução obtida através do software *TableCurve 3D*®

Utilizando os mesmos critérios para a obtenção da melhor aproximação de superfície de regressão face ao comportamento do escoamento a montante da seção de afloramento da camada limite, recorreu-se ao software *TableCurve 3D*®.

Como a sigla *3D* sugere, neste procedimento foram utilizadas três grandezas com os seguintes dados de entrada:  $s/s_i$ ,  $\text{tg } \theta$  e  $h/h_i$ , uma vez que se comprovou a altura do escoamento adimensionalizada se encontra fortemente dependente tanto da sua distância da soleira descarregadora, assim como do declive do canal.

Inserindo exatamente a mesma base de dados do ponto anterior e após a análise das expressões propostas pelo software *TableCurve 3D*®, com base na sua simplicidade de aplicação e coeficiente de determinação  $r^2$ , sugere-se a seguinte equação:

$$\frac{h}{h_i} = \frac{1}{a + b \sqrt{\frac{s}{s_i}} + c \ln(\text{tg } \theta)} \quad (\text{II.1})$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  apresentam valores de 0,124; 0,929 e -0,056.

A superfície de regressão expressa na Eq. (II.1) e ilustrada na Figura II.1 apresenta um coeficiente de determinação  $r^2$  de 0,982.

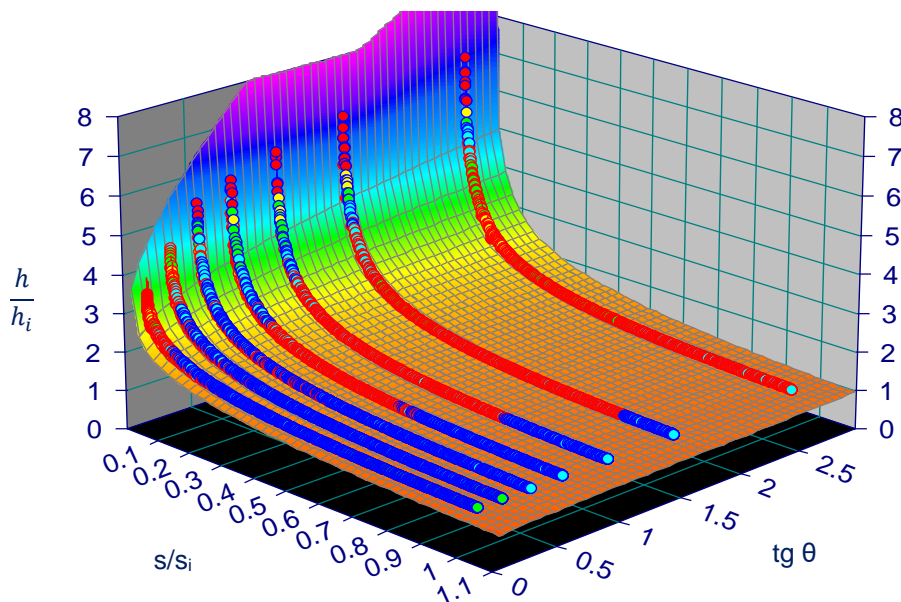
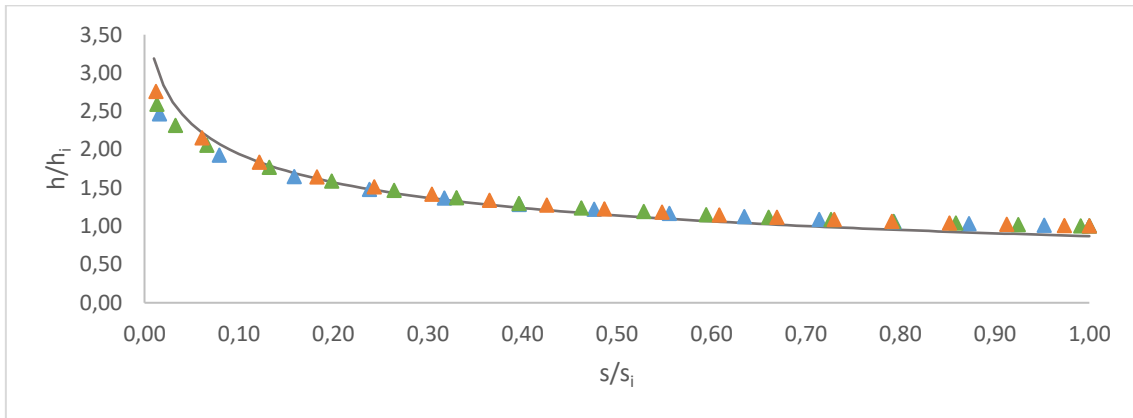
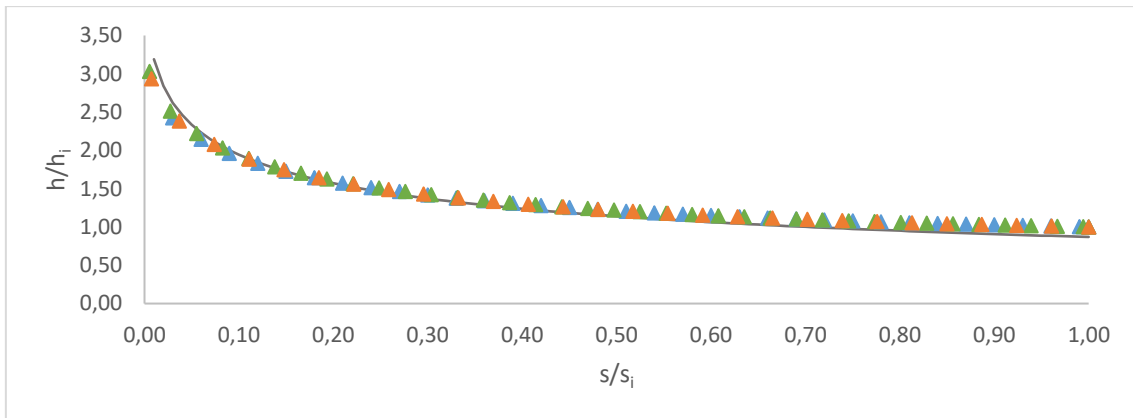


Figura II. 1- Representação gráfica da superfície de regressão expressa na Eq. (II.1) pelo software *TableCurve 3D*®.

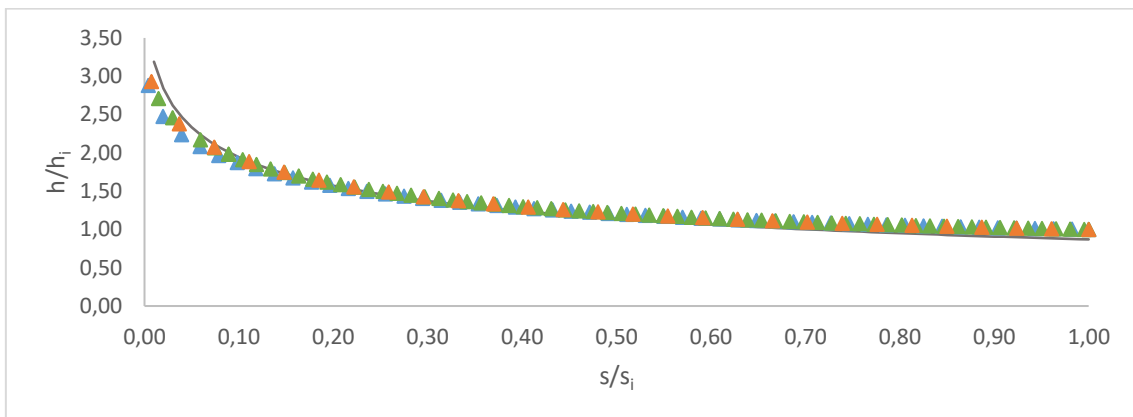
De seguida, efetua-se a análise de ajustamento da superfície de regressão para as mesmas combinações de variáveis ( $q$ ,  $K$  e  $\theta$ ) descritas no ponto anterior, como se ilustra nas Figuras II.2, II.3 e II.4.



(a)



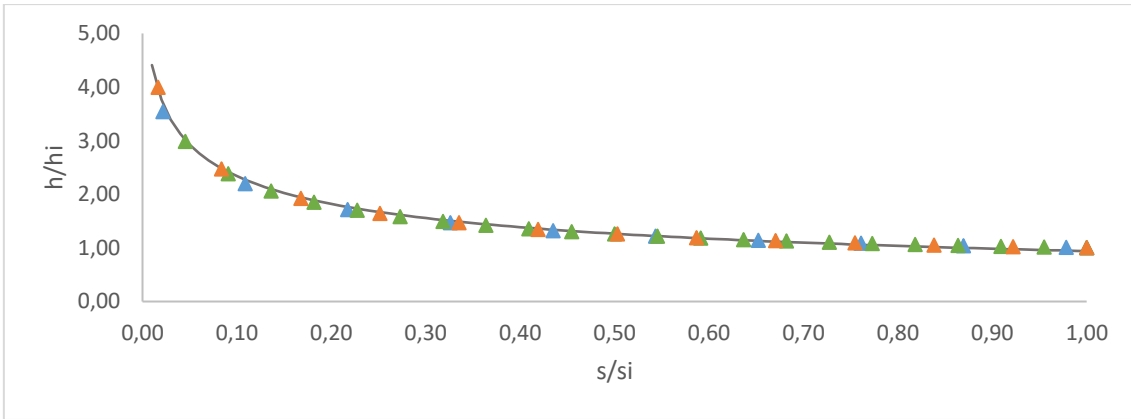
(b)



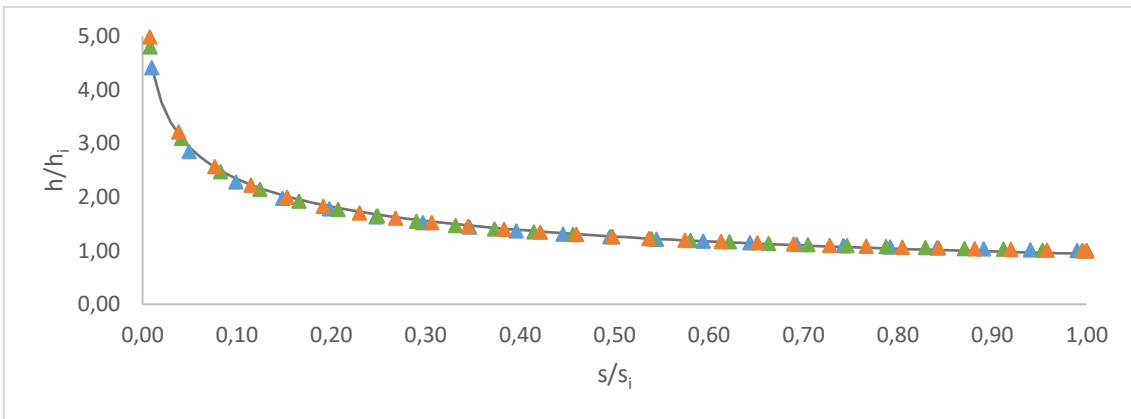
▲ K=50    ▲ K=75    ▲ K=90    — Eq. (II.1)

(c)

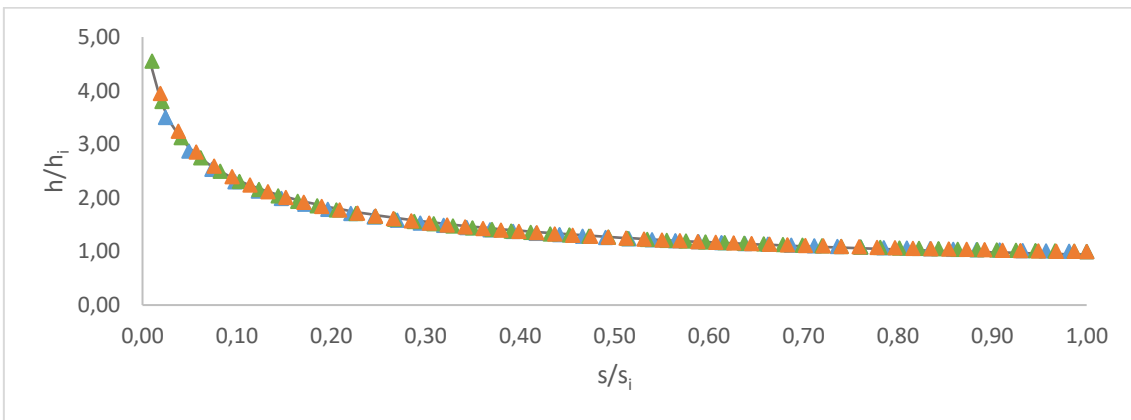
**Figura II. 2 - Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador. Comparação de resultados para o ângulo com a horizontal de  $10^\circ$ : (a)  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (b)  $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (c)  $q=80 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .**



(a)



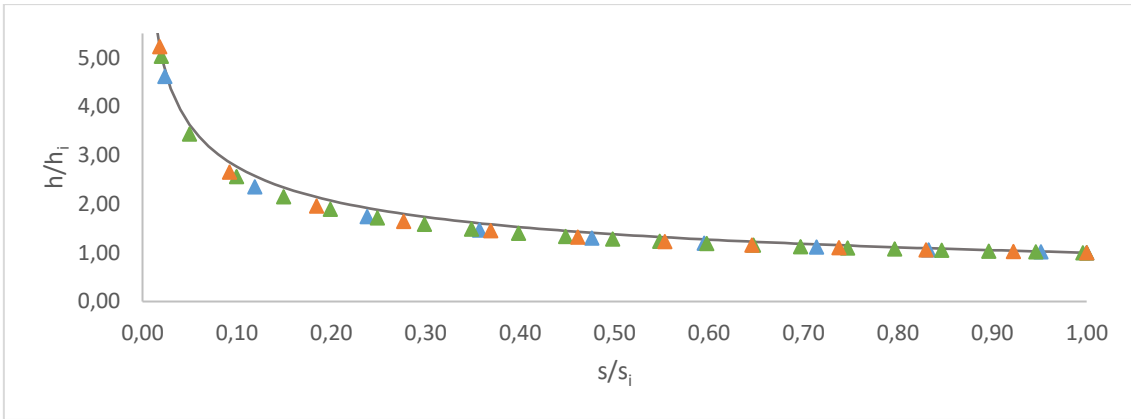
(b)



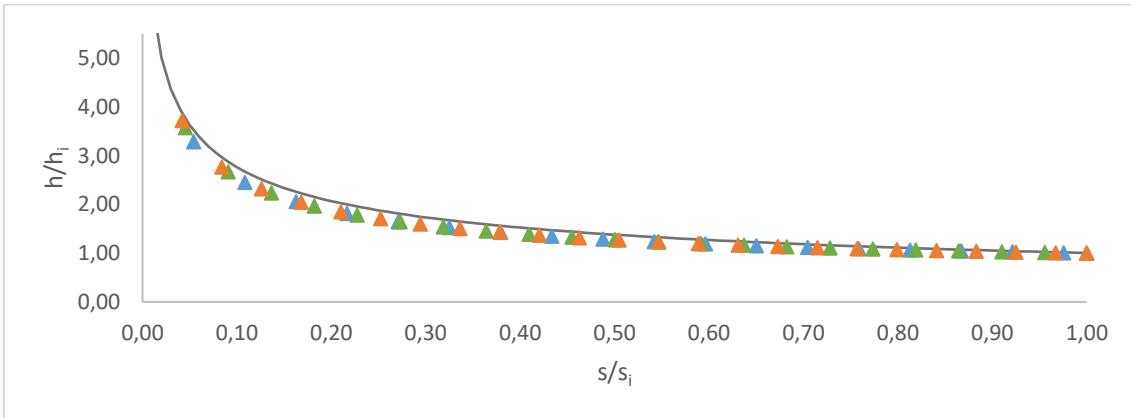
(c)

▲ K=50    ▲ K=75    ▲ K=90    — Eq. (II.1)

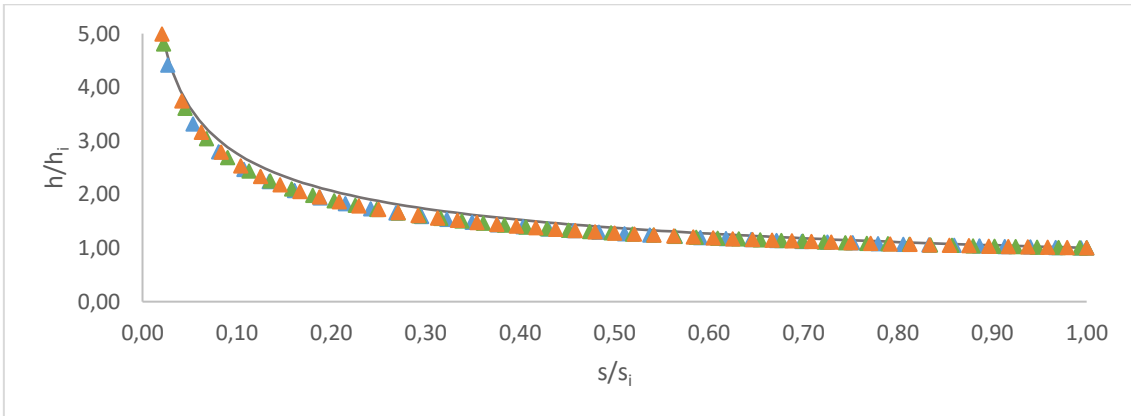
**Figura II. 3 - Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador. Comparação de resultados para o ângulo com a horizontal de 40°: (a)  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (b)  $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (c)  $q=80 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$**



(a)



(b)



(c)

▲ K=50    ▲ K=75    ▲ K=90    — Eq. (II.1)

**Figura II. 4 - Altura do escoamento adimensionalizada em função da distância adimensionalizada ao longo do descarregador. Comparação de resultados para o ângulo com a horizontal de  $70^\circ$ : (a)  $q=5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (b)  $q=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; (c)  $q=80 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .**

## Anexo III - Tabela de cálculo para a determinação da concentração média de ar do escoamento a jusante da seção de afloramento da camada limite

Considere-se de seguida, a seguinte tabela de cálculo, utilizada para a determinação da concentração média de ar do escoamento no trecho gradualmente variado para cada uma das 54 situações práticas. Tenha-se como exemplo a análise da situação prática correspondente ao escoamento com  $q=10 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ; num canal descarregador de betão com  $K=75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  e cujo ângulo com a horizontal seja  $\theta=30^\circ$ .

**Tabela III.1 – Dados de entrada para a resolução do procedimento numérico para a obtenção da concentração média de ar no trecho de escoamento gradualmente variado.**

q ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	$\theta$ ( $^\circ$ )	sen( $\theta$ ) (-)	k (m)	K ( $\text{m}^{1/3} \text{s}^{-1}$ )	$s_i$ (m)	$h_i$ (m)	$h_c/k$ (-)	$\bar{C}_u$ (-)	$u_r$ (m/s)	k (1/m)	$k_0$ (-)
10	30	0,5	0,001735	75	58,267	0,468	1249,642	0,430	0,400	0,035	0,843

**Tabela III.2 – Resultados do procedimento numérico para a obtenção da concentração média de ar no trecho de escoamento gradualmente variado.**

$s_*$ (m)	$\bar{C}$ (-)	$\bar{C}/\bar{C}_u$ (-)	$s_*/h_i$ (-)	$s_*/s_i$ (-)
0,50	0,007	0,02	1,07	0,009
1	0,014	3,36	2,14	0,017
5	0,064	14,93	10,68	0,086
10	0,113	26,30	21,35	0,172
20	0,183	42,61	42,70	0,343
30	0,232	53,79	64,06	0,515
40	0,267	61,97	85,41	0,686
50	0,294	68,22	106,76	0,858
60	0,315	73,12	128,11	1,030
70	0,332	77,06	149,47	1,201
80	0,346	80,28	170,82	1,373
90	0,357	82,95	192,17	1,545
100	0,367	85,19	213,52	1,716
105	0,371	86,18	224,20	1,802
110	0,375	87,09	234,88	1,888
115	0,379	87,93	245,55	1,974
120	0,382	88,71	256,23	2,059
129	0,387	90,00	276,00	2,218
184	0,409	95,00	394,38	3,170
323	0,426	99,00	689,68	5,543

Para o processo iterativo da Eq.(2.48) a (2.51) foi utilizada a ferramenta *Goal Seek* do software MSEExcel.



