



Sinais e Sistemas Mecatrónicos

LEMec21 LEAN

Professor responsável: Carlos Carneira

2º Semestre 2021/2022, 4º período

2022/julho/04, 10h30 – 12h30

- Responda às questões no próprio enunciado e nos locais corretos, tanto para as questões de escolha múltipla como para as questões de desenvolvimento. O espaço disponibilizado é suficiente para conter as respostas. Se mesmo assim não couber, pode esse espaço ser estendido pelo aluno colocando sempre uma moldura retangular em torno do espaço acrescentado. O verso das folhas ou outros espaços livres podem ser usados como rascunho e não são corrigidos.
- Identifique todas as folhas, com o seu número e com o seu primeiro e último nome. De preferência, faça-o no início da prova.
- **Não desagrafe o enunciado.**
- O incumprimento de cada uma das regras anteriores resulta numa penalização de 0,5 valores na sua nota.
- Nas questões de escolha múltipla assinale apenas uma resposta correta.
- O exame decorre sem consulta, excetuando-se a consulta de um máximo de seis páginas A4 (três folhas, frente e verso) trazidas pelo aluno. Pode usar até 10 folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de calculadoras programáveis (em caso de necessidade, o corpo docente reserva-se o direito de fazer *reset* à memória das calculadoras dos alunos). Em caso algum é permitido o uso de calculadoras com qualquer capacidade gráfica.
- As questões de escolha múltipla são respondidas numa tabela única no fim do grupo. As respostas assinaladas nas próprias perguntas não são avaliadas. Responda às questões de escolha múltipla colocando uma circunferência em torno da resposta correta na tabela existente no final do grupo I. Caso queira emendar uma resposta, risque completamente o círculo e coloque nova circunferência à volta da opção que considera correta. Nos exemplos abaixo, na questão 1 é considerada a resposta A, na questão 2 é considerada a resposta D, na questão 3 é considerada a resposta E uma vez que o aluno se enganou quando assinalou a resposta B. A resposta à questão 4 é válida, embora tenha cotação zero porque não foi respondida. A questão 5 tem cotação -0.5 porque viola as regras. Na questão 6 é considerada a resposta E uma vez que o aluno se enganou três vezes e voltou à resposta E. Esta tabela constitui um mero exemplo de validação das respostas, não tendo nada que ver com o facto de as respostas estarem corretas ou não.

Questão	Resposta A	Resposta B	Resposta C	Resposta D	Resposta E	
1	<input checked="" type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> E	✓Válido
2	<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input checked="" type="radio"/> D	<input type="radio"/> E	✓Válido
3	<input type="radio"/> A	<input checked="" type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input checked="" type="radio"/> E	✓Válido
4	<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> E	✓Válido
5	<input type="radio"/> A	<input checked="" type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input checked="" type="radio"/> D	<input type="radio"/> E	✗Inválido
6	<input checked="" type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input checked="" type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input checked="" type="radio"/> E	✓Válido
...						

- Justifique todas as questões, exceto as de escolha múltipla.
- O docente que vigia a prova só deve ser chamado em questões de interpretação, ambiguidade ou aparente gralha que poderão dar lugar a comunicações com o necessário esclarecimento em todas as salas de exame.
- Questões como *Prof., isso que eu fiz está bem ? Prof., acha que esta explicação chega ou devo justificar melhor ? Prof., Eu risquei aqui mas continuei além, pode ficar assim ?*, não devem ser colocadas. O aluno deve escrever o que for necessário para que o docente que for corrigir não se perca nas respostas do exame.

Grupo I (10 perguntas)

Cada pergunta tem a cotação de 1 valor. Cada resposta errada desconta 0,2 valores. A cotação mínima do grupo é de 0 valores.

Salvo indicações em contrário, considere condições iniciais nulas.

As respostas são assinaladas na tabela que encerra este grupo. As respostas assinaladas nas próprias perguntas não são avaliadas.

1. A função de transferência $X(s)/F(s)$ de um sistema mecânico modelado pela equação diferencial

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F(t) - Kx(t) - B \frac{dx}{dt}$$

- A Tem dois pólos e um zero.
- B Tem dois zeros e um pólo.
- C Tem dois pólos e nenhum zero.
- D Tem dois zeros e nenhum pólo.
- E Nenhuma das anteriores

2. Considere

$$G(s) = \frac{11}{(s+9)(s+1)}$$

A resposta de $G(s)$ ao impulso $\delta(t)$ é dada por:

- A $-\frac{11}{8}e^{-9t} + \frac{11}{8}e^{-t}, t > 0$
- B $\frac{11}{8}e^{-9t} - \frac{11}{8}e^{-t}, t > 0$
- C $\frac{8}{11}e^{-9t} - \frac{8}{11}e^{-t}, t > 0$
- D $-\frac{8}{11}e^{-9t} + \frac{8}{11}e^{-t}, t > 0$
- E Nenhuma das anteriores

3. A linearização do modelo de um sistema não linear, em torno de um ponto, permite:

- A Substituir o sistema em toda a gama de valores.
- B Usar técnicas lineares, apenas válidas longe do ponto escolhido para a linearização.
- C Tornar o sistema não LTI.
- D Usar técnicas lineares, apenas válidas em torno do ponto escolhido para a linearização.
- E Nenhuma das anteriores

4. Considere

$$G(s) = \frac{12}{(s+5)(s+15)}$$

O sistema modelado por $G(s)$:

- A Não é instável porque não tem pólos com parte real positiva.
- B É instável porque tem pólos com parte real positiva.
- C É estável porque tem pólos com parte real positiva.
- D É instável porque não tem pólos com parte real positiva.
- E Nenhuma das anteriores

5. Considere

$$G(s) = \frac{14}{(s+10)(s+20)}$$

A resposta no tempo de $G(s)$ ao degrau unitário quando $t \rightarrow \infty$:

- A Apresenta um sobre-impulso.
- B É sobre-amortecida.
- C É sub-amortecida.
- D Tende para infinito.
- E Nenhuma das anteriores

6. Considere

$$G(s) = \frac{23}{(s+5)(s+10)}$$

A curva de amplitude da resposta em frequência de $G(s)$ quando $\omega \rightarrow \infty$:

- A É sempre crescente.
- B Cai assintoticamente a 20dB/década.
- C Cai assintoticamente a 40dB/década.
- D Cai assintoticamente a 60dB/década.
- E Nenhuma das anteriores

7. Considere

$$G(s) = \frac{11}{(s+9)(s+1)}$$

A resposta de $G(s)$ ao degrau unitário:

- A Tende para zero.
- B Tende para infinito.
- C Tende para 11/9
- D Tende para 9/11.
- E Nenhuma das anteriores

8. Considere

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

Quando usado como filtro, a frequência de corte de $G(s)$ é :

- A $\sqrt{2}$ rad/s.
- B $\sqrt{2}$ Hz.
- C 2 rad/s.
- D 2 Hz.
- E Nenhuma das anteriores

9. O critério de Routh-Hurwitz permite:

- A Calcular os pólos de um sistema LTI.
- B Saber se um sistema é instável, sem ter de se calcular o valor dos pólos.
- C Calcular os zeros de um sistema LTI.
- D Calcular a diferença entre zeros e pólos de um sistema LTI.
- E Nenhuma das anteriores

10. Pretende-se ligar um sensor cuja saída V_S varia entre -10V e 10V a um ADC cuja entrada V_{ADC} pode variar entre 0V e 5V. A função a implementar para o condicionamento de sinal é:

- A $V_{ADC} = \frac{V_S}{4} + 2.5$
- B $V_{ADC} = \frac{V_S}{2} + 5$
- C $V_{ADC} = 2V_S - 5$
- D $V_{ADC} = \frac{V_S}{4} - 2.5$
- E Nenhuma das anteriores

Tabela de respostas às questões de escolha múltipla

Questão	Resposta A	Resposta B	Resposta C	Resposta D	Resposta E
1	A	B	<input checked="" type="radio"/> C	D	E
2	<input checked="" type="radio"/> A	B	C	D	E
3	A	B	C	<input checked="" type="radio"/> D	E
4	<input checked="" type="radio"/> A	B	C	D	E
5	A	<input checked="" type="radio"/> B	C	D	E
6	A	B	<input checked="" type="radio"/> C	D	E
7	A	B	<input checked="" type="radio"/> C	D	E
8	<input checked="" type="radio"/> A	B	C	D	E
9	A	<input checked="" type="radio"/> B	C	D	E
10	<input checked="" type="radio"/> A	B	C	D	E

Nota: Na questão 4 a resposta A é correta segundo o seguinte argumento: O sistema não é instável porque não tem polos com parte real positiva. De facto, se tivesse polos com parte real positiva era instável. Não tendo polos sem parte real positiva, ou é estável ou marginalmente estável, mas instável não é.

A questão E foi considerada correta segundo o seguinte argumento: O sistema não é instável porque não tem polos com parte real positiva. De facto, se tivesse polos com parte real positiva era instável. Mas se tiver mais de dois polos sobre o eixo imaginário ele pode instabilizar. Claro que o sistema não tem polos sobre o eixo imaginário como se pode ver pela sua função de transferência, mas a opção A não considera essa opção pelo que não está correta.

Desta forma, foram consideradas corretas as opções A e E. Esta pergunta, com esta formulação, não voltará a ser repetida.

Grupo II (5 perguntas)

Cada pergunta tem a cotação de 2 valores.

As respostas são colocadas no enunciado, nos espaços assinalados, Faça 1º no rascunho e depois passe a resposta para o enunciado de forma a organizar o espaço disponível da melhor forma

Considere o sistema apresentado na Figura .

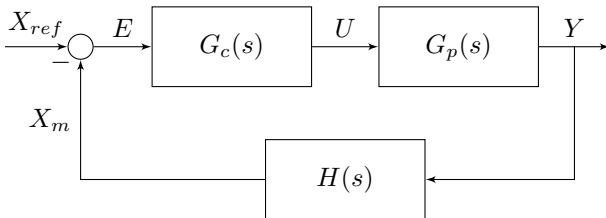


Figura 1: Diagrama de blocos

1. Considere que $u(t)$ e $e(t)$ estão relacionados pela equação diferencial abaixo e calcule $G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + u(t) = \frac{\partial e}{\partial t} + e(t)$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + u(t) = \frac{de}{dt} + e(t)$$

↓ TL

$$s^2 U(s) + s U(s) + U(s) = s E(s) + E(s)$$

$$(s^2 + s + 1) U(s) = (s + 1) E(s)$$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + s + 1}$$

2. Considere

$$G_p(s) = \frac{50}{s^2 + 6s + 25}$$

Esboce a resposta no tempo de $G_p(s)$ ao degrau unitário, calculando o instante em que a saída atinge 95% do valor final, o valor do máximo do sobre-impulso e instante em que ocorre (caso exista).

$$G_A(s) = \frac{50}{s^2 + 6s + 25}$$

$$G_A(s) = k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

2ª ORDEM s/ ZEROS
 $\omega_n^2 = 25 \quad \omega_n = 5 \quad k = 2$
 $2\zeta\omega_n = 6 \quad 2\zeta = \frac{6}{5}$
 $\zeta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad (\zeta < 1) \rightarrow$

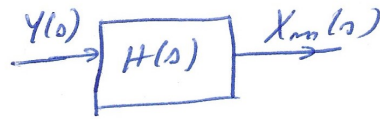
SUB AMORTECIDO
 VAI OSCILAR
 TEM SOBREIMPULSO

$t_{95\%} = t_{0,5\%} = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 1$
 $M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.0948$
 $1 + M_p = 1.0948$
 $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{5\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = 0.78$
 $y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1/s}{s^2 + 6s + 25} \cdot \frac{50}{s} = 2$

Critério de correção: Expressão do sistema genérico de 2ª ordem sem zeros - 10%, Cálculo de ω_n - 10%, Cálculo de ζ - 10%, Cálculo de M_p - 10%, Cálculo de t_p - 10%, Cálculo de $t_{95\%}$ - 5%, Cálculo de y_{ss} - 5%, Curva de resposta, - 40%

Nota: A derivada na origem deve ser zero. Pode ver-se que não existiriam muitas oscilações um vez que t_p está muito perto de $t_{95\%}$.

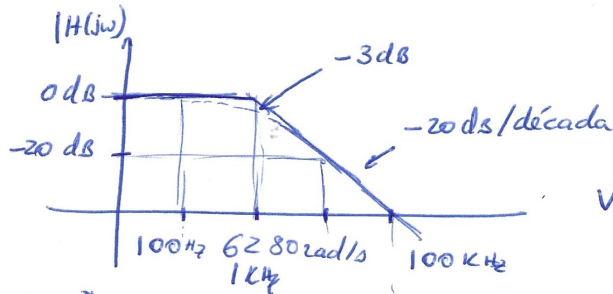
3. O bloco $H(s)$ lê o sinal do sensor da saída do processo Y e envia-o para o bloco soma a fim de ser comparado com a referência X_{ref} . No entanto, existe uma fonte de ruído na frequência $10kHz$. Sabe-se que o sinal Y não tem frequências superiores a $100Hz$. Qual a função de transferência $H(s) = \frac{X_m(s)}{Y(s)}$ de forma a constituir um filtro de 1ª ordem centrado na frequência intermédia à escala logarítmica, de forma a ter um ganho perto de 1 nas frequências até $100Hz$ e atenuar pelo menos $20dB$ as frequências superiores a $10kHz$? Esboce o respetivo diagrama de Bode, evidenciando as assíntotas.



$$f_c = 1 \text{ kHz}$$

$$\omega_c = 2\pi f_c = 6280 \text{ rad/s}$$

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} = \frac{6280}{s + 6280}$$

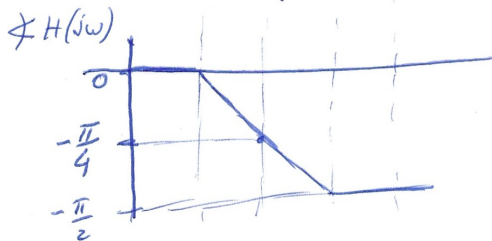


VERIFICAÇÃO:

$$|H(j6280)| = \frac{6280}{\sqrt{6280^2 + 6280^2}}$$

$$= 0.995 = -0.04 \text{ dB}$$

O SINAL DE 100 Hz PASSA QUASE INALTERADO.



$$|H(j62800)| = \frac{6280}{\sqrt{62800^2 + 6280^2}} = 0.0995 = -20.04 \text{ dB}$$

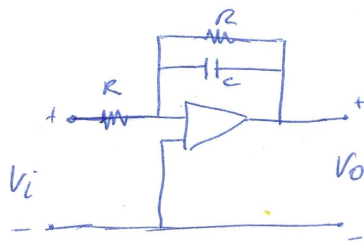
O SINAL DE 10 K SOFRE UMA ATENUAÇÃO ACIMA DE 20 dB

Critério de correção: Valor de f_c - 15%, Cálculo de ω_c - 15%, Diagrama de Amplitude - 40%, Diagrama de fase - 30%.

4. Considere

$$H(s) = \frac{6000}{s + 6000}$$

Desenhe um circuito com *ampops* que implemente o filtro indicado.



$$V_o = - \frac{1}{1 + RCs} V_i$$

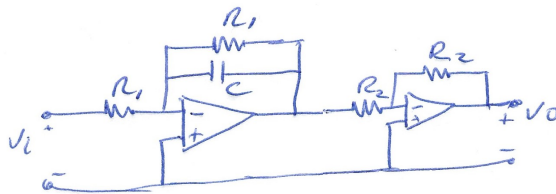
$$H(s) = \frac{6000}{s + 6000}$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{6000}s}$$

$$\frac{1}{6000} = RC$$

SEJA $C = 10 \mu\text{F}$

$$R = \frac{1}{6000 \times 10 \times 10^{-6}} = 16.6 \text{ k}\Omega \approx 17 \text{ k}\Omega$$



$R_1 = 17 \text{ k}\Omega$ $C = 10 \mu\text{F}$

$R_2 = \text{INDIFERENTE, POR EXEMPLO } 10 \text{ k}\Omega$

Critério de correção: Expressão de V_o/V_i - 10%, Cálculo de R e C - 20%, Circuito sem inversor - 40%, Circuito completo com inversor - 20%. Valores de R_2 - 10%

Nota: Uma resposta alternativa, consistiu num filtro RC, passa baixo passivo seguido de um circuito seguidor de tensão. Como o enunciado referia apenas um circuito com *ampops* e não um filtro ativo, esta resposta foi considerada correta.

5. Considere

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 11s + 10}$$

Mostre que esta função de transferência pode modelar o sistema da figura 2 assumindo

$$G_p(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$$

Quais os valores e unidades de M , K e B ?

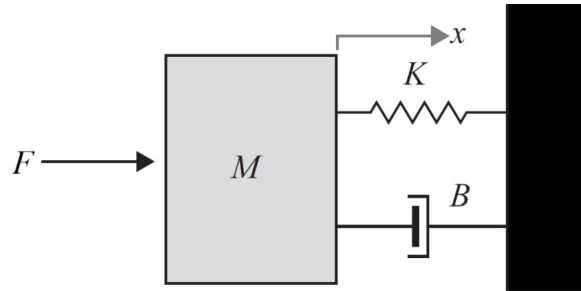
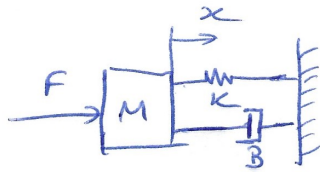


Figura 2: Sistema Massa-Mola-Amortecedor



ASSUMO QUE NÃO HÁ FORÇAS DE GRAVIDADE.

$$F_k(t) = -kx(t) \quad F_B(t) = -B\dot{x}(t)$$

$$F(t) - kx(t) - B\dot{x}(t) = M\ddot{x}(t)$$

↓ TL

$$F(s) - kx(s) - Bs x(s) = Ms^2 x(s)$$

$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + k}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 11s + 10}$$

$$M = 1 \text{ kg} \quad B = 11 \text{ Ns/m} \quad k = 10 \text{ N/m}$$

Critério de correção: Equação diferencial do sistema - 40%, Função de Transferência - 15%, Cálculo de M - 10%, Unidades de M - 5%, Cálculo de B - 10%, Unidades de B - 5%, Cálculo de K - 10%, Unidades de K - 5%.

Detalhes de algumas respostas. Estas anotações são apresentadas a título didático, não fazendo parte da resolução escrita

$$G(s) = \frac{11}{(s+9)(s+1)}$$

Calcule a resposta de $G(s)$ ao impulso $\delta(t)$.

R:

$$G(s) = \frac{11}{(s+9)(s+1)} = \frac{A}{s+9} + \frac{B}{s+1}$$

$$A(s+1) + B(s+9) = 11 \quad (A+B)s = 0 \quad (A+9B) = 11 \quad A = -B \quad -B + 9B = 11B = \frac{11}{8} \quad A = -\frac{11}{8}$$

ou então usar o método dos resíduos (ver Ogata, apêndice B, Partial-Fraction Expansion). Dado que os pólos são distintos:

$$G(s) = \frac{11}{(s+9)(s+1)} = \frac{A}{s+9} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = \frac{11}{-9+1} = -\frac{11}{8} \quad B = \frac{11}{-1+9} = \frac{11}{8}$$

Em qualquer dos casos temos:

$$G(s) = -\frac{11}{8} \frac{1}{s+9} + \frac{11}{8} \frac{1}{s+1}$$

Dado que se trata da resposta ao impulso (cuja TL é unitária), a saída será apenas a TL inversa de $G(s)$.

Da tabela de Transformadas de Laplace temos :

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = -\frac{11}{8}e^{-9t} + \frac{11}{8}e^{-t} \quad t > 0$$

Verificação em Matlab

```
>> clear
>> syms s ; ilaplace(11/((s + 9)*(s + 1)))
```

ans =

```
(11*exp(-t))/8 - (11*exp(-9*t))/8
```