Medida e Integração
2022/2023

Exame de 13 de Julho de 2023 - 18h00
Duração: 2 horas

Nome: ____

Número: ____

Pergunta	Classificação
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Nos exercícios abaixo, Λ é a σ-álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e λ a medida de Lebesgue.

1. (2 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente. Mostre que f é Λ-mensurável.

2. Considere a função mensurável
$$f(x,y) = \frac{\cos(y)\cos(\sin(y)/x)}{x^{2/3}}, \ x, y \in (0,\pi)$$
   (a) (2,5 val.) Mostre que $f \in L^1((0,\pi)^2, dxdy)$.
   (b) (2,5 val.) Calcule $\int_{(0,\pi)^2} f(x,y)dxdy$.

3. (2 val.) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ tal que $\nu \perp \mu$ e $\nu \ll \mu$. Mostre que $\nu = 0$.

4. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade.
   (a) (2 val.) Dados $A, B \in \mathcal{A}$, mostre que
$$\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B) = \int_X (\mathbb{1}_A - \mu(A))(\mathbb{1}_B - \mu(B))d\mu.$$
   (b) (2,5 val.) Conclua que
$$|\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \le \sqrt{(1-\mu(A))\mu(A)(1-\mu(B))\mu(B)}, \quad \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

5. (2,5 val.) Seja $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-mensuráveis tais que
$$|f_n(x)| < \frac{|x|}{n}, \quad \mu(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| > 1\}) = 1.$$
   Mostre que $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$ (Sug. argumente por absurdo).

6. (4 val.) Definindo
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$
   considere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = e^x(2 + \operatorname{sgn}(x))$, e μ_F a medida de Lebesgue-Stieljes associada. Determine a decomposição de Lebesgue de μ_F, ou seja, $\mu_F = \mu_c + \mu_\perp$, onde $\mu_c \ll \mu_F$ e $\mu_\perp \perp \mu_F$.