INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Departamento de Física
Mecânica e Ondas - LMAC
4º Período de 2021-2022

Soluções Série 4

4.1 $T = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}$

4.2 $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$, $x(t = 16) = \frac{4}{\omega\cos 2\omega}\sin 14\omega$

4.3 Com $\vec{e}_y$ apontando na vertical para cima:

a) $y_0 = -\frac{mg}{k}$

b) $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = g$

c) $y(t) = y_0 + A\cos(\omega t + \phi)$, $v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$, $a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$, $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$

d) $\omega_0 = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, mesma frequência própria que na ausência do campo gravítico. Apenas muda o ponto de equilíbrio.

e) $E_p = \frac{k}{2}\left[A^2\cos^2(\omega t + \phi) - y_0^2\right]$, $E_c = \frac{k}{2}A^2\sin^2(\omega t + \phi)$, $E_M = E_p + E_c = \frac{k}{2}(A^2 - y_0^2)$

4.4 $\omega(t) = -\omega_0\theta_0\sin(\omega_0 t + \phi)$, $v(t) = l\omega(t) = -\omega_0 l\theta_0\sin(\omega_0 t + \phi)$,
$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = -\omega_0^2\theta_0\cos(\omega_0 t + \phi)$, $a_c(t) = \frac{v^2}{l} = l\omega_0^2\theta_0^2\sin^2(\omega_0 t + \phi)$,
$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

4.5 $T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho a}{g}}$

4.6 $E_M = 0.42$ J

4.7 a) $E_c = \frac{3}{4}E_M$, $E_p = \frac{1}{4}E_M$

b) $x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$

4.8 $< x >= 0$, $< x^2 >= \frac{A^2}{2}$

4.9 a) $T = 3.79$ s

b) $T = 1.90$ s

4.10 $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{k}{m}x\left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}\right) = 0$

Pequenas oscilações: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{mL^2}x^3 = 0$, não é movimento harmónico simples.

4.11 a) $\omega_0 = 1$ rad $\cdot$ s^{-1}, $\lambda = 1$ s^{-1}

b) $\Delta = 0$, uma raíz dupla, movimento com amortecimento crítico.

c) $x(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$

4.12 $A' = \sqrt{\omega^2 + \lambda^2}$, $\alpha = \arctan\left(-\frac{\omega}{\lambda}\right)$

4.13 $\lambda = 0.0144$ s^{-1}

4.14 a) Oscilador amortecido no regime pseudo-periódico.

b) $T = 2\pi \approx 6.3$ s

c) $\omega_0 \approx 1$ rad $\cdot$ s^{-1}

d) $y(t) = A_0e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) \approx e^{-0.1t}\cos(t)$

4.15 a) $< E_c >= \frac{1}{4}mA^2\omega_f^2$, $< E_p >= \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{4}mA^2\omega_0^2$

b) $W_a = \int\limits_t^{t+T} -2m\lambda v^2 \mathrm{dt} = -2\pi m\lambda\omega_f A^2$

c) $W_{ext} = \int\limits_t^{t+T} -\omega_f AF_0\cos(\omega_f t)\sin(\omega_f t + \phi) = 2\pi m\lambda\omega_f A^2$,

W_{ext} é simétrico de W_a, pelo que a energia média é conservada.

4.16 a) $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{4F_0}{m\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left[(2k+1)\omega t\right]$

b) $a_k = -\frac{4F_0}{m\pi\omega^2}\frac{1}{(2k+1)^3}$

4.17 a) $F(x) = -ab\sin(kx)$,

$F = 0 \Rightarrow x = 0$

$F > 0 \Rightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{b}, 0\right[$

$F < 0 \Rightarrow x \in \left]0, \frac{\pi}{b}\right[$

b) Equação do movimento: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{ab}{m}\sin(bx) = 0$. Logo não é movimento harmónico. Contudo, no limite de pequenas oscilações, o movimento será aproximadamente harmónico.

c) $x_{extremo} = \pm\frac{\pi}{3b}$,

d) $E_p(x) = -a + \frac{ab^2}{2}x^2 - \frac{ab^4}{24}x^4 + ... = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{a(bx)^2k}{2k!}$

Para pequenas amplitudes mantemos apenas termos até à segunda ordem:

$E_p(x) \approx -a + \frac{ab^2}{2}x^2 \Rightarrow F(x) = -ab^2x$.

Logo temos aproximadamente movimento harmónico com frequência $\omega = \sqrt{\frac{a}{m}}b$.

4.17 a) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{ab}{m}\sin(bx) = 0$

b) $\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{ab}{m}\sin(bx) \\ \frac{dx}{dt} = v \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - a\cos(bx) = E,\ v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[a\cos(bx) + E\right]}$

c) 1) Trajectória a cheio.

2) Trajectória a tracejado.

3) $\left|v\left(\frac{\pi}{2b}\right)\right| = \sqrt{\frac{2a}{m}}$