Probabilidade e Estatística

LEAN/LEM/LEAmb/LEGM LEIC-A LEIC-T LERC-LEE LEAer
LEBiol LEBiom LEEC LEMec LEQ

2º Semestre – 2021/2022
22/07/2022
18:00-20:00

Duração: **120** minutos **Exame Época Recurso - (c)**

Justifique convenientemente todas as respostas

Pergunta 1 2 valores

Uma empresa de engenharia possui um lote contendo componentes electrónicas de um dado tipo produzidas pelos fabricantes 1, 2 e 3 nas proporções de 50%, 30% e 20%, respetivamente. A probabilidade de uma componente desse tipo apresentar defeitos é: 2% para componentes produzidas pelo fabricante 1; 3% para componentes produzidas pelo fabricante 2; e 5% para componentes produzidas pelo fabricante 3.

Tendo sido retirada ao acaso uma componente do lote e observado que a mesma apresenta defeitos, calcule a probabilidade de essa componente ter sido produzida pelo fabricante 3.

- **Acontecimentos e probabilidades para uma componente escolhida ao acaso**

Acontecimento	Probabilidade
A_1 = "a componente foi produzida pelo fabricante 1"	$P(A_1) = 0.5$
A_2 = "a componente foi produzida pelo fabricante 2"	$P(A_2) = 0.3$
A_3 = "a componente foi produzida pelo fabricante 3"	$P(A_3) = 0.2$
D = "a componente apresenta defeitos"	$P(D) = \,?$
	$P(D \mid A_1) = 0.02$
	$P(D \mid A_2) = 0.03$
	$P(D \mid A_3) = 0.05$

- **Cálculo da probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(A_3 \mid D) &= \frac{P(A_3) \times P(D \mid A_3)}{P(A_1) \times P(D \mid A_1) + P(A_2) \times P(D \mid A_2) + P(A_3) \times P(D \mid A_3)} \quad \text{(teorema de Bayes)} \\ &= \frac{0.2 \times 0.05}{0.5 \times 0.02 + 0.3 \times 0.03 + 0.2 \times 0.05} \\ &= \frac{10}{29} \approx 0.3448. \end{aligned}$$

Pergunta 2 2 valores

Admita que o número de choques até ocorrer fratura segue uma variável aleatória X com distribuição geométrica. A probabilidade de ocorrer a fratura logo ao primeiro choque é de 0.1.

(a) Obtenha a função de distribuição da variável aleatória X.

- **V.a. de interesse**
  X = “número de choques até ocorrer fractura".
- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(X \le x) &= \sum_{i=1}^{[x]} 0.1 \times 0.9^{i-1} \\ &= 1 - 0.9^{[x]}, x \ge 1. \end{aligned}$$

- **Função de distribuição**

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - 0.9^k, & k \le x < k+1, \, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(b) Qual a probabilidade de serem necessários mais de 4 choques para a fratura, condicional a serem necessários mais do que 2 choques para fratura?

- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(X > 4|X > 2) &= \frac{0.9^4}{0.9^2} \\ &= 0.9^2 \\ &= 0.81. \end{aligned}$$

Pergunta 3	2 valores

Considere que a variável aleatória X representa o peso (em decagramas) de um determinado artigo, possuindo função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} x-3, & 3 \le x \le 4, \\ 5-x, & 4 < x \le 5, \\ 0, & \text{outros casos.} \end{cases}$$

Sabe-se que os artigos são classificados segundo o seu peso em 2 categorias: leves ($x \le 4.75$) e pesados ($x > 4.75$). O preço de produção de cada artigo é 80 cêntimos. Os artigos leves são vendidos por 2 euros cada, enquanto os artigos pesados são vendidos por 1.50 euros cada após uma intervenção reparadora com custo unitário de 20 cêntimos. Qual o lucro esperado por artigo? E a variância do lucro?

- **V.a. de interesse**

  X = “Peso de um artigo"

  L = “Lucro por artigo"

- **Variável aleatória L**
  A variável aleatória L pode assumir os valores:

$$\begin{aligned} l &= 2 - 0.8 = 1.2, \text{ se o artigo é classificado como leve} \\ l &= 1.5 - (0.8 + 0.2) = 0.5, \text{ se o artigo é classificado como pesado} \end{aligned}$$

  A função densidade de probabilidade de L é:

$$f_L(l) = \begin{cases} P(X \leq 4.75), & l = 1.2, \\ P(X > 4.75), & l = 0.5, \\ 0, & \text{outros casos,} \end{cases}$$

  com

$$P(X \leq 4.75) = \int_3^4 x - 3\,dx + \int_4^{4.75} 5 - x\,dx = 0.5 + 0.46875 = 0.96875$$

  e

$$P(X > 4.75) = 1 - P(X \leq 4.75) = 0.03125.$$

- **Cálculo do lucro esperado e da variância**

$$\begin{aligned} E(L) &= \sum_l l \times f_L(l) \\ &= 1.1781. \end{aligned}$$

- **Cálculo da variância**

$$\begin{aligned} V(L) &= E(L^2) - E^2(L) \\ &= \sum_l l^2 \times f_L(l) - 1.1781^2 \\ &= 1.4028 - 1.1781^2 \\ &= 0.0148. \end{aligned}$$

Pergunta 4 2 valores

Os instantes de falha (em milhares de horas) de uma componente eletrónica, X, e da respetiva componente de substituição, Y, constituem um par aleatório com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}.$$

Determine, para um número positivo y fixo, $E(X \mid Y = y)$ e $V(X \mid Y = y)$.

- Para um número positivo y, a função função densidade de probabilidade marginal de Y é:

$$f_Y(y) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^y e^{-y}\,\mathrm{d}x = y\,e^{-y}.$$

Em virtude disso, a função densidade de probabilidade condicional de X dado $Y = y$ vem dada por:

$$f_{X|Y=y}(x) \quad = \quad \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{y\,e^{-y}} & 0 < x < y \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{y} & 0 < x < y \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}.$$

- Conclui-se assim que $(X \mid Y = y) \sim \text{Unif}(0, y)$ e, recorrendo ao formulário, obtém-se:

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \frac{0+y}{2} = \frac{y}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Var}(X \mid Y = y) = \frac{(y-0)^2}{12} = \frac{y^2}{12}.$$

Pergunta 5	2 valores

Suponha que X e Y são duas variáveis aleatórias que representam o comprimento e a largura de um retângulo de chapa cortado manualmente. Considere que $\ln(X)$ e $\ln(Y)$ são variáveis aleatórias independentes e têm distribuição normal de valor esperado 1 cm e 0.5 cm, respetivamente, ambas com variância igual a 0.1 cm^2. Calcule a probabilidade de a área do retângulo ser superior a 5 cm^2.

- **V.a. de interesse e distribuição**
  $\ln(X) \sim \text{normal}(1, 0.1)$ e $\ln(Y) \sim \text{normal}(0.5, 0.1)$ variáveis aleatórias independentes.

  Seja Z a área o retângulo em cm^2, então $Z = XY$.

- **Probabilidade pedida**

$$P(XY > 5) \quad = \quad 1 - P(\ln(X) + \ln(Y) < \ln 5)$$

Uma vez que $\ln X$ e $\ln Y$ são va independentes então $\ln X + \ln Y \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$ onde

$$\begin{aligned} \mu &= \mathrm{E}(\ln X + \ln Y) \\ &= \mathrm{E}(\ln X) + \mathrm{E}(\ln Y) \\ &= 1 + 0.5 \\ &= 1.5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathrm{Var}(\ln X + \ln Y) \\ &= \mathrm{Var}(\ln X) + \mathrm{Var}(\ln Y) \\ &= 0.1 + 0.1 = 0.2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(XY > 5) &= 1 - P(\ln(X) + \ln(Y) < \ln 5) \\ &= 1 - P\left(\frac{\ln(X) + \ln(Y) - 1.5}{\sqrt{0.2}} < \frac{\ln(5) - 1.5}{\sqrt{0.2}}\right) \\ &\simeq 1 - \Phi(0.24) \\ &\simeq 1 - 0.5948 \\ &= 0.4052. \end{aligned}$$

Pergunta 6	2 valores

Admita que X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f_X(x;\theta) = \begin{cases} 2\sqrt{\theta}e^{-2x\sqrt{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}$$

com $\theta > 0$ desconhecido. A concretização de uma amostra aleatória de dimensão 3 proveniente de X, conduziu a $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.2$, $x_3 = 1.9$. Obtenha a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro θ.

- Seja $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ uma amostra aleatória de dimensão 3 proveniente da população X.
- **Obtenção do estimador da máxima verosimilhança de** θ
  Passo 1 - Função de verosimilhança

$$\begin{aligned} L(\theta|\underline{x}) &= f_{\underline{X}}(\underline{x}) \\ &\overset{X_i\ indep}{=} \prod_{i=1}^{3} f_{X_i}(x_i) \\ &\overset{X_i \sim X}{=} \prod_{i=1}^{3} f_X(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{3} 2\sqrt{\theta}e^{-2x_i\sqrt{\theta}} \\ &= 2^3\theta^{3/2}e^{-2\sqrt{\theta}\sum_{i=1}^{3}x_i}. \end{aligned}$$

Passo 2 - Função de log-verosimilhança

$$\ln L(\theta|\underline{x}) = 3\ln 2 + \frac{3}{2}\ln\theta - 2\sqrt{\theta}\sum_{i=1}^{3} x_i$$

Passo 3 - Maximização

A estimativa de MV de θ é doravante representada por $\hat{\theta}$ e

$$\hat{\theta} : \begin{cases} \left.\frac{d\ln L(\theta|\underline{x})}{d\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 & \text{(ponto de estacionariedade)} \\ \left.\frac{d^2\ln L(\theta|\underline{x})}{d\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0 & \text{(ponto de máximo)} \end{cases}$$

$$\frac{d\ln L(\theta|\underline{x})}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2\theta} - \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{\sqrt{\theta}} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{\sqrt{\theta}} \Rightarrow \hat{\theta} = \left(\frac{3}{2\sum_{i=1}^{3} x_i}\right)^2$$

$$\left.\frac{d^2\ln L(\theta|\underline{x})}{d\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = -24.84 < 0, \ \text{(proposição verdadeira)}$$

Passo 4 - Estimativa de MV de θ.

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \left(\frac{3}{2 * 3.6}\right)^2 \\ &= 0.1736. \end{aligned}$$

Pergunta 7	2 valores

Num estudo sobre a incidência de uma doença que afeta animais em explorações pecuárias foi recolhida uma amostra de tamanho 50 em que se observaram 6 animais infetados. Determine um intervalo de confiança para a proporção de animais infetados na população a um nível de confiança de 94%.

- **Seleção da variável aleatória fulcral para** p

$$Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \overset{a}{\sim} \text{normal}(0,1)$$

- **Obtenção dos quantis de probabilidade**

$$a_\alpha = \Phi^{-1}(0.03) = -1.8808;$$
$$b_\alpha = \Phi^{-1}(0.97) = 1.8808.$$

- **Inversão da desigualdade** $a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha$

$$\begin{aligned} P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) &= 1-\alpha \\ &\Leftrightarrow \\ P\left(-1.8808 \leq \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \leq 1.8808\right) &\approx 0.94 \\ &\Leftrightarrow \\ P\left(\bar{X} - 1.8808\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \leq p \leq \bar{X} + 1.8808\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right) &\approx 0.94 \end{aligned}$$

- **Concretização**

$$\begin{aligned} IC_{94\%}(p) &= \left[\bar{x} - 1.8808\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + 1.8808\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right] \\ &= \left[0.12 - 1.8808\sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{50}}, 0.12 + 1.8808\sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{50}}\right] \\ &= [0.0336, 0.2064]\,. \end{aligned}$$

Pergunta 8	2 valores

Pretende-se introduzir um novo processo na produção de um certo tipo de esferas para uso industrial. Espera-se que este novo processo mantenha a pressão média, a qual é presentemente igual a 5 Ba. Como a introdução completa do novo processo acarreta custos, resolveu-se proceder a um teste, para o qual foram obtidas 40 esferas produzidas de acordo com o novo método. Para esta amostra registou-se uma pressão média amostral igual a 5.6 Ba, e uma variância amostral igual a 6.8. Será que estes dados evidenciam que o novo método não altera a pressão?

- **V.a. de interesse**

  X= “pressão de um tipo de esferas".

- **Situação**

  X variável aleatória com distribuição arbitrária, de média e desvio padrão desconhecidos.

- **Hipóteses**

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 5$$
$$H_1 : \mu = \mu_0 \neq 5$$

- **Estatística de teste**

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim_a \text{normal}(0,1).$$

- **Região de rejeição de H_0 (para valores da estatística de teste** O teste é bilateral, logo a região de rejeição de H_0 é do tipo $W = (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$.

- **Decisão (com base no valor-p**

  Atendendo a que o valor observado da estatística de teste e do valor-p são iguais a:

$$t = \frac{5.6 - 5}{\sqrt{6.8/40}} = 1.45521$$
$$valor - p \approx 2(1 - \Phi(1.46)) = 2(1 - 0.9279) = 0.1442,$$

  pelo que não podemos rejeitar que a pressão média é igual a 5 Ba, para os níveis usuais de significância.

Pergunta 9 2 valores

A observação de radiação de neutrinos que vêm do espaço sideral foi efetuada durante um período de 1500 horas, tendo sido registada a seguinte informação relativa ao número de sinais recebidos por hora:

Número de sinais recebidos por hora	0	1	2	≥ 3
Frequência absoluta	1120	325	47	8

Aplicando um teste apropriado, teste a hipótese de que o número de sinais recebidos por hora segue uma distribuição de Poisson de parâmetro 0.3.

- **Variável aleatória de interesse**

  X = número de sinais recebidos por hora

- **Hipóteses**

  $H_0 : X \sim \text{Poisson}(0.3)$

  $H_1 : X \not\sim \text{Poisson}(0.3)$

- **Estatística de teste**

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim}_{H_0} \chi^2_{(k-1)},$$

onde:

k = Número de classes = 4

O_i = Frequência absoluta observável da classe i

E_i = Frequência absoluta esperada, sob H_0, da classe i

- **Cálculo das frequências absolutas esperadas sob H_0**

Para já, note-se que o conjunto de valores possíveis da distribuição poisson(0.3) é $\mathbb{N}_0$. Assim, as classes a considerar são $C_1 = \{0\}$, $C_2 = \{1\}$, $C_3 = \{2\}$, e $C_4 = \{3,4,5,\ldots\}$, como sugere a tabela de frequências do enunciado. Se, para além disso, atendermos a que função de distribuição de X, sob H_0, está tabelada, as frequências absolutas esperadas sob H_0 são iguais a:

$$\begin{aligned}
E_i &= n \times p_i^0 \\
&= n \times P(X \in C_i \mid H_0) \\
&= n \times P[X \in C_i \mid X \sim \text{poisson}(0.3)] \\
&= n \times \begin{cases} P(X = 0 \mid X \sim \text{poisson}(0.3)), & i = 1 \\ P(X = 1 \mid X \sim \text{poisson}(0.3)), & i = 2 \\ P(X = 2 \mid X \sim \text{poisson}(0.3)), & i = 3 \\ P(X \geq 3 \mid X \sim \text{poisson}(0.3)), & i = 4 \end{cases} \\
&= 1500 \times \begin{cases} F_{\text{poisson}(0.3)}(0) \overset{tabela}{=} 0.7408, & i = 1 \\ F_{\text{poisson}(0.3)}(1) - F_{\text{poisson}(0.3)}(0) \overset{tabela}{=} 0.9631 - 0.7408 = 0.2223, & i = 2 \\ F_{\text{poisson}(0.3)}(2) - F_{\text{poisson}(0.3)}(1) \overset{tabela}{=} 0.9964 - 0.9631 = 0.0333, & i = 3 \\ 1 - F_{\text{poisson}(0.3)}(2) \overset{tabela}{=} 1 - 0.9964 = 0.0036, & i = 4 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1111.2, & i = 1 \\ 333.45, & i = 2 \\ 49.95, & i = 3 \\ 5.4, & i = 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

- No cálculo do valor observado da estatística de teste convém recorrer à seguinte tabela auxiliar:

i	Classe i	Freq. abs. obs. o_i	Freq. abs. esper. sob H_0 $E_i = n \times p_i^0$	Parcelas valor obs. estat. teste $\frac{(o_i - E_i)^2}{E_i}$
1	$\{0\}$	1120	1111.2	$\frac{(1120-1111.2)^2}{1111.2} \simeq 0.069690$
2	$\{1\}$	325	333.45	$\frac{(325-333.45)^2}{333.45} \simeq 0.214133$
3	$\{2\}$	47	49.95	$\frac{(47-49.95)^2}{49.95} \simeq 0.174224$
4	$\{3,4,\ldots\}$	8	5.4	$\frac{(8-5.4)^2}{5.4} \simeq 1.251852$
		$\sum_{i=1}^{k} o_i = n = 1500$	$\sum_{i=1}^{k} E_i = n = 1500$	$t = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - E_i)^2}{E_i} \simeq 1.709899$

- **Cálculo do valor-p do teste e tomada de decisão**

Usando as tabelas estatísticas concluir-se-ia que $0.3 \approx F_{\chi^2_{(3)}}(1.424) < F_{\chi^2_{(3)}}(1.709899) < F_{\chi^2_{(3)}}(1.869) \approx 0.4$ e logo que $0.6 <$ valor-p < 0.7; assim não devemos rejeitar H_0 para qualquer nível de significância inferior ou igual 60%, e logo não devemos rejeitar H_0 para qualquer um dos níveis de significância usuais de 1%, 5% ou 10%]

Pergunta 10	2 valores

Dados relativos à concentração (percentagem) de madeira dura (x) em 20 amostras de polpa de papel usadas na manufactura de caixas de cartão e a respetiva resistência à tração do cartão daí resultante (Y) conduziram às seguintes estatísticas:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 40.0, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 89.04, \quad \sum_{i=1}^{20} y_i = 2\,480.0, \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 312\,567.38, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i\, y_i = 5\,128.71.$$

Admita que as variáveis x e Y estão relacionadas de acordo com o modelo de regressão linear simples: $Y = \beta_0 + \beta_1\, x + \varepsilon$. Após ter enunciado as hipóteses de trabalho que entender convenientes, obtenha um intervalo de confiança a 90% para β_1, tirando partido dos resultados acima.

- **Modelo de RLS**

  Y = resistência à tração de cartão de caixas (variável aleatória resposta)

  x = concentração de madeira dura em amostra de polpa de papel usada na manufactura de caixas de cartão (variável explicativa)

  $Y_i = \beta_0 + \beta_1\, x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$

- **Hipóteses de trabalho**

  $\varepsilon_i \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{N}(0, \sigma^2), \quad i = 1, \ldots, n$

- **Estimativas de MV de β_0 e β_1; estimativa de σ^2**

  Importa notar que

  - $n = 20$
  - $\sum_{i=1}^{n} x_i = 40.0$

    $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{40.0}{20} = 2.0$

    $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 89.04$

    $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\bar{x}^2 = 89.04 - 20 \times 2.0^2 = 9.04$
  - $\sum_{i=1}^{n} y_i = 2480.0$

    $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{2480}{20} = 124.0$

    $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 312\,567.38$

    $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\,\bar{y}^2 = 312\,567.38 - 20 \times 124.0^2 = 5\,047.38$
  - $\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = 5\,128.71$

    $\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y} = 5\,128.71 - 20 \times 2.0 \times 124.0 = 168.71$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2} \\
&\simeq \frac{168.71}{9.04} \\
&\simeq 18.662611
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\
&\simeq 124.0 - 18.662611 \times 2.0 \\
&\simeq 86.674778
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-2}\left[\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\,\bar{y}^2\right) - \left(\hat{\beta}_1\right)^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2\right)\right] \\
&\simeq \frac{1}{20-2}(5\,047.38 - 18.662611^2 \times 9.04) \\
&\simeq 105.489491.
\end{aligned}
$$

- **Obtenção do IC para β_1**

Passo 1 — Selecção da variável aleatória fulcral

$$
Z = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2}}} \sim t_{(n-2)}
$$

Passo 2 — Obtenção dos quantis de probabilidade

$$
\begin{cases}
a_\alpha = F_{t_{(n-2)}}(\alpha/2) = -F_{t_{(20-2)}}(1-0.1/2) = -F_{t_{(18)}}(0.95) \overset{tabelas,calc.}{=} -1.734 \\
b_\alpha = F_{t_{(20-2)}}(1-\alpha/2) = F_{t_{(20-2)}}(1-0.1/2) = F_{t_{(18)}}(0.95) \overset{tabelas,calc.}{=} 1.734
\end{cases}
$$

Passo 3 — Inversão da desigualdade $a_\alpha \le T \le b_\alpha$

$$P(a_\alpha \le Z \le b_\alpha) = 1-\alpha$$

$$P\left[a_\alpha \le \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2}}} \le b_\alpha\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\hat{\beta}_1 - b_\alpha \times \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2}} \le \beta_1 \le \hat{\beta}_1 - a_\alpha \times \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2}}\right] = 1-\alpha$$

Passo 4 — Concretização

Tendo em conta a expressão geral do IC para β_1,

$$
IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\beta_1) = \left[\hat{\beta}_1 \pm F^{-1}_{t_{(n-2)}}(1-\alpha/2) \times \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2}}\right],
$$

e em virtude dos resultados anteriores, o IC pretendido é:

$$
\begin{aligned}
IC_{90\%}(\beta_1) &\simeq \left[18.662611 \pm 1.734 \times \sqrt{\frac{105.489491}{9.04}}\right] \\
&\simeq [18.662611 \pm 1.734 \times 3.416020] \\
&\simeq [12.799232, 24.585990].
\end{aligned}
$$