Cálculo Diferencial e Integral I

A.Bravo

18 de setembro de 2022

Apresentação

Docente Responsável António Bravo
<antonio.j.v.bravo@tecnico.ulisboa.pt>

Avaliação de de Conhecimentos

Avaliação de de Conhecimentos

1MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final -

Avaliação de de Conhecimentos

1MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final -25 de Outubro, terça-feira, 18:00.

Avaliação de de Conhecimentos

1MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final -25 de Outubro, terça-feira, 18:00.

2MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final -

Avaliação de de Conhecimentos

1MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final -25 de Outubro, terça-feira, 18:00.

2MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final - 13 de Dezembro, terça-feira, 18:00.

Avaliação de de Conhecimentos

1MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final -25 de Outubro, terça-feira, 18:00.
2MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final - 13 de Dezembro, terça-feira, 18:00.
E60: teste de 60 minutos, com peso de 40 porcento na nota final -

Avaliação de de Conhecimentos

1MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final -25 de Outubro, terça-feira, 18:00.
2MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final - 13 de Dezembro, terça-feira, 18:00.
E60: teste de 60 minutos, com peso de 40 porcento na nota final - 23 de Janeiro, segunda-feira, 08:00.

Avaliação de de Conhecimentos

1MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final -25 de Outubro, terça-feira, 18:00.
2MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final - 13 de Dezembro, terça-feira, 18:00.
E60: teste de 60 minutos, com peso de 40 porcento na nota final - 23 de Janeiro, segunda-feira, 08:00.

ER: Exame de Recurso terá a duração de 2 horas -

Avaliação de de Conhecimentos

1MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final -25 de Outubro, terça-feira, 18:00.
2MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final - 13 de Dezembro, terça-feira, 18:00.
E60: teste de 60 minutos, com peso de 40 porcento na nota final - 23 de Janeiro, segunda-feira, 08:00.

ER: Exame de Recurso terá a duração de 2 horas -08 de Fevereiro, quarta-feira, 08:00.

Avaliação de de Conhecimentos

1MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final -25 de Outubro, terça-feira, 18:00.
2MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final - 13 de Dezembro, terça-feira, 18:00.
E60: teste de 60 minutos, com peso de 40 porcento na nota final - 23 de Janeiro, segunda-feira, 08:00.

ER: Exame de Recurso terá a duração de 2 horas -08 de Fevereiro, quarta-feira, 08:00.

Nota Final (NF): será o resultado da fórmula:

Avaliação de de Conhecimentos

1MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final -25 de Outubro, terça-feira, 18:00.
2MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final - 13 de Dezembro, terça-feira, 18:00.
E60: teste de 60 minutos, com peso de 40 porcento na nota final - 23 de Janeiro, segunda-feira, 08:00.

ER: Exame de Recurso terá a duração de 2 horas -08 de Fevereiro, quarta-feira, 08:00.

Nota Final (NF): será o resultado da fórmula:
$(\mathrm{NF}) = \max\,(0{,}3\ (1\mathrm{MAP45}) + 0{,}3\ (2\mathrm{MAP45}) + 0{,}4\ (\mathrm{E60})\ ;\ (\mathrm{ER}))$
sujeito a uma oral de confirmação de nota para (NF) $\geq 17,5$.

Avaliação de de Conhecimentos

1MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final -25 de Outubro, terça-feira, 18:00.
2MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30 porcento na nota final - 13 de Dezembro, terça-feira, 18:00.
E60: teste de 60 minutos, com peso de 40 porcento na nota final - 23 de Janeiro, segunda-feira, 08:00.

ER: Exame de Recurso terá a duração de 2 horas -08 de Fevereiro, quarta-feira, 08:00.

Nota Final (NF): será o resultado da fórmula:
$(NF) = \max\,(0{,}3\ (1MAP45) + 0{,}3\ (2MAP45) + 0{,}4\ (E60)\ ;\ (ER))$
sujeito a uma oral de confirmação de nota para $(NF) \geq 17,5$.
Calculadoras: na avaliação não é permitida a utilização de qualquer género de calculadoras.

Programa

1. **Números reais: revisões e propriedades.**
   O princípio do supremo.
   Método de indução.
2. **Funções reais de variável real: limite e continuidade.**
   Funções elementares (módulo, polinómios, raíz de índice n, funções trigonométricas, trigonométricas inversas, hiperbólicas, função exponencial e logaritmo).
   Propriedades globais de funções contínuas: o Teorema do Valor Intermédio e de Weierstrass.
3. **Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$.**
   O conceito de derivada; derivadas das funções elementares.
   Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Regra de l'Hôpital.
   Derivadas de ordem superior.
   Derivada de funções inversas.
   Polinómio de Taylor.

Programa

4. **Primitivação.**
   Primitivas imediatas e quase-imediatas.
   Primitivação por partes e por substituição.
   Primitivas de funções racionais.
   Equações Diferenciais Ordinárias.
5. **Cálculo integral em $\mathbb{R}$.**
   Integral de Riemann.
   Teorema fundamental do cálculo e fórmula de Barrow.
   Fórmulas de integração por partes e por substituição.
   Aplicações: cálculo de áreas, definição de funções.
6. **Sucessões e séries numéricas. Séries de potências**
   Convergência. Sucessões e séries geométricas.
   Critérios de comparação. séries absolutamente convergentes.
   Séries de potências. Séries de Taylor.

números naturais e inteiros

Comecemos por recordar o conjunto dos números *naturais*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

números naturais e inteiros

Comecemos por recordar o conjunto dos números *naturais*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Recorde-se que cada natural se pode decompor, de forma única, como produto de números primos. Por exemplo: $9 = 3^2$, $21 = 3 \times 7$, $245 = 3 \times 7^2$.

Comecemos por recordar o conjunto dos números *naturais*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Recorde-se que cada natural se pode decompor, de forma única, como produto de números primos. Por exemplo: $9 = 3^2$, $21 = 3 \times 7$, $245 = 3 \times 7^2$.

Em geral, dado $n \in \mathbb{N}$, tem-se $n = p_1^{n_1} \ldots, p_m^{n_m}$, onde $p_1, \ldots, p_m$ são números primos e $n_1, \ldots, n_m$ expoentes naturais.

números naturais e inteiros

Comecemos por recordar o conjunto dos números *naturais*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Recorde-se que cada natural se pode decompor, de forma única, como produto de números primos. Por exemplo: $9 = 3^2$, $21 = 3 \times 7$, $245 = 3 \times 7^2$.

Em geral, dado $n \in \mathbb{N}$, tem-se $n = p_1^{n_1} \ldots, p_m^{n_m}$, onde $p_1, \ldots, p_m$ são números primos e $n_1, \ldots, n_m$ expoentes naturais.

O conjunto dos números *inteiros* é dado por

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Comecemos por recordar o conjunto dos números *naturais*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Recorde-se que cada natural se pode decompor, de forma única, como produto de números primos. Por exemplo: $9 = 3^2$, $21 = 3 \times 7$, $245 = 3 \times 7^2$.
Em geral, dado $n \in \mathbb{N}$, tem-se $n = p_1^{n_1} \ldots, p_m^{n_m}$, onde $p_1, \ldots, p_m$ são números primos e $n_1, \ldots, n_m$ expoentes naturais.

O conjunto dos números *inteiros* é dado por

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Observe-se que os inteiros estão naturalmente ordenados,

$$\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots,$$

e que podem ser representados geometricamente como pontos equidistantes numa reta:

números racionais

De seguida, recordamos o conjunto dos números *racionais*:

De seguida, recordamos o conjunto dos números *racionais*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \right\},$$

De seguida, recordamos o conjunto dos números *racionais*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \right\},$$

Representação decimal dos números racionais.
Através do algoritmo da divisão, podemos obter uma representação decimal de qualquer número racional;

De seguida, recordamos o conjunto dos números *racionais*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \right\},$$

Representação decimal dos números racionais.
Através do algoritmo da divisão, podemos obter uma representação decimal de qualquer número racional;
o resultado é sempre ou uma dízima finita, ou uma dízima infinita periódica.

De seguida, recordamos o conjunto dos números *racionais*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \; p, q \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0 \right\},$$

Representação decimal dos números racionais.
Através do algoritmo da divisão, podemos obter uma representação decimal de qualquer número racional;
o resultado é sempre ou uma dízima finita, ou uma dízima infinita periódica.
Por exemplo tem-se $\frac{1}{3} = 0.(3)$, $\frac{249}{16} = 15.5625$ e $\frac{350}{21} = 16.(6)$.

números racionais

Por outro lado, qualquer dízima finita ou infinita periódica pode ser convertida numa fração.

Por outro lado, qualquer dízima finita ou infinita periódica pode ser convertida numa fração.
Considerando por exemplo $x := 0.(123) = 0.123123\ldots$, multiplicamos o número por 1000 (10 elevado ao período, 3) para obter:

Por outro lado, qualquer dízima finita ou infinita periódica pode ser convertida numa fração.
Considerando por exemplo $x := 0.(123) = 0.123123\ldots$, multiplicamos o número por 1000 (10 elevado ao período, 3) para obter:

$$1000x = 123.(123), \text{ donde } 1000x - x = 123 \iff x = \frac{123}{999}.$$

Por outro lado, qualquer dízima finita ou infinita periódica pode ser convertida numa fração.
Considerando por exemplo $x := 0.(123) = 0.123123\ldots$, multiplicamos o número por 1000 (10 elevado ao período, 3) para obter:

$$1000x = 123.(123), \text{ donde } 1000x - x = 123 \iff x = \frac{123}{999}.$$

Observe-se que necessariamente se tem $0.(9) = 1$, $1.2(9) = 1.3$, etc (basta repetir o processo anterior para o justificar).
Assim, tem-se a seguinte caracterização alternativa do conjunto dos números racionais

Por outro lado, qualquer dízima finita ou infinita periódica pode ser convertida numa fração.
Considerando por exemplo $x := 0.(123) = 0.123123\ldots$, multiplicamos o número por 1000 (10 elevado ao período, 3) para obter:

$$1000x = 123.(123), \text{ donde } 1000x - x = 123 \iff x = \frac{123}{999}.$$

Observe-se que necessariamente se tem $0.(9) = 1$, $1.2(9) = 1.3$, etc (basta repetir o processo anterior para o justificar).
Assim, tem-se a seguinte caracterização alternativa do conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \{\text{dízimas finitas ou infinitas periódicas}\}.$$

Propriedades básicas das operações de soma e produto entre racionais.

Propriedades básicas das operações de soma e produto entre racionais.

O conjunto dos racionais é *fechado* para a soma $(+)$ e para o produto $(\cdot)$, ou seja:

Propriedades básicas das operações de soma e produto entre racionais.

O conjunto dos racionais é *fechado* para a soma $(+)$ e para o produto $(\cdot)$, ou seja:
dados dois racionais $x = \frac{p}{q}$ e $y = \frac{r}{s}$, a soma $x + y := \frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s}$ e o produto $x \cdot y := \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$ são também números racionais.

P1. Propriedades da Soma.

P1. Propriedades da Soma.

Dados racionais a, b, c:

P1. Propriedades da Soma.

Dados racionais a, b, c:

(i) (Propriedade Comutativa) $a + b = b + a$;

P1. Propriedades da Soma.

Dados racionais a, b, c:

(i) (Propriedade Comutativa) $a + b = b + a$;

(ii) (Propriedade Associativa) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

P1. Propriedades da Soma.

Dados racionais a, b, c:

(i) (Propriedade Comutativa) $a + b = b + a$;

(ii) (Propriedade Associativa) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(iii) (Elemento Neutro) $a + 0 = 0 + a = a$;

P1. Propriedades da Soma.

Dados racionais a, b, c:

(i) (Propriedade Comutativa) $a + b = b + a$;

(ii) (Propriedade Associativa) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(iii) (Elemento Neutro) $a + 0 = 0 + a = a$;

(iv) (Elemento Simétrico): $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

P2. Propriedades do Produto.

P2. Propriedades do Produto.

(i) (Propriedade Comutativa) $a \cdot b = b \cdot a$;

P2. Propriedades do Produto.

(i) (Propriedade Comutativa) $a \cdot b = b \cdot a$;

(ii) (Propriedade Associativa) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

P2. Propriedades do Produto.

(i) (Propriedade Comutativa) $a \cdot b = b \cdot a$;

(ii) (Propriedade Associativa) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(iii) (Elemento Neutro) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

P2. Propriedades do Produto.

(i) (Propriedade Comutativa) $a \cdot b = b \cdot a$;

(ii) (Propriedade Associativa) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(iii) (Elemento Neutro) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

(iv) (Elemento Inverso): $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ para $a \neq 0$ ($\frac{1}{a}$ é também indicado como a^{-1}).

P2. Propriedades do Produto.

(i) (Propriedade Comutativa) $a \cdot b = b \cdot a$;

(ii) (Propriedade Associativa) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(iii) (Elemento Neutro) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

(iv) (Elemento Inverso): $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ para $a \neq 0$ ($\frac{1}{a}$ é também indicado como a^{-1}).

Por fim, as operações de multiplicação e soma têm a seguinte relação:

P2. Propriedades do Produto.

(i) (Propriedade Comutativa) $a \cdot b = b \cdot a$;

(ii) (Propriedade Associativa) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(iii) (Elemento Neutro) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

(iv) (Elemento Inverso): $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ para $a \neq 0$ ($\frac{1}{a}$ é também indicado como a^{-1}).

Por fim, as operações de multiplicação e soma têm a seguinte relação:

(v) (Propriedade Distributiva) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

O conjunto $\mathbb{Q}$ é também um conjunto ordenado: dados dois números racionais a e b, tem-se $a \geq b$ ou $a \leq b$. A relação $\leq$ diz-se uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$ compatível com a estrutura algébrica, uma vez que verifica as seguintes propriedades:

P3. Propriedades da relação $\leq$:

O conjunto $\mathbb{Q}$ é também um conjunto ordenado: dados dois números racionais a e b, tem-se $a \geq b$ ou $a \leq b$. A relação $\leq$ diz-se uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$ compatível com a estrutura algébrica, uma vez que verifica as seguintes propriedades:

P3. Propriedades da relação $\leq$:

Dados racionais a, b, c,

O conjunto $\mathbb{Q}$ é também um conjunto ordenado: dados dois números racionais a e b, tem-se $a \geq b$ ou $a \leq b$. A relação $\leq$ diz-se uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$ compatível com a estrutura algébrica, uma vez que verifica as seguintes propriedades:

P3. Propriedades da relação $\leq$:

Dados racionais a, b, c,

(i) (Relação de ordem) $a \leq a$; $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$; $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$;

O conjunto $\mathbb{Q}$ é também um conjunto ordenado: dados dois números racionais a e b, tem-se $a \geq b$ ou $a \leq b$. A relação $\leq$ diz-se uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$ compatível com a estrutura algébrica, uma vez que verifica as seguintes propriedades:

P3. Propriedades da relação $\leq$:

Dados racionais a, b, c,

(i) (Relação de ordem) $a \leq a$; $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$;
$a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$;

(chamadas respetivamente de propriedade reflexiva, antisimétrica e transitiva).

O conjunto $\mathbb{Q}$ é também um conjunto ordenado: dados dois números racionais a e b, tem-se $a \geq b$ ou $a \leq b$. A relação $\leq$ diz-se uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$ compatível com a estrutura algébrica, uma vez que verifica as seguintes propriedades:

P3. Propriedades da relação $\leq$:

Dados racionais a, b, c,

(i) (Relação de ordem) $a \leq a$; $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$;
$a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$;

(chamadas respetivamente de propriedade reflexiva, antisimétrica e transitiva).

(ii) (Compatibilidade da soma) $a \leq b \implies a + c \leq b + c$;

O conjunto $\mathbb{Q}$ é também um conjunto ordenado: dados dois números racionais a e b, tem-se $a \geq b$ ou $a \leq b$. A relação $\leq$ diz-se uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$ compatível com a estrutura algébrica, uma vez que verifica as seguintes propriedades:

P3. Propriedades da relação $\leq$:

Dados racionais a, b, c,

(i) (Relação de ordem) $a \leq a$; $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$;
$a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$;

(chamadas respetivamente de propriedade reflexiva, antisimétrica e transitiva).

(ii) (Compatibilidade da soma) $a \leq b \implies a + c \leq b + c$;

(iii) (Compatibilidade do produto) $a \leq b$ e $c > 0$ então $ac \leq bc$.

Por satisfazer estas três listas de propriedades, $\mathbb{Q}$ diz-se um *corpo ordenado.*

A reta dos números reais

A reta dos números reais

Será que, com a correspondência entre números racionais e pontos de uma reta, cobrimos todos os pontos desta?

A reta dos números reais

Será que, com a correspondência entre números racionais e pontos de uma reta, cobrimos todos os pontos desta?
Ou, perguntando de outra forma: fixada uma unidade de comprimento, será que os números racionais permitem determinar os comprimentos de todos os segmentos de reta possíveis?

A reta dos números reais

Será que, com a correspondência entre números racionais e pontos de uma reta, cobrimos todos os pontos desta?
Ou, perguntando de outra forma: fixada uma unidade de comprimento, será que os números racionais permitem determinar os comprimentos de todos os segmentos de reta possíveis?
A resposta é não: basta considerar, por exemplo o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 (que, pelo teorema de Pitágoras, mede $\sqrt{2}$, ou seja, um número positivo cujo quadrado é 2).

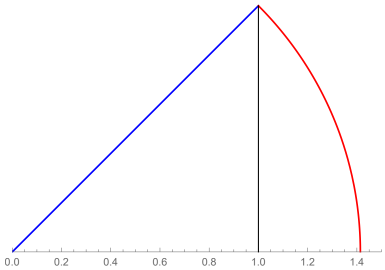

Figura: Construção geométrica do número real $\sqrt{2}$.

Proposição $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

É então necessário completar $\mathbb{Q}$, considerando o conjunto dos números reais.

É então necessário completar $\mathbb{Q}$, considerando o conjunto dos números reais.

Este pode ser definido como o conjunto de todas as dízimas (finitas, infinitas periódicas e infinitas não periódicas):

$$\mathbb{R} = \{p, a_1 a_2 a_3 ... : p \in \mathbb{Z},\ a_i \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ para todo o } i\}$$

É então necessário completar $\mathbb{Q}$, considerando o conjunto dos números reais.

Este pode ser definido como o conjunto de todas as dízimas (finitas, infinitas periódicas e infinitas não periódicas):

$$\mathbb{R} = \{p, a_1 a_2 a_3 ... : p \in \mathbb{Z},\ a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ para todo o } i\}$$

(onde, tal como para os racionais, sempre que $a_n = 9$ para todo o $n \geq \bar{n}$, estamos na verdade na presença de uma dízima finita). Como de costume, dizemos que um elemento de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é um número irracional (exemplo: $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$)

É então necessário completar $\mathbb{Q}$, considerando o conjunto dos números reais.

Este pode ser definido como o conjunto de todas as dízimas (finitas, infinitas periódicas e infinitas não periódicas):

$$\mathbb{R} = \{p, a_1 a_2 a_3 ... : p \in \mathbb{Z},\ a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ para todo o } i\}$$

(onde, tal como para os racionais, sempre que $a_n = 9$ para todo o $n \geq \bar{n}$, estamos na verdade na presença de uma dízima finita). Como de costume, dizemos que um elemento de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é um número irracional (exemplo: $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$)

$\mathbb{R}$, quando munido das operações de multiplicação, adição, e da relação $\leq$, também é um corpo ordenado.

Definição do supremo de um conjunto

Seja $S \subset \mathbb{R}$

Definição do supremo de um conjunto

Seja $S \subset \mathbb{R}$

$M \in \mathbb{R}$ é um majorante de S se e só se $x \leq M$, qualquer que seja $x \in S$.

Definição do supremo de um conjunto

Seja $S \subset \mathbb{R}$

$M \in \mathbb{R}$ é um majorante de S se e só se $x \leq M$, qualquer que seja $x \in S$.

$m \in \mathbb{R}$ é um minorante de S se e só se $x \geq m$, qualquer que seja $x \in S$.

Definição do supremo de um conjunto

Seja $S \subset \mathbb{R}$

$M \in \mathbb{R}$ é um majorante de S se e só se $x \leq M$, qualquer que seja $x \in S$.

$m \in \mathbb{R}$ é um minorante de S se e só se $x \geq m$, qualquer que seja $x \in S$.

d é mínimo de S se e só se $d \in S$ e d é minorante de S.

Definição do supremo de um conjunto

Seja $S \subset \mathbb{R}$

$M \in \mathbb{R}$ é um majorante de S se e só se $x \leq M$, qualquer que seja $x \in S$.

$m \in \mathbb{R}$ é um minorante de S se e só se $x \geq m$, qualquer que seja $x \in S$.

d é mínimo de S se e só se $d \in S$ e d é minorante de S.

c é máximo de S se e só se $c \in S$ e c é majorante de S.

Definição do supremo de um conjunto

Seja $S \subset \mathbb{R}$

$M \in \mathbb{R}$ é um majorante de S se e só se $x \leq M$, qualquer que seja $x \in S$.

$m \in \mathbb{R}$ é um minorante de S se e só se $x \geq m$, qualquer que seja $x \in S$.

d é mínimo de S se e só se $d \in S$ e d é minorante de S.

c é máximo de S se e só se $c \in S$ e c é majorante de S.

Sendo V o conjunto dos majorantes de S designa-se por supremo de S, $\sup S$, o elemento mínimo de V.

Exemplos

Os conjuntos $[1,3]$, $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$, $[1,2[\cup\{3\}$ são limitados e têm todos o mesmo conjunto de majorantes e minorantes:

Exemplos

Os conjuntos $[1,3]$, $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$, $[1,2[\cup\{3\}$ são limitados e têm todos o mesmo conjunto de majorantes e minorantes:

$$\text{Conj. Majorantes } = [3,+\infty[, \qquad \text{Conj. Minorantes } =]-\infty,1].$$

O conjunto $\mathbb{R}$ não é majorado nem minorado; $\mathbb{R}^+$ é minorado mas não é majorado. Para o conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$:

Exemplos

Os conjuntos $[1,3]$, $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$, $[1,2[\cup\{3\}$ são limitados e têm todos o mesmo conjunto de majorantes e minorantes:

$$\text{Conj. Majorantes } = [3,+\infty[, \qquad \text{Conj. Minorantes } =]-\infty,1].$$

O conjunto $\mathbb{R}$ não é majorado nem minorado; $\mathbb{R}^+$ é minorado mas não é majorado. Para o conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$:

$$\text{Conj. Majorantes } = [1,+\infty[, \qquad \text{Conj. Minorantes } =]-\infty,0].$$

Princípio do Supremo (ou da Completude)

Princípio do Supremo (ou da Completude)

Estamos agora prontos para enunciar a propriedade de completude dos reais, que corresponde algebricamente ao facto da reta ser um contínuo de pontos.

Princípio do Supremo (ou da Completude)

Estamos agora prontos para enunciar a propriedade de completude dos reais, que corresponde algebricamente ao facto da reta ser um contínuo de pontos.

Qualquer subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ majorado e não vazio tem supremo.

Segue também que qualquer conjunto minorado e não vazio tem ínfimo.

Caracterização do supremo e do infimo

1. $s = \sup A \Leftrightarrow s$ é majorante e $]s - \varepsilon, s] \cap A \neq \emptyset$, para qualquer $\varepsilon > 0$,
2. $a = \inf A \Leftrightarrow a$ é minorante e $[a, a + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$ para qualquer $\varepsilon > 0$.

Entre quaisquer dois números reais há *infinitos* números racionais e *infinitos* números irracionais.

O *módulo* ou *valor absoluto* de um número real $x \in \mathbb{R}$ é definido por

$$|x| = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0; \\ -x\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

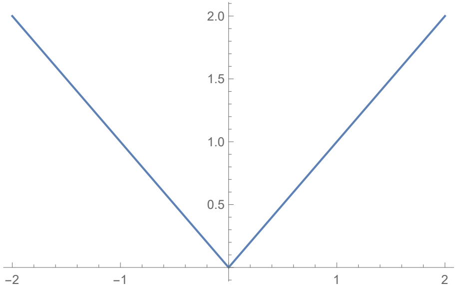

Figura: O gráfico da função $f(x) = |x|$.

Na interpretação geométrica dos números reais, $|x|$ representa a distância de x à origem da reta numérica. Assim, $|x - y|$ representa a distância de x a y.

Figura: O conjunto dos pontos cuja distância a $x = 1/4$ é menor ou igual a 1.

1. $|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2. $|-x| = |x|.$
3. $|xy| = |x||y|, \quad |x|^2 = |x^2| = x^2.$
4. $|x+y| \leq |x| + |y|.$ (desigualdade triangular)
5. $x^2 < a^2 \Leftrightarrow |x| < |a|.$

Método de Indução Matemática. Seja $P(n)$ uma proposição para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que:

(a) $P(1)$ é verdadeira; e

(b) sempre que $P(n)$ é verdadeira para *algum* n, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Então conclui-se que $P(n)$ é verdade para *todo* o $n \in \mathbb{N}$.