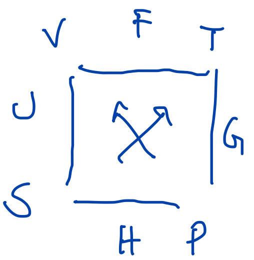
1.

$$S(U,V,N) = Nk_B \ln\left[\alpha \frac{V}{N}\left(\frac{U}{N}\right)^{3/2}\right]$$

a) $$\frac{S}{Nk_B} = \ln\left[\alpha \frac{V}{N}\left(\frac{U}{N}\right)^{3/2}\right]$$

$$\alpha \frac{V}{N}\left(\frac{U}{N}\right)^{3/2} = \exp\left[\frac{S}{Nk_B}\right] \quad ; \quad \left(\frac{U}{N}\right)^{3/2} = \frac{1}{\alpha}\frac{N}{V}\exp\left(\frac{S}{Nk_B}\right)$$

$$U = N \frac{1}{\alpha^{2/3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\exp\left(\frac{2S}{3Nk_B}\right)$$



$$P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -\frac{1}{\alpha^{2/3}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}\exp\left(\frac{2S}{3Nk_B}\right)$$

$$= +\frac{2}{3}\frac{1}{\alpha^{2/3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}\exp\left(\frac{2S}{3Nk_B}\right)$$

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \frac{1}{\alpha^{2/3}} N \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\frac{2}{3Nk_B}\exp\left(\frac{2S}{3Nk_B}\right) =$$

$$= \frac{1}{k_B}\frac{2}{3}\frac{1}{\alpha^{2/3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\exp\left(\frac{2S}{3Nk_B}\right) = \frac{1}{k_B}\frac{V}{N}\underbrace{\frac{2}{3}\frac{1}{\alpha^{2/3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}\exp\left(\frac{2S}{3Nk_B}\right)}_{P}$$

$$T = \frac{1}{k_B}\frac{VP}{N} \Rightarrow PV = Nk_BT$$! Trata-se de um gás ideal :)

b) $$U = N \frac{1}{\alpha^{2/3}} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \exp\left(\frac{2S}{3Nk_B}\right) = \frac{3}{2} N k_B \underbrace{\frac{1}{k_B} \frac{2}{3} \frac{1}{\alpha^{2/3}} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \exp\left(\frac{2S}{3Nk_B}\right)}_{T}$$

$$= \frac{3}{2} N k_B T$$

c) $$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2} N k_B$$

C_V é constante (independente da temperatura) e corresponde ao C_V de um gás ideal monoatômico, onde cada um dos graus de liberdade de translação ($\frac{1}{2} m v_x^2$, $\frac{1}{2} m v_y^2$ e $\frac{1}{2} m v_z^2$) contribui com $\frac{1}{2} k_B$ para o C_V por partícula.

Este valor é válido no limite das altas temperaturas.

Para baixas temperaturas sabemos que deveríamos ter $\lim_{T \to 0} C_V(T) = 0$, de acordo com a 3ª lei. Isso não acontece neste caso, que viola a 3ª lei. Como tal, sabemos que o comportamento de gás ideal clássico não é válido a baixas temperaturas, onde os efeitos quânticos são muito importantes.