



**DEM**  
DEPARTAMENTO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA  
TÉCNICO LISBOA

# MECÂNICA DOS SÓLIDOS

2021

Notas das aulas e problemas

Prof. Luis Faria

Prof. Luís Sousa

Prof. Aurélio Araújo

Versão 1.0 (13 Junho 2021)

### 3 Tensão

Notação:

Grandeza	Notação Vetorial	Notação Indicial	Ordem do Tensor
Força de volume no ponto $\mathbf{x}$	$\mathbf{b}(\mathbf{x})$	$b_i(x_1, x_2, x_3)$	1
Força resultante aplicada no corpo C	$\mathbf{f}(C)$	$f_i(C)$	1
Invariantes do tensor das tensões	$I_1, I_2, I_3$	$I_1, I_2, I_3$	0
Momento resultante aplicado no corpo C	$\mathbf{m}(C)$	$m_i(C)$	1
Normal exterior unitária no ponto $\mathbf{x}$ da superfície do corpo	$\mathbf{n}(\mathbf{x})$	$n_i(x_1, x_2, x_3)$	1
Direções principais no ponto $\mathbf{x}$	$\mathbf{n}^1(\mathbf{x}), \mathbf{n}^2(\mathbf{x}), \mathbf{n}^3(\mathbf{x})$	$n_i^1, n_i^2, n_i^3$	1
Vetor tensão no ponto $\mathbf{x}$ da superfície com normal exterior $\mathbf{n}$	$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$	$t_i((x_1, x_2, x_3), (n_1, n_2, n_3))$	1
Posição dum ponto do corpo	$\mathbf{x}$	$x_i$	1
Tensor ortogonal	$\boldsymbol{\beta}$	$\beta_{ij}$	2
Massa específica no ponto $\mathbf{x}$	$\rho(\mathbf{x})$	$\rho(x_1, x_2, x_3)$	0
Tensor das tensões no ponto $\mathbf{x}$	$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$	$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$	2
Tensões principais no ponto $\mathbf{x}$	$\sigma_1(\mathbf{x}), \sigma_2(\mathbf{x}), \sigma_3(\mathbf{x})$	$\sigma_1(x_1, x_2, x_3), \sigma_2(x_1, x_2, x_3), \sigma_3(x_1, x_2, x_3)$	0
Tensão principal máxima/mínima no ponto $\mathbf{x}$	$\sigma_{\max}(\mathbf{x})/\sigma_{\min}(\mathbf{x})$	$\sigma_{\max}(x_1, x_2, x_3)/\sigma_{\min}(x_1, x_2, x_3)$	0
Tensão normal no ponto $\mathbf{x}$ da superfície com normal exterior $\mathbf{n}$	$\sigma_n(\mathbf{x}, \mathbf{n})$	$\sigma_n((x_1, x_2, x_3), (n_1, n_2, n_3))$	0
Tensão de corte no ponto $\mathbf{x}$ da superfície com normal exterior $\mathbf{n}$	$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$	$\tau_i((x_1, x_2, x_3), (n_1, n_2, n_3))$	1
Magnitude tensão de corte máxima no ponto $\mathbf{x}$	$\tau_{\max}(\mathbf{x})$	$\tau_{\max}(x_1, x_2, x_3)$	0

#### 3.1 Introdução

A Mecânica dos Sólidos estuda o movimento e a deformação de corpos em interação mecânica com o exterior, interação essa que é descrita por forças.

Os corpos são constituídos por moléculas, átomos e outras partículas de menores dimensões e o seu movimento e interação com outros corpos (e entre partes do mesmo corpo) é analisado a partir da descrição individual do comportamento dessas partículas. No entanto, quando a dimensão dos corpos a considerar é grande em comparação com a dessas partículas, como acontece em problemas de engenharia, em vez dessa descrição individual é mais conveniente utilizar uma descrição macroscópica do seu comportamento médio. Essa

descrição considera que os corpos são meios contínuos, que a matéria se distribui contínua e uniformemente pelo espaço que ocupa e define grandezas, tais como densidades, deslocamentos, velocidades, etc., que são funções contínuas (ou pelo menos, contínuas por troços) de posição. Será essa descrição macroscópica que aqui utilizaremos.

### 3.2 Forças aplicadas

Num corpo que é um meio contínuo a interação com o exterior é descrita por forças. Consideraremos:

- i) forças de contato ou de superfície exercidas na fronteira do corpo pelo exterior (por exemplo pelo contato de outros corpos, por pressão aerodinâmica ou hidrodinâmica);
- ii) forças exercidas em pontos interiores do corpo pelo exterior (por exemplo forças gravíticas, forças eletromagnéticas, forças centrífugas).

No interior do corpo atuam forças que descrevem as interações entre as suas diferentes partes, designadas por:

- iii) forças de contato ou de superfície entre diferentes partes de um corpo.

Qual a forma das forças de contato ou de superfície? A forma mais simples foi sugerida por Cauchy, que postulou a existência de um campo vetorial  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  para descrever as forças de superfície. Designado por vetor tensão,  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  tem as dimensões físicas de uma pressão e é definido para cada ponto do corpo  $\mathbf{x}$  e para cada vetor unitário  $\mathbf{n}$ .

Para concretizar, seja  $C$  um corpo de superfície  $S$  que ocupa um volume  $V$  e imaginemos uma parte  $P$  desse corpo definida pela superfície interior fechada  $S_P$  (ver Figura 3-1). Que forças atuam em  $P$ ? As que atuam na superfície  $S_P$  de  $P$  (e representam a ação do exterior a  $P$  que atua na superfície  $S_P$  (forças tipo iii)) e as que atuam no volume  $V_P$  de  $P$  (e representam a ação do exterior a  $P$  que atua no volume de  $P$  (forças tipo ii)).

Consideremos as forças que atuam na superfície  $S_P$ . Esta tem, num seu ponto  $\mathbf{x}$ , uma normal exterior  $\mathbf{n}$  que indica o lado positivo de  $S_P$ . O vetor tensão  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  dá a força, por unidade de superfície, exercida através da superfície  $S_P$ , pelo material do lado positivo da superfície no material do lado negativo.

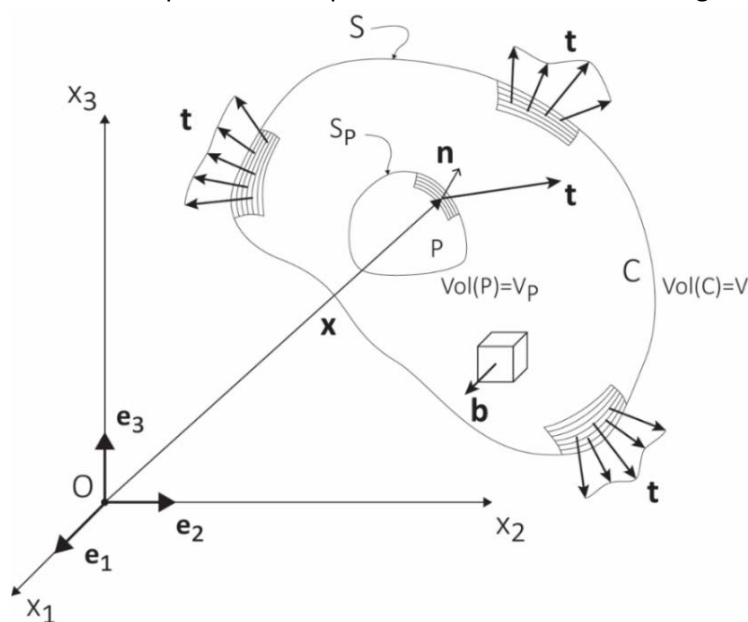


Figura 3-1 – Corpo  $C$  com forças aplicadas de volume e de superfície e vetor tensão na fronteira e no interior.

O campo vetorial  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  idealizado por Cauchy para descrever a interação entre diferentes partes dum corpo através da sua superfície comum é uma densidade de força superficial, em geral oblíqua à superfície onde atua.

Repare-se que a hipótese de Cauchy afirma que em duas superfícies tangentes num ponto (com a mesma normal unitária nesse ponto) atua a mesma força por unidade de superfície, independentemente de outras características (curvatura, etc.) da superfície nesse ponto. Outras hipóteses mais complexas foram formuladas, mas a hipótese de Cauchy é adequada à maioria dos requisitos encontrados em engenharia.

Para determinar a força total superficial exercida em P, integra-se  $\mathbf{t}$  na superfície  $S_p$ ,

$$\int_{S_p} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \, dS \quad (1.1)$$

em que  $\mathbf{n}$  é a normal exterior em cada ponto  $\mathbf{x}$  de  $S_p$ .

Se a superfície considerada for a superfície exterior do corpo,  $\mathbf{n}$  é agora a normal exterior em cada ponto  $\mathbf{x}$  da fronteira S do corpo C e  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  representa a força superficial, por unidade de área, aplicada no corpo pelo exterior, ou seja, as forças de contato ou de superfície do tipo i), já referidas.

A força total de contato ou de superfície exercida no corpo C é dada por:

$$\int_S \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \, dS \quad (1.2)$$

O exterior também pode exercer forças nos pontos interiores do corpo C, as forças do tipo ii), como por exemplo as forças devidas ao campo gravítico. Tais forças, designadas por forças de volume, são descritas por um campo vetorial  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  definido em C, que dá a força, por unidade de volume, exercida pelo exterior em C. O integral

$$\int_V \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, dV \quad (1.3)$$

dá a ação do exterior no corpo C que não é devida a forças de contato.

Em síntese, admitimos que um corpo, ou uma sua parte P, está sujeito a forças:

- i) de superfície, dadas pelo vetor tensão  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ ,
- ii) de volume, dadas pelas forças de volume  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ .

A força resultante  $\mathbf{f}(P)$  e o momento resultante  $\mathbf{m}(P)$  (em torno da origem do referencial O) exercidas em P são dados por:

$$\mathbf{f}(P) = \int_{S_p} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \, dS + \int_{V_p} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, dV \quad (1.4)$$

$$\mathbf{m}(P) = \int_{S_p} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \, dS + \int_{V_p} \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, dV \quad (1.5)$$

em que  $\mathbf{n}$  é a normal unitária exterior no ponto  $\mathbf{x}$  de  $S_p$ . Em componentes,

$$f_i(P) = \int_{S_p} t_i(x_1, x_2, x_3, n_1, n_2, n_3) \, dS + \int_{V_p} b_i(x_1, x_2, x_3) \, dV$$

$$m_i(P) = \int_{S_p} \epsilon_{ijk} x_j t_k(x_1, x_2, x_3, n_1, n_2, n_3) \, dS + \int_{V_p} \epsilon_{ijk} x_j b_k(x_1, x_2, x_3) \, dV.$$

### 3.2.1 Exemplos

Pretende-se determinar a ação do exterior sobre um corpo sólido mergulhado em água, num recipiente. Designaremos o corpo por C e o seu volume e superfície por V e S, respetivamente (Figura 3-2).

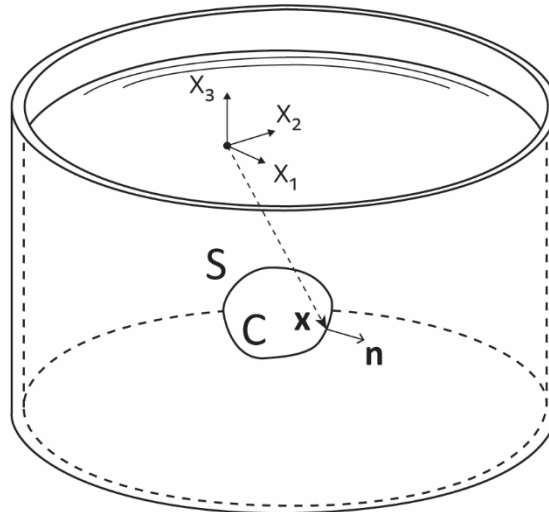


Figura 3-2 - Corpo mergulhado num líquido.

A água e o corpo C estão sujeitos ao campo gravítico. Utilizando o referencial representado na figura, localizado na superfície livre da água, as forças de volume na água e no corpo C têm as seguintes componentes:

$$b_1 = b_2 = 0, b_3 = -\rho g \quad \text{na água e} \quad b_1 = b_2 = 0, b_3 = -\rho_C g \quad \text{no corpo C,}$$

em que  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\rho$  e  $\rho_C$  a massa específica da água e do corpo C, respetivamente.

Os materiais de que os corpos são feitos dividem-se em sólidos e fluidos e estes subdividem-se em líquidos e gases (esta classificação é tratada em detalhe no Capítulo 4 – Relações Constitutivas e é aqui introduzida para melhor se compreender o exemplo). Um fluido em repouso caracteriza-se por exercer pressão perpendicular à superfície onde atua e quando sujeito a uma tensão de corte deixa de estar em equilíbrio e move-se (escoa). Por seu lado um sólido permanece em equilíbrio mesmo quando sujeito a forças superficiais oblíquas à superfície onde atuam.

O vetor tensão na água em repouso tem portanto direção normal à superfície (definida pela normal exterior  $\mathbf{n}$ ) onde atua e é dado por

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -p(\mathbf{x}) \mathbf{n}.$$

Na expressão anterior  $\mathbf{x}$  designa um ponto na água e  $p(\mathbf{x})$  é um escalar, a pressão na água, que varia de ponto para ponto e é dada pela expressão, a ser estabelecida na secção 3.5.1,

$$p(x_1, x_2, x_3) = -\rho g x_3.$$

A ação da água no corpo C é uma ação superficial em S, com valor total dado por (3.2):

$$\int_S \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS = \int_S -p(\mathbf{x}) \mathbf{n} dS = \int_S \rho g x_3 \mathbf{n} dS$$

em que  $\mathbf{n}$  é a normal exterior em cada ponto  $\mathbf{x}$  da superfície S do corpo C.

Para calcular as componentes dessa força aplicada utilizamos o teorema da divergência na forma (2.65) para transformar os integrais de superfície anteriores em integrais de volume. Nas direções  $x_1$  e  $x_2$  as funções integrandas dos integrais de volume são nulas e na direção  $x_3$ ,

$$\int_S \rho g x_3 \mathbf{n}_3 dS = \int_V \partial(\rho g x_3) / \partial x_3 dV = \int_V \rho g dV = \rho g V.$$

A expressão  $\rho g V$  dá a magnitude da força vertical exercida pela água no corpo C ou impulsão. Se esta for superior ao peso do corpo, dado por  $\rho_c g V$ , o corpo irá flutuar, caso contrário, afunda-se.

Note-se que, se o corpo sólido não existir e a superfície S delimitar apenas uma parte da água, o vetor tensão que atua em S mantém-se igual a

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\rho(\mathbf{x}) \mathbf{n} = \rho g x_3 \mathbf{n}.$$

No segundo exemplo de forças superficiais imaginemos que o recipiente do exemplo anterior é cortado em duas partes por um plano horizontal, localizado acima da superfície livre da água, Figura 3-3. Uma das partes do recipiente assim dividido será designada por parte de cima e a outra, por parte de baixo. A acção do peso da parte de cima é transmitida à parte de baixo através da superfície do corte pelo vetor tensão

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\rho_r g l \mathbf{n}$$

em que  $\mathbf{n}$ , paralelo a  $\mathbf{e}_3$ , é a normal exterior à parte de baixo na superfície do corte,  $\rho_r$  a massa específica do material do recipiente,  $g$  a aceleração da gravidade e  $l$  a altura da parte de cima.

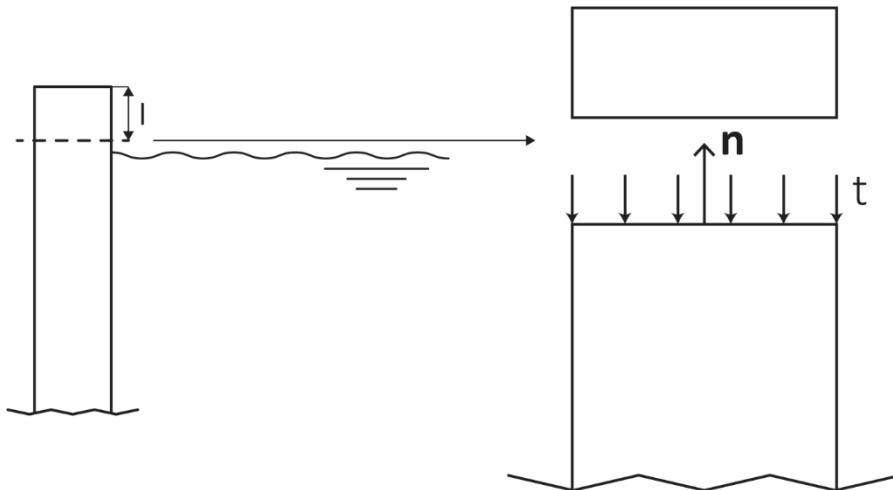


Figura 3-3- Acção da parte de cima do recipiente sobre a parte de baixo.

Para pôr em evidência que as forças de superfície num sólido são mais complexas que as que existem num fluido em repouso, imaginemos que o plano de corte não é ortogonal a  $\mathbf{e}_3$ , Figura 3-4. Nesse caso o vetor tensão continua a ser paralelo a  $\mathbf{e}_3$ ,

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\rho_r g l(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3,$$

e  $l(\mathbf{x})$  passa a ser uma função de posição na superfície do corte. Como o vetor tensão deixa de ser ortogonal ao plano onde atua, a acção da parte de cima sobre a parte de baixo inclui agora uma componente não normal à superfície do corte, denominada tensão de corte, que é suportada pelo material sólido do recipiente.

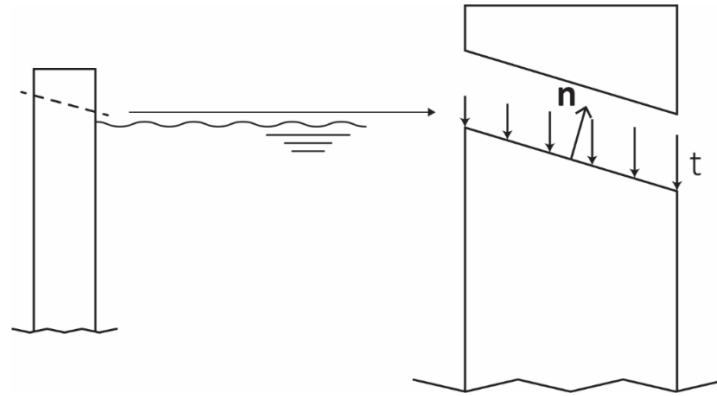


Figura 3-4 - Acção sobre a parte de baixo através de um corte oblíquo.

### 3.3 Condições de equilíbrio

As leis que relacionam as forças que atuam nos corpos com o seu movimento foram primeiro formuladas por Newton, generalizadas depois por Euler para meios contínuos e estabelecem que a *resultante das forças aplicadas num corpo é igual à taxa de variação (temporal) do seu momento linear* e que o *momento resultante aplicado nesse corpo é igual à taxa de variação do seu momento angular*.

Nesta disciplina iremos considerar que os corpos estão em equilíbrio e não em movimento. Nessas condições o seu momento linear e momento angular são constantes e as leis de Newton resumem-se às condições de equilíbrio estático de um corpo sujeito a forças aplicadas. Essas condições estabelecem que um corpo, ou uma qualquer sua parte P, está em equilíbrio se a força resultante e o momento resultante, dados por (3.4) e (3.5), se anularem:

$$\mathbf{f}(P) = \mathbf{0}, \tag{1.6}$$

$$\mathbf{m}(P) = \mathbf{0}. \tag{1.7}$$

Em componentes teremos as seis equações  $f_i(P) = 0$  e  $m_i(P) = 0$ .

#### 3.3.1 Exemplo

O recipiente com água dos exemplos 3.2.1 está colocado em cima de uma base (ver Figura 3-5). Vamos utilizar as condições de equilíbrio para determinar a interação entre a base e o recipiente com água.

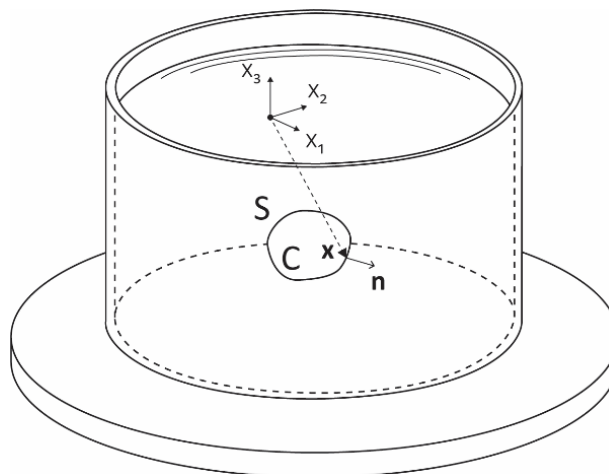


Figura 3-5 - Recipiente com água e corpo mergulhado apoiado numa base.

O corpo D, formado pelo recipiente com água e corpo nela mergulhado, está em equilíbrio se

$$\mathbf{f}(D) = \int_S \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_V \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV = \mathbf{0},$$

em que S e V são a superfície exterior e o volume do corpo D. A parcela das forças de volume representa a ação da gravidade no recipiente, na água e no corpo mergulhado, cujos volumes e massas específicas são  $V_r, V_a, V_c, \rho_r, \rho_a$  e  $\rho_c$ , respetivamente,

$$\int_V \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV = \int_{V_r} -\rho_r \mathbf{g} \mathbf{e}_3 dV + \int_{V_a} -\rho_a \mathbf{g} \mathbf{e}_3 dV + \int_{V_c} -\rho_c \mathbf{g} \mathbf{e}_3 dV = -(\rho_r V_r + \rho_a V_a + \rho_c V_c) \mathbf{g} \mathbf{e}_3.$$

A superfície exterior do corpo D é formada pela superfície livre da água e pela superfície do recipiente que não está em contato com a água. Nela atuam forças superficiais nulas, exceto na superfície de contato entre o recipiente e a base, que designamos por  $\Gamma$ , donde

$$\int_S \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS = \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS.$$

Das condições de equilíbrio retiramos que a resultante vertical da ação da mesa equilibra o peso do recipiente com a água e o corpo mergulhado e que as resultantes horizontais são nulas,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS = (\rho_r V_r + \rho_a V_a + \rho_c V_c) \mathbf{g} \mathbf{e}_3.$$

Para uma primeira estimativa da força superficial de contato divide-se a grandeza da resultante pela área da superfície de contato, obtendo-se o valor médio

$$t_{3 \text{ médio}} = (\rho_r V_r + \rho_a V_a + \rho_c V_c) \mathbf{g} / \text{área}(\Gamma).$$

Para uma descrição detalhada do andamento da força superficial de contato é necessário mais informação pois o problema é hiperestático. Conhecendo a rigidez do recipiente e da base é possível obter a Figura 3-6, que apresenta resultados numéricos da pressão de contato para os casos em que a rigidez da base é alta ou baixa em comparação com a rigidez do recipiente, mostrando-se igualmente o valor da pressão média de contato. Observa-se que a pressão de contacto é praticamente constante e igual ao valor médio excepto debaixo da parede vertical do recipiente. Aí, quando a base é mais rígida (e se deforma pouco) a tensão de contacto é elevada; se a base é flexível e se conforma ao recipiente, a tensão aproxima-se da tensão de contacto média.

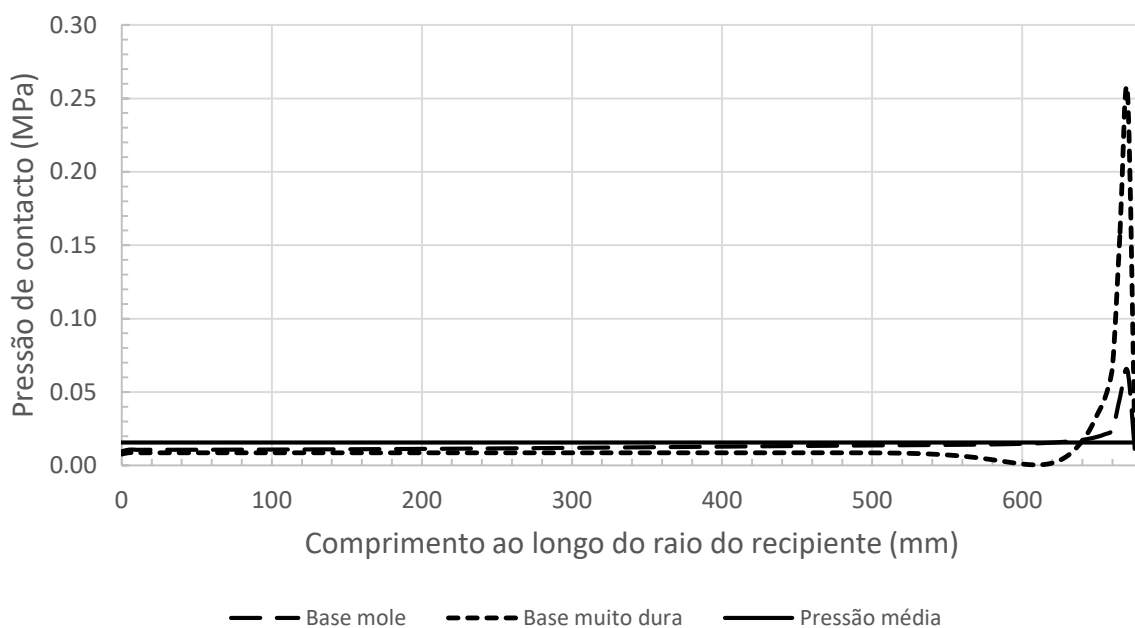


Figura 3-6 - Pressão média de contacto entre o recipiente e a base, resultados numéricos.



### 3.4 Fórmula de Cauchy

Uma das consequências das condições de equilíbrio é a fórmula de Cauchy, que estabelece que o vetor tensão  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  varia linearmente com  $\mathbf{n}$ . Antes de a provar iremos mostrar que o vetor tensão  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ , que representa a ação do material exterior a um elemento de superfície no material interior através dessa superfície, é igual em magnitude e tem direção oposta ao vetor tensão que representa a ação do material interior no material exterior através do mesmo elemento de superfície (lei de Newton de ação e reação),

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}). \tag{1.8}$$

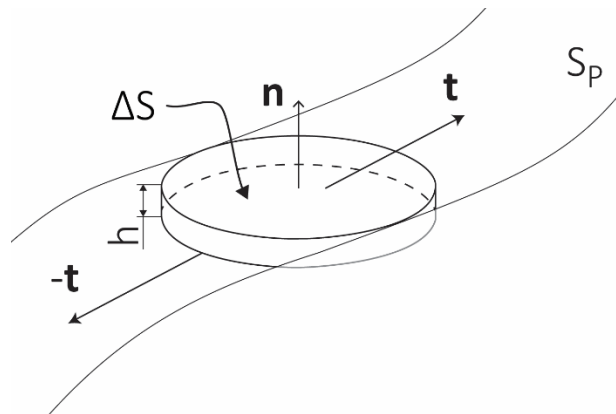


Figura 3-7 – Par ação/reação numa superfície.

Consideremos num ponto  $\mathbf{x}$  da superfície  $S_p$  um cilindro centrado em  $\mathbf{x}$ , de altura pequena  $h$  e bases com área  $\Delta S$  normais a  $\mathbf{n}$  (Figura 3-7). Nesse cilindro, que está em equilíbrio, atuam forças de superfície e forças de volume. Quando  $h \rightarrow 0$ ,  $\Delta S$  permanece pequeno mas finito, mas o volume e a área lateral do cilindro tendem para zero, o que faz com que a força de volume exercida no cilindro e a força de superfície aplicada na superfície lateral do cilindro tendam igualmente para zero. A equação de equilíbrio de forças no cilindro reduz-se então a

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \Delta S + \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) \Delta S = \mathbf{0}, \tag{1.9}$$

donde se conclui o resultado (3.8).

Para provar a fórmula de Cauchy recorre-se ao equilíbrio dum pequeno tetraedro com vértice no ponto genérico  $Q$ , localizado em  $\mathbf{x}_Q$ , conforme se vê na Figura 3-8. As três faces do tetraedro que se intersectam no ponto  $Q$  são normais a  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  e têm áreas  $\Delta S_1$ ,  $\Delta S_2$  e  $\Delta S_3$ , respetivamente. A face inclinada está localizada a uma pequena distância  $h$  de  $Q$ , tem normal unitária  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  e área  $\Delta S$ .

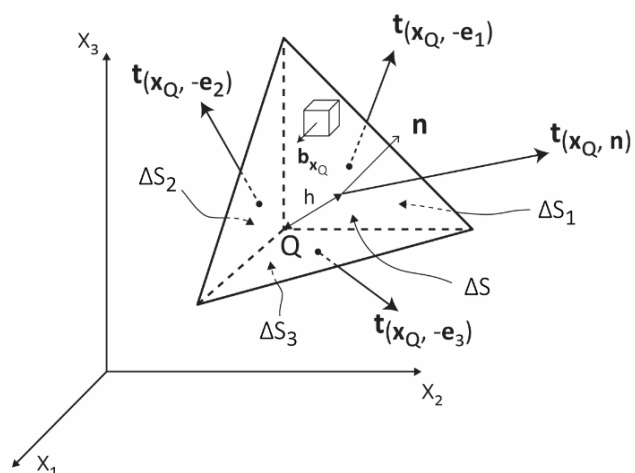


Figura 3-8– Equilíbrio dum tetraedro.

A expressão (2.17) relaciona as áreas das faces do tetraedro,

$$\Delta S_1 = \Delta S n_1, \quad \Delta S_2 = \Delta S n_2, \quad \Delta S_3 = \Delta S n_3. \tag{1.10}$$

O volume do tetraedro, de altura  $h$ , é dado por

$$\Delta V = 1/3 h \Delta S. \quad (1.11)$$

Começamos por fazer equilíbrio de forças na direção  $x_1$ . As forças nessa direção que atuam em cada uma das faces normais a  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  são

$$(t_1(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_1) + \varepsilon_1) \Delta S_1, \quad (t_1(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_2) + \varepsilon_2) \Delta S_2, \quad (t_1(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_3) + \varepsilon_3) \Delta S_3,$$

obtidas da primeira componente do vetor tensão em  $\mathbf{x}_Q$  (que localiza o ponto Q) nessas diferentes faces. Os  $\varepsilon_i$  são inseridos porque os vetores tensão médios em cada face podem ter valores ligeiramente diferentes dos valores no ponto Q. Se assumirmos que o campo de tensões é contínuo,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  são quantidades pequenas.

A força na direção  $x_1$  que atua na face inclinada é dada por  $(t_1(\mathbf{x}_Q, \mathbf{n}) + \varepsilon) \Delta S$  e a força volúmica que atua no tetraedro tem uma componente na direção  $x_1$  dada por  $(b_1(\mathbf{x}_Q) + \varepsilon_v) \Delta V$ , sendo  $\varepsilon$  e  $\varepsilon_v$  pequenas correções aos valores em Q. Utilizando as relações (3.10) e (3.11), a equação de equilíbrio estático na direção  $x_1$  escreve-se:

$$(t_1(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_1) + \varepsilon_1) n_1 \Delta S + (t_1(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_2) + \varepsilon_2) n_2 \Delta S + (t_1(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_3) + \varepsilon_3) n_3 \Delta S + (t_1(\mathbf{x}_Q, \mathbf{n}) + \varepsilon) \Delta S + (b_1(\mathbf{x}_Q) + \varepsilon_v) 1/3 h \Delta S = 0. \quad (1.12)$$

Dividindo por  $\Delta S$ , tomando o limite quando  $h \rightarrow 0$  e notando que  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon$  e  $\varepsilon_v$  tendem para zero com  $h$ , obtém-se:

$$t_1(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_1) n_1 + t_1(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_2) n_2 + t_1(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_3) n_3 + t_1(\mathbf{x}_Q, \mathbf{n}) = 0.$$

Fazendo o equilíbrio nas direções  $x_2$  e  $x_3$  obtém-se, respetivamente,

$$t_2(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_1) n_1 + t_2(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_2) n_2 + t_2(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_3) n_3 + t_2(\mathbf{x}_Q, \mathbf{n}) = 0$$

$$t_3(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_1) n_1 + t_3(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_2) n_2 + t_3(\mathbf{x}_Q, -\mathbf{e}_3) n_3 + t_3(\mathbf{x}_Q, \mathbf{n}) = 0.$$

Utilizando a fórmula (3.9) (lei de ação e reação), escrevemos as equações anteriores na forma

$$-t_1(\mathbf{x}_Q, \mathbf{e}_1) n_1 - t_1(\mathbf{x}_Q, \mathbf{e}_2) n_2 - t_1(\mathbf{x}_Q, \mathbf{e}_3) n_3 + t_1(\mathbf{x}_Q, \mathbf{n}) = 0$$

$$-t_2(\mathbf{x}_Q, \mathbf{e}_1) n_1 - t_2(\mathbf{x}_Q, \mathbf{e}_2) n_2 - t_2(\mathbf{x}_Q, \mathbf{e}_3) n_3 + t_2(\mathbf{x}_Q, \mathbf{n}) = 0$$

$$-t_3(\mathbf{x}_Q, \mathbf{e}_1) n_1 - t_3(\mathbf{x}_Q, \mathbf{e}_2) n_2 - t_3(\mathbf{x}_Q, \mathbf{e}_3) n_3 + t_3(\mathbf{x}_Q, \mathbf{n}) = 0.$$

Utilizando uma notação mais conveniente, designe-se por  $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$  a componente  $j$  do vetor tensão  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  que atua no ponto  $\mathbf{x}$ , na face normal a  $\mathbf{e}_i$ , ou seja,

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = t_j(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \quad (1.13)$$

As condições de equilíbrio do tetraedro estabelecidas anteriormente, mas agora em qualquer ponto  $\mathbf{x}$  do corpo, escrevem-se nesta notação na forma:

$$t_1(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \sigma_{11}(\mathbf{x}) n_1 + \sigma_{21}(\mathbf{x}) n_2 + \sigma_{31}(\mathbf{x}) n_3$$

$$t_2(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \sigma_{12}(\mathbf{x}) n_1 + \sigma_{22}(\mathbf{x}) n_2 + \sigma_{32}(\mathbf{x}) n_3$$

$$t_3(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \sigma_{13}(\mathbf{x}) n_1 + \sigma_{23}(\mathbf{x}) n_2 + \sigma_{33}(\mathbf{x}) n_3.$$

Destas expressões conclui-se que basta conhecer o vetor tensão que atua em cada um dos três planos normais a cada um dos eixos coordenados em determinado ponto do corpo, para conhecer o vetor tensão que atua em qualquer plano que passe por esse ponto e que a dependência do vetor tensão  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  em  $\mathbf{n}$  é linear.

O conjunto das três relações anteriores é designado por fórmula de Cauchy. Em notação indicial e em notação vetorial indicando os argumentos de cada campo, escreve-se

$$t_i = \sigma_{ji} n_j, \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}) \mathbf{n}. \quad (1.14)$$

Note-se que, sendo  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  vetores, pela regra do quociente  $\boldsymbol{\sigma}$  é tensor de segunda ordem. Designa-se por tensor das tensões e tem, tal como o vetor tensão, dimensões de força por unidade de área.

Quando se conhecem as nove componentes do tensor das tensões num ponto diz-se que se conhece o estado de tensão nesse ponto pois conhece-se, pela fórmula de Cauchy, o vetor tensão que atua em qualquer superfície (definida pela sua normal) que passa por esse ponto.

### 3.5 Notação e formas de representar as componentes do tensor das tensões

As componentes do tensor das tensões representam-se numa matriz

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Como dito anteriormente, as componentes do tensor das tensões são as componentes do vetor tensão que atua nas superfícies normais a cada um dos eixos no ponto  $\mathbf{x}$ . O primeiro índice de  $\sigma_{ij}$  indica a face onde a componente atua e o segundo índice indica a direção dessa componente. Por exemplo,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{13}$  são as componentes do vetor tensão  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)$  que atua na face normal a  $\mathbf{e}_1$ , no ponto  $\mathbf{x}$ .

É costume representar as componentes  $\sigma_{ij}$  como forças superficiais que atuam nas faces de um cubo de faces paralelas aos planos coordenados localizado no ponto (Figura 3-9) e que descrevem a ação do material exterior ao cubo no material interior. As componentes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{33}$  são chamadas tensões normais e as componentes com índices desiguais,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ , etc., são chamadas tensões de corte.

Utiliza-se a seguinte convenção relativamente aos sinais das componentes: se a normal exterior à face tem o sentido crescente do eixo a que é paralela e o vetor que representa a componente  $\sigma_{ij}$  tem o sentido crescente de  $x_1$ ,  $x_2$  ou  $x_3$ , a componente é positiva; se a normal exterior à face tem sentido contrário ao sentido positivo do eixo a que é paralela e o sentido do vetor nessa face é também no sentido negativo dos eixos, a componente será positiva (Figura 3-10). Se as componentes forem negativas, serão representadas em cada uma das faces com o sentido oposto ao referido. Esta convenção está de acordo com as noções conhecidas de tração, compressão e corte.

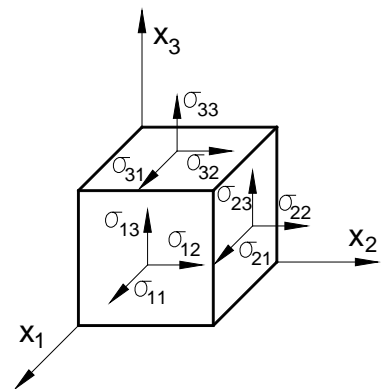


Figura 3-9 - Componentes de tensão.

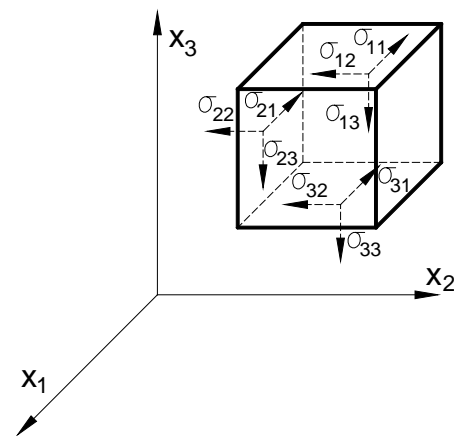


Figura 3-10 – Componentes do tensor  $\sigma_{ij}$

Num sistema de coordenadas cartesianas  $x, y, z$  utiliza-se a notação

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

### 3.5.1 Exemplo

Na espessura duma placa fina estão aplicadas forças superficiais, ver Figura 3-11, e pretende-se determinar as componentes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{21}$  do tensor das tensões em todos os pontos da placa. Admite-se que as outras componentes do tensor das tensões são nulas.

A espessura  $t$  da placa é constante e as forças superficiais aplicadas não variam na direção da espessura (direção  $x_3$ ) nem ao longo das arestas. Considera-se assim que o problema é bidimensional, no plano  $x_1 x_2$ , com a geometria de um paralelogramo a  $30^\circ$  e que as componentes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{21}$  têm valor constante na placa.

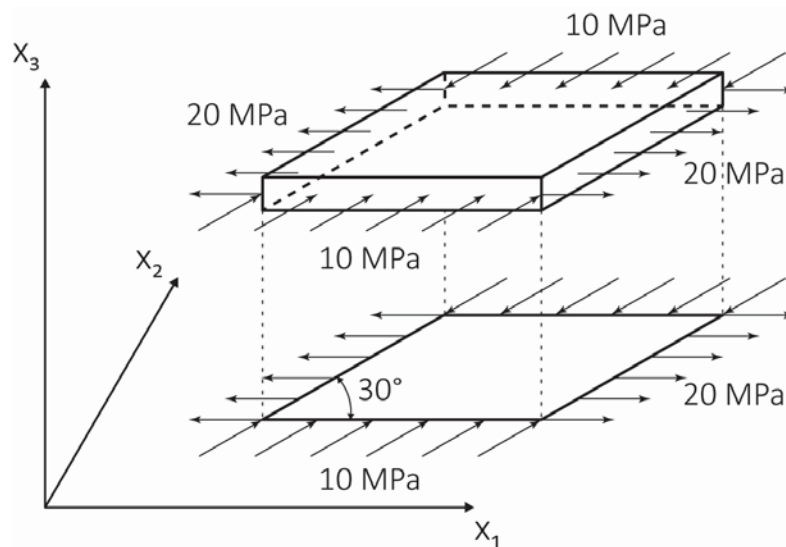


Figura 3-11 - Placa sujeita a tensões e sua representação bidimensional.

O referencial cartesiano escolhido tem o eixo  $x_1$  paralelo à aresta horizontal da placa. Um elemento triangular genérico, com os catetos paralelos aos eixos do referencial, hipotenusa unitária e espessura  $t$  está representado na Figura 3-12. As forças superficiais aplicadas no cateto horizontal são conhecidas,

$$\sigma_{22} = -10 \sin(30^\circ) = -5 \text{ MPa}, \quad \sigma_{21} = -10 \cos(30^\circ) = -8.66 \text{ MPa},$$

bem como as aplicadas na hipotenusa. Escrevendo as equações de equilíbrio de forças relativas ao elemento triangular,

$$\sigma_{11} \sin(30^\circ) t + 8.66 \cos(30^\circ) t - 20 (1) t = 0$$

$$\sigma_{12} \sin(30^\circ) t + 5 \cos(30^\circ) t = 0$$

e resolvendo-as, ficamos a conhecer as forças aplicadas na face paralela ao cateto vertical e

$$\sigma_{11} = 25 \text{ MPa} \text{ e } \sigma_{12} = -8.66 \text{ MPa} = \sigma_{21}$$

Utilizou-se um elemento triangular genérico porque se admitiu que o campo de tensões era uniforme na placa. Note-se que a especificação da espessura  $t$  é desnecessária, pois aparece em todos os termos.

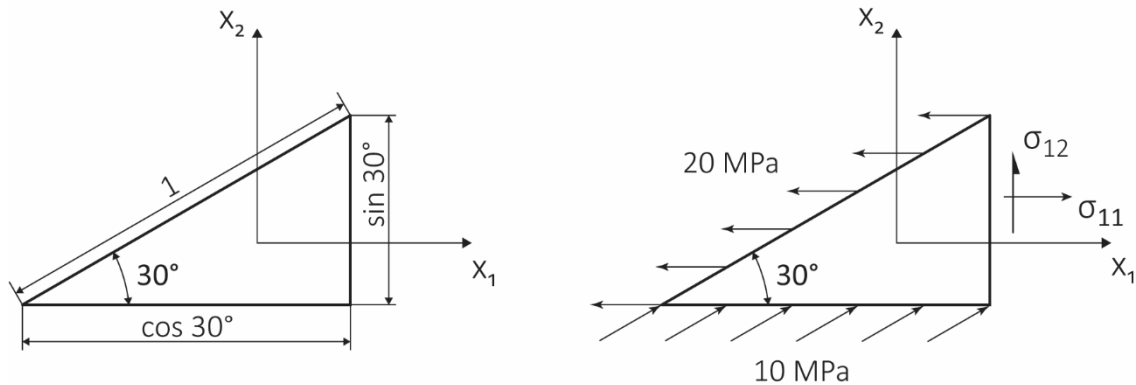


Figura 3-12 Elemento genérico com tensões aplicadas conhecidas.

Uma resolução alternativa utiliza a fórmula de Cauchy  $t_i = \sigma_{ji} n_j$  (Eq. (3.14)), em que  $\mathbf{n} = (\cos(120^\circ), \cos(30^\circ), 0)$  é a normal exterior à face inclinada do elemento triangular,

$$-20 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 = \sigma_{11} (-0.5) + (-8.66) (0.866)$$

$$0 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 = \sigma_{12} (-0.5) + (-5) (0.866),$$

com o resultado  $\sigma_{11} = 25$  MPa e  $\sigma_{12} = -8.66$  Mpa.

### 3.6 Equações de equilíbrio

Considere-se um corpo  $C$  sujeito a forças aplicadas de superfície e de volume dadas pelos campos vetoriais  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{b}$ , respetivamente. Estando o corpo em equilíbrio, verifica-se a Eq. (3.6) em cada parte  $P$  do corpo,

$$\mathbf{f}(P) = \int_{S_P} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_{V_P} \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV = \mathbf{0}.$$

Em notação indicial e utilizando sucessivamente no integral de superfície a fórmula de Cauchy (Eq. (3.14)) e o teorema da divergência (Eq. (2.64)),

$$\begin{aligned} f_i(P) &= \int_{S_P} t_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, (n_1, n_2, n_3)) dS + \int_{V_P} b_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) dV \\ &= \int_{S_P} \sigma_{ji}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) n_j dS + \int_{V_P} b_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) dV \\ &= \int_{V_P} (\partial \sigma_{ji} / \partial x_j + b_i) dV = 0. \end{aligned}$$

Como as equações anteriores são verdadeiras para qualquer parte  $P$  do corpo  $C$ , a função integranda do último integral tem de se anular em todos os pontos de  $C$ . Se assim não fosse, seria possível encontrar uma região  $P$  do corpo  $C$  em que a equação (3.6) era violada. Portanto, em todos os pontos de  $C$ ,

$$\partial \sigma_{ji} / \partial x_j + b_i = 0, \tag{1.17}$$

que se escreve por extenso

$$\partial \sigma_{11} / \partial x_1 + \partial \sigma_{21} / \partial x_2 + \partial \sigma_{31} / \partial x_3 + b_1 = 0$$

$$\partial\sigma_{12} / \partial x_1 + \partial\sigma_{22} / \partial x_2 + \partial\sigma_{32} / \partial x_3 + b_2 = 0 \quad (1.18)$$

$$\partial\sigma_{13} / \partial x_1 + \partial\sigma_{23} / \partial x_2 + \partial\sigma_{33} / \partial x_3 + b_3 = 0.$$

Estas equações diferenciais designam-se por equações de equilíbrio e são válidas em todos os pontos interiores do corpo. Na superfície  $S$  do corpo  $C$  a ação do exterior é descrita por forças de superfície  $t_i$ , que se relacionam com as componentes do tensor das tensões pela fórmula de Cauchy  $t_i = \sigma_{ji}(x_1, x_2, x_3) n_j$ , em que o ponto  $(x_1, x_2, x_3)$  pertence a  $S$ .

As equações de equilíbrio de momentos para qualquer parte  $P$  do corpo  $C$ , escrevem-se

$$\mathbf{m}(P) = \int_{S_P} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \, dS + \int_{V_P} \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, dV = \mathbf{0},$$

e em notação indicial

$$m_i(P) = \int_{S_P} \varepsilon_{ijk} x_j t_k((x_1, x_2, x_3), (n_1, n_2, n_3)) \, dS + \int_{V_P} \varepsilon_{ijk} x_j b_k(x_1, x_2, x_3) \, dV = 0.$$

Utilizando de novo e sucessivamente a fórmula de Cauchy e o teorema da divergência no integral de superfície,

$$\begin{aligned} m_i(P) &= \int_{S_P} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk}(x_1, x_2, x_3) n_l \, dS + \int_{V_P} \varepsilon_{ijk} x_j b_k(x_1, x_2, x_3) \, dV \\ &= \int_{V_P} \varepsilon_{ijk} (\partial(x_j \sigma_{lk}) / \partial x_l) \, dV + \int_{V_P} \varepsilon_{ijk} x_j b_k \, dV \\ &= \int_{V_P} \varepsilon_{ijk} [\partial x_j / \partial x_l \sigma_{lk} + x_j (\partial \sigma_{lk} / \partial x_l + b_k)] \, dV \end{aligned}$$

O último parêntesis anula-se porque contém as equações de equilíbrio anteriores (3.17). Como  $\partial x_j / \partial x_l = \delta_{jl}$ , a última expressão escreve-se

$$\int_{V_P} \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} \, dV = 0.$$

A arbitrariedade da parte  $P$  de  $C$  permite invocar o raciocínio anterior e ter, em cada ponto de  $C$ ,  $\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0$ . Por extenso:

$$i = 1: \quad \sigma_{23} = \sigma_{32};$$

$$i = 2: \quad \sigma_{31} = \sigma_{13};$$

$$i = 3: \quad \sigma_{12} = \sigma_{21},$$

ou seja, a condição de equilíbrio de momentos implica que o tensor das tensões é simétrico. Essa simetria permite escrever as equações de equilíbrio (3.17) na forma

$$\partial\sigma_{ij} / \partial x_j + b_i = 0.$$

Em resumo, se um corpo  $C$  sujeito a forças de superfície  $\mathbf{t}$  e forças de volume  $\mathbf{b}$  estiver em equilíbrio, então  $\mathbf{f}(C) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{m}(C) = \mathbf{0}$  e existe em cada ponto  $\mathbf{x}$  do corpo um campo tensorial  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , chamado tensor das tensões, tal que:

a) para cada vetor unitário  $\mathbf{n}$ ,

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}, \quad t_i = \sigma_{ij} n_j; \quad (1.19)$$

b)  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  é simétrico,  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ ,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ; (1.20)

c)  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  verifica as equações de equilíbrio

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \partial\sigma_{ij} / \partial x_j + b_i = 0. \quad (1.21)$$

As equações de equilíbrio são três e as componentes do tensor das tensões a determinar são seis: o sistema é estaticamente indeterminado e é necessário estabelecer outras condições (de deformação e de propriedades do material do corpo) para determinar o estado de tensão num corpo. No entanto, como se verá nos exemplos

seguintes, é possível em certos casos fazer simplificações e determinar as componentes do tensor das tensões em todos os pontos do corpo a partir das equações de equilíbrio.

### 3.6.1 Exemplos

Neste primeiro exemplo pretende-se determinar a distribuição de tensões dentro de água em repouso, recorrendo às equações de equilíbrio.

Como se viu na secção 3.1.1, considera-se que num fluido em repouso a tensão é uma pressão, isto é, a força superficial é sempre normal à superfície onde atua,

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -p(\mathbf{x}) \mathbf{n},$$

e o tensor das tensões é um tensor isotrópico,

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n} = -p(\mathbf{x}) \mathbf{n} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x}) \mathbf{I},$$

em que  $\mathbf{x}$  localiza um ponto na água,  $p(\mathbf{x})$  é um escalar, a pressão na água, variável de ponto para ponto e  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade. Em notação indicial,  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$ .

O sinal negativo na pressão deve-se a convenções diferentes para a tensão (positiva se de tração) e para a pressão (positiva se de compressão).

Utilizando o referencial representado na figura, localizado na superfície livre da água, as forças de volume têm as seguintes componentes:

$$b_1 = b_2 = 0, \quad b_3 = -\rho g,$$

em que  $\rho$  designa a massa específica da água e  $g$  a aceleração da gravidade

As três equações de equilíbrio (3.18) reduzem-se, para esta forma diagonal do tensor das tensões, a

$$-\partial p / \partial x_1 = 0, \quad -\partial p / \partial x_2 = 0, \quad -\partial p / \partial x_3 - \rho g = 0.$$

indicando que a pressão apenas varia com  $x_3$ . Integrando e designando a constante de integração por  $K$ ,

$$p(x_1, x_2, x_3) = -\rho g x_3 + K.$$

Na superfície livre da água a pressão é nula e esta condição de fronteira em  $x_3 = 0$  permite determinar que  $K=0$ , ficando o tensor das tensões e o vetor tensão com as seguintes expressões:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \rho g x_3 \mathbf{I}, \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n} = \rho g x_3 \mathbf{n}.$$

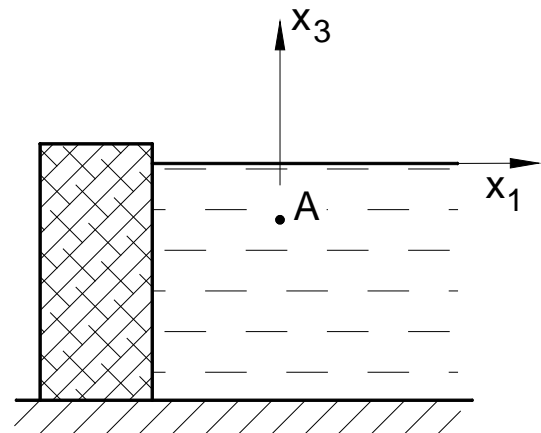


Figura 3-13 - Fluido em repouso num reservatório.

No segundo exemplo pretende-se calcular a distribuição de tensões numa barra de secção quadrada de área  $A$ , comprimento  $L$  e feita de material com massa específica  $\rho$ . As dimensões da secção são pequenas em comparação com o seu comprimento, isto é  $L \gg \sqrt{A}$ . A barra está sujeita ao campo gravítico e está apoiada na sua base inferior.

Como se observa na Figura 3-14, as superfícies laterais da barra são superfícies livres, isto é, o vetor tensão que nelas atua é nulo. Nos quatro cantos até teremos:

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0$$

Sendo as dimensões da secção da barra pequenas comparadas com o seu comprimento e sendo a distribuição de tensões contínua, as componentes nulas do tensor das tensões nas faces laterais e cantos serão aproximadamente nulas nos pontos interiores. De qualquer forma serão sempre pequenas em comparação com  $\sigma_{33}$ .

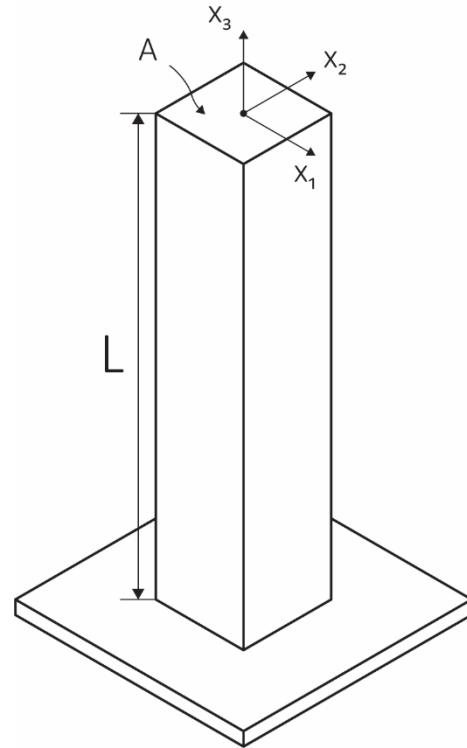


Figura 3-14 Barra apoiada sujeita ao peso próprio.

Vamos então admitir que o estado de tensão nos pontos interiores da barra é igual ao estado de tensão nos seus cantos e que apenas  $\sigma_{33} \neq 0$ . Para este estado de tensão, que se designa por uniaxial, as equações de equilíbrio (3.17) reduzem-se a:

$$\partial \sigma_{33} / \partial x_3 - \rho g = 0.$$

Admite-se igualmente que  $\sigma_{33}$  depende apenas de  $x_3$ . Integrando:

$$\sigma_{33} = \rho g x_3 + K.$$

A constante de integração  $K$  determina-se pela condição do topo da barra ser uma superfície livre,

$$\sigma_{33} = 0 \text{ em } x_3 = 0 \rightarrow K = 0,$$

O estado de tensão na barra será  $\sigma_{33} = \rho g x_3$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0$  e as componentes  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{31}$  e  $\sigma_{32}$  igualmente nulas devido à simetria do tensor das tensões.

A tensão máxima (em valor absoluto) na barra ocorre na secção da base, em  $x_3 = -L$ , e terá o valor

$$|\sigma_{33}| = \rho g L,$$

igual ao peso da barra  $\rho g A L$  dividido pela área  $A$  da secção.

Note-se que, em contraste com o exemplo anterior, este estado de tensão uniaxial não é possível em fluidos em repouso em que o tensor das tensões é um tensor isotrópico,  $\sigma(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x}) \mathbf{I}$ .



### 3.7 Mudança das componentes do tensor das tensões por rotação do referencial

Sem utilizar a regra do quociente vamos mostrar que  $\sigma = \sigma_{ij}$  é um tensor, isto é, que para todas as rotações dos eixos coordenados dadas por

$$x'_i = \beta_{ij} x_j, \quad x_i = \beta_{ji} x'_j, \quad \beta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j,$$

sujeitas a

$$\beta_{ik} \beta_{jk} = \delta_{ij}, \quad \beta_{ki} \beta_{kj} = \delta_{ij},$$

as novas componentes  $\sigma'_{ij}$  são dadas por

$$\sigma'_{ij} = \beta_{il} \beta_{jk} \sigma_{lk}. \quad (1.22)$$

Por definição de tensor das tensões,

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= t'_j(\mathbf{e}'_i), \\ &= \beta_{jk} t_k(\mathbf{e}'_i) \quad \text{pela regra de transformação de vetores,} \\ &= \beta_{jk} \sigma_{lk} (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_l) \quad \text{pela fórmula de Cauchy,} \\ &= \beta_{jk} \sigma_{lk} \beta_{il} \quad \text{pela definição da matriz de transformação } \beta_{ij}, \\ &= \beta_{il} \beta_{jk} \sigma_{lk} \quad \text{pela comutatividade da operação de multiplicação.} \end{aligned}$$

Na Figura 3-15 estão representadas as componentes  $\sigma_{lk}$  e  $\sigma'_{ij}$  no referencial inicial e no referencial rodado.

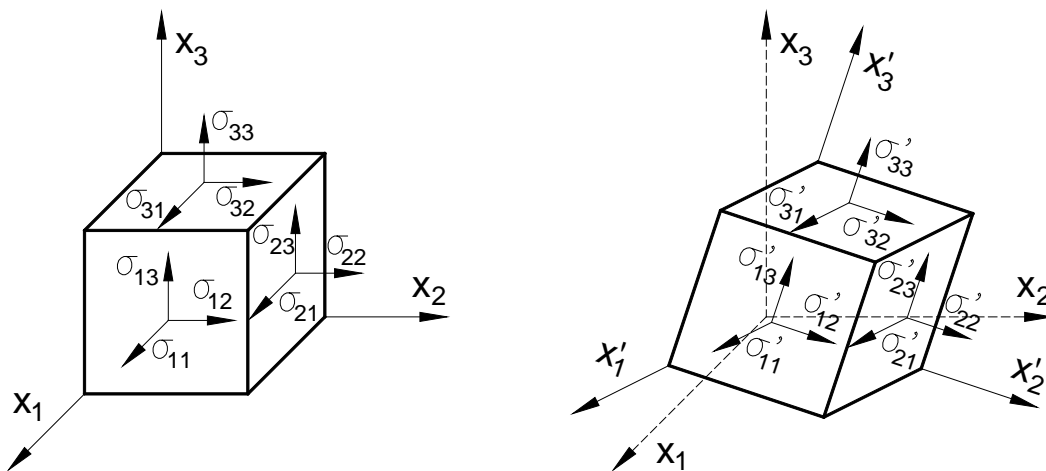


Figura 3-15 - Componentes de tensão em referenciais rodados.

Em notação direta as relações anteriores escrevem-se

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{\beta} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}', \quad \boldsymbol{\beta} = \beta_{ij}, \quad \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T = \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta} = \mathbf{I},$$

e as novas componentes  $\sigma'$  são dadas por

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\beta}^T.$$

### 3.7.1 Exemplo

A expressão anterior para transformar de  $\sigma_{ik}$  para  $\sigma'_{ij}$  pode ser obtida da simetria do tensor das tensões e do seguinte resultado: a componente na direção  $\mathbf{n}'$  do vetor tensão que atua na superfície de normal  $\mathbf{n}$  é igual à componente na direção  $\mathbf{n}$  do vetor tensão que atua na superfície de normal  $\mathbf{n}'$ , ou seja

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}') \cdot \mathbf{n}.$$

Partindo de

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}') \cdot \mathbf{n} &= t_i(\mathbf{n}') n_i, \\ &= \sigma_{ji} n'_j n_i && \text{pela fórmula de Cauchy,} \\ &= \sigma_{ij} n'_j n_i && \text{pela simetria do tensor das tensões} \\ &= (\sigma_{ij} n_i) n'_j && \text{pela comutatividade da operação de multiplicação,} \\ &= t_j(\mathbf{n}) n'_j && \text{pela fórmula de Cauchy,} \\ &= \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}'. \end{aligned}$$

A fórmula  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}') \cdot \mathbf{n} = \sigma_{ij} n'_i n_j$  permite calcular a componente em qualquer direção  $\mathbf{n}$  do vetor tensão que atua na superfície de normal  $\mathbf{n}'$  e também determinar a lei de transformação (3.22): se  $\mathbf{n}'$  for paralelo ao eixo  $x_\alpha$  e  $\mathbf{n}$  paralelo ao eixo  $x_\beta$ ,  $n'_i = \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{e}_i = \beta_{\alpha i}$  e  $n_j = \mathbf{e}_\beta' \cdot \mathbf{e}_j = \beta_{\beta j}$  e obtemos

$$\sigma_{\alpha\beta'} = \beta_{\alpha i} \beta_{\beta k} \sigma_{ik}.$$

## 3.8 Componentes do tensor das tensões e equações de equilíbrio em coordenadas cilíndricas

Utilizam-se coordenadas curvilíneas para simplificar a descrição e resolução dos problemas em análise: por exemplo, no estudo da torção de um veio circular ou de um tubo, ou no da flexão de uma viga curva, a fronteira do corpo e as condições de fronteira do problema são mais facilmente descritas em coordenadas cilíndricas. No caso de um corpo esférico é aconselhável a utilização de coordenadas esféricas.

Iremos considerar coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $\theta$  e  $z$ , que se relacionam com as coordenadas cartesianas retangulares por:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta & \theta &= \arctan x_2/x_1 \\ x_2 &= r \sin \theta & r^2 &= x_1^2 + x_2^2 \\ x_3 &= z & z &= x_3 \end{aligned} \tag{1.23}$$

As direções dos eixos  $r$ ,  $\theta$  e  $z$ , ortogonais entre si, designam-se por radial, tangencial e axial, respetivamente. As componentes do tensor das tensões num ponto  $(r, \theta, z)$  são designadas por

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

e têm o significado e seguem a convenção descrita na Secção 3.4 (por exemplo,  $\sigma_{r\theta}$  é a componente da força superficial na direcção  $\theta$  que atua na superfície cuja normal é paralela ao eixo  $r$ ), e têm a representação dada na Figura 3-16.

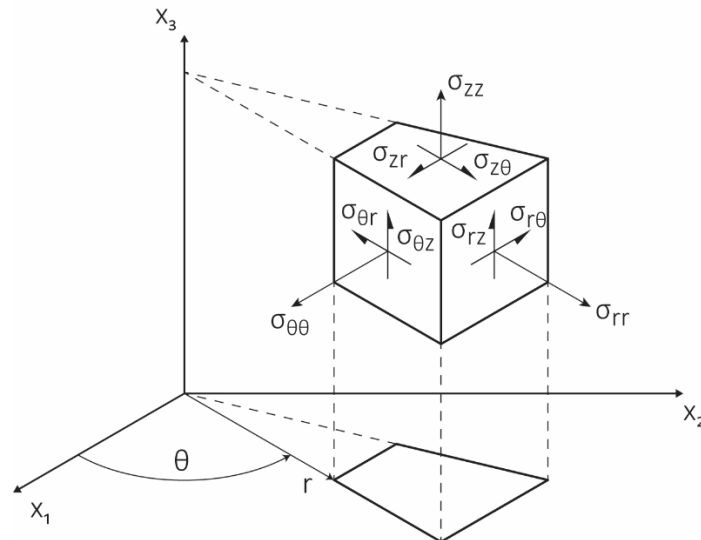


Figura 3-16 – Tensões em coordenadas cilíndricas.

Para relacionar estas componentes do tensor das tensões com  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ , etc., constrói-se um referencial cartesiano  $x'_1x'_2x'_3$  no ponto  $(r, \theta, z)$ : com origem nesse ponto, o eixo  $x'_1$  tem a direção positiva de  $r$ ,  $x'_2$  tem a direção positiva de  $\theta$  e  $x'_3$  é paralelo a  $z$  (ver Figura 3-17).

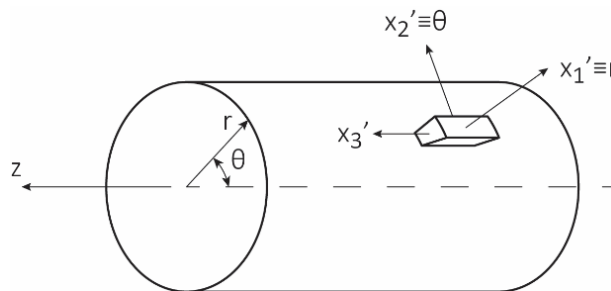


Figura 3-17 - Coordenadas cilíndricas.

Identificando  $r, \theta, z$  com  $x'_1, x'_2, x'_3$ , definem-se as componentes  $\sigma'_{11}, \sigma'_{12}$ , etc, por (Figura 3-17):

$$\sigma'_{11} = \sigma_{rr}, \quad \sigma'_{12} = \sigma_{r\theta}, \quad \sigma'_{13} = \sigma_{rz},$$

Como os referenciais  $x'_1x'_2x'_3$  e  $x_1x_2x_3$  são cartesianos, a lei de transformação que os relaciona é (3.22)

$$\sigma'_{ij} = \beta_{ik} \beta_{jl} \sigma_{kl},$$

em que os cosenos diretores de  $x'_1, x'_2, x'_3$  relativos a  $x_1, x_2, x_3$  são as componentes da matriz de transformação  $\beta$ ,

$$[\beta_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

As equações de equilíbrio podem ser escritas em coordenadas cilíndricas, resolvendo as forças volúmicas  $\mathbf{b}$  nas suas componentes  $(b_r, b_\theta, b_z)$  nas direções  $r, \theta, z$ , fazendo a transformação para coordenadas cilíndricas das equações de equilíbrio (3.21)

$$\begin{pmatrix} -b_r \\ -b_\theta \\ -b_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial \sigma_{11} / \partial x_1 + \partial \sigma_{21} / \partial x_2 + \partial \sigma_{31} / \partial x_3 \\ \partial \sigma_{12} / \partial x_1 + \partial \sigma_{22} / \partial x_2 + \partial \sigma_{32} / \partial x_3 \\ \partial \sigma_{13} / \partial x_1 + \partial \sigma_{23} / \partial x_2 + \partial \sigma_{33} / \partial x_3 \end{pmatrix}$$

Utilizando as relações (3.25) para obter

$$\begin{aligned} \partial / \partial x_1 &= \cos \theta \partial / \partial r - r^{-1} \sin \theta \partial / \partial \theta \\ \partial / \partial x_2 &= \sin \theta \partial / \partial r + r^{-1} \cos \theta \partial / \partial \theta \\ \partial / \partial x_3 &= \partial / \partial z \end{aligned} \tag{1.26}$$

e depois de algumas manipulações, obtêm-se as equações de equilíbrio relativas às coordenadas  $r, \theta, z$ :

$$\begin{aligned} \partial \sigma_{rr} / \partial r + 1/r \partial \sigma_{r\theta} / \partial \theta + \partial \sigma_{rz} / \partial z + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) / r + b_r &= 0 \\ \partial \sigma_{r\theta} / \partial r + 1/r \partial \sigma_{\theta\theta} / \partial \theta + \partial \sigma_{\theta z} / \partial z + 2 \sigma_{r\theta} / r + b_\theta &= 0 \\ \partial \sigma_{rz} / \partial r + 1/r \partial \sigma_{\theta z} / \partial \theta + \partial \sigma_{zz} / \partial z + \sigma_{rz} / r + b_z &= 0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Procedimento semelhante usa-se para coordenadas esféricas ou outras coordenadas curvilíneas ortogonais.

### 3.8.1 Exemplo

Diz-se que um reservatório cilíndrico de pressão é de parede fina se o quociente  $t/R$ , entre a espessura e o raio médio  $R = (R_{ext} + R_{int}) / 2$  é suficientemente pequeno, inferior a 0.1. Nessas condições, comuns em reservatórios de pressão, o cálculo da distribuição de tensões no reservatório é simples, em contraste com situações em que a parede é espessa, como é o caso dos tubos de peças de artilharia.

Consideremos um reservatório cilíndrico de parede fina (Figura 3-17) com raio  $R$ , espessura  $t$  e sujeito a pressão interna constante  $p$ . Na zona de transição do cilindro para as tampas ou bases do reservatório a geometria é complexa e por isso limitaremos esta análise a uma região cilíndrica de comprimento  $L$  afastada das bases.

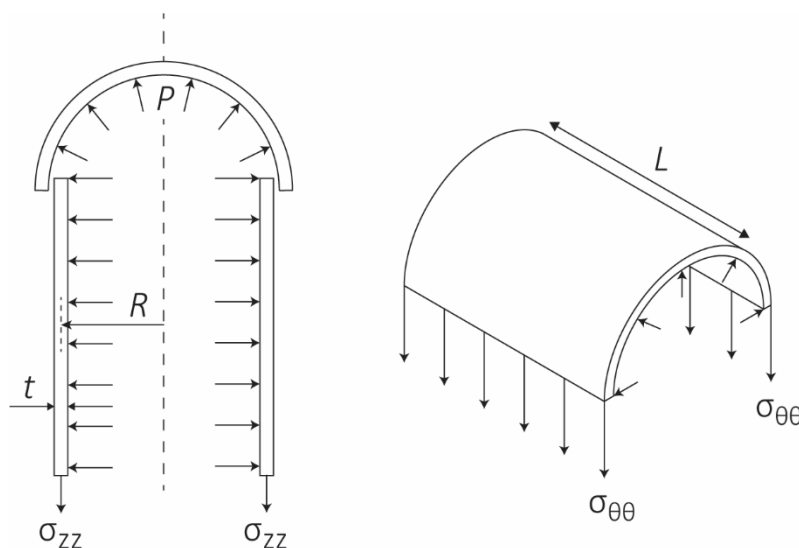


Figura 3-17 - Reservatório de parede fina sujeito a pressão interna; tensões na parede cilíndrica.

A geometria do problema sugere a utilização de coordenadas polares, sendo as componentes do tensor das tensões num ponto genérico  $(r, \theta, z)$  dadas por (3.24).

O eixo do reservatório é um eixo de simetria do problema. Significa que não só a geometria, mas também a carga aplicada (pressão) e o material de que o cilindro é feito são axisimétricos, o que implica que a distribuição de tensões é independente da variável  $\theta$ . É também independente da variável axial, uma vez que os dados do problema (geometria, material do reservatório e carga) não variam com  $z$ .

Considere-se agora um ponto interior na secção média do cilindro. Aplicando a pressão interna, suponhamos que a componente  $\sigma_{r\theta}$  do tensor das tensões é positiva nesse ponto. Se invertermos o cilindro, ficando de cabeça para baixo e o rodarmos em torno do eixo,  $\sigma_{r\theta}$  no mesmo ponto fica negativa; mas o cilindro e a pressão são idênticos antes e depois da mudança de posição e para não haver duas soluções diferentes para o mesmo problema é necessário que  $\sigma_{r\theta} = 0$ . Raciocínio idêntico (pois o plano médio normal ao eixo é um plano de simetria do problema) para as outras componentes de corte do tensor das tensões mostra que estas são nulas e que apenas  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  e  $\sigma_{zz}$  são diferentes de zero.

Vamos agora introduzir uma simplificação no problema e admitir que  $\sigma_{zz}$  e  $\sigma_{\theta\theta}$  são constantes ao longo da espessura, isto é, não variam com  $r$ . Esta simplificação é razoável porque o cilindro é de parede fina.

Para calcular  $\sigma_{zz}$  cortemos o cilindro em dois por uma secção circular (Figura 3-17). Fazendo equilíbrio de forças na direcção vertical, a pressão  $p$  contra o interior da tampa superior tem uma resultante vertical  $p \pi R^2$ , que é equilibrada por tensões normais  $\sigma_{zz}$ , constantes por hipótese, que atuam na espessura do cilindro numa área de  $2 \pi R t$ . Obtemos

$$\sigma_{zz} (2 \pi R t) = p (\pi R^2) \quad \text{e} \quad \sigma_{zz} = p R / 2 t.$$

No cálculo anterior utilizámos o conceito de área projetada da tampa do cilindro no plano normal ao seu eixo, com o valor  $\pi R^2$ , e o valor aproximado da área de uma coroa circular para  $t/R \ll 1$ .

Cortemos agora o cilindro em duas metades ao longo de duas geratrizes e consideremos o equilíbrio de uma delas, de comprimento  $L$  (Figura 3-17). Como admitimos que a tensão  $\sigma_{\theta\theta}$  é constante na espessura, fazendo equilíbrio de forças na direcção radial normal ao plano de corte obtemos

$$\sigma_{\theta\theta} (2 L t) = p (2 R L) \quad \text{e} \quad \sigma_{\theta\theta} = p R / t,$$

onde  $2 R L$  é a área projetada da meia cana cilíndrica no plano de corte. Note-se que a tensão tangencial  $\sigma_{\theta\theta}$  é o dobro da tensão axial  $\sigma_{zz}$ , o que explica que os reservatórios cilíndricos de pressão falhem ao longo de linhas na direcção axial e nunca apresentem rasgões na direcção circunferencial.

Seja o reservatório de parede fina ou não, a hipótese de tensão constante na espessura não funciona para a componente  $\sigma_{rr}$ : no raio exterior não há pressão aplicada e  $\sigma_{rr} = 0$  e no raio interior  $\sigma_{rr} = -p$ . Se tentarmos utilizar a primeira das equações de equilíbrio (3.27) para determinar  $\sigma_{rr}$ , com  $\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$ ,  $b_r = 0$  e  $\sigma_{\theta\theta} = p R / t$ , obtemos uma equação de primeira ordem,

$$\partial \sigma_{rr} / \partial r + \sigma_{rr} / r = (p R / t) / r, \quad R_{int} < r < R_{ext},$$

cujas soluções não conseguem verificar simultaneamente as duas condições. Mas, para reservatórios cilíndricos com  $t/R \ll 1$ , as expressões anteriores mostram que  $|\sigma_{rr}| < 0.1 \sigma_{\theta\theta}$ , não sendo o cálculo de  $\sigma_{rr}$  fundamental para determinar a sua resistência. No Capítulo 7 apresentaremos a teoria geral para determinar a distribuição de tensões em cilindros.

### 3.9 Condições de fronteira e de interface de tensão. Exemplos

Para conhecer o estado de tensão nos diversos pontos de um corpo é necessário integrar as equações de equilíbrio (3.21) e encontrar soluções que verifiquem as condições de fronteira do problema.

As condições de fronteira do problema descrevem a interação entre o corpo e o exterior e consistem nas forças de superfície que atuam na superfície exterior do corpo e que são dadas pelo vetor tensão  $\mathbf{t}$ .

Vamos apresentar dois exemplos de especificação de condições de fronteira; no primeiro exemplo consideraremos adicionalmente condições de interface, que descrevem a interação entre diferentes partes de um corpo através da superfície comum.

Consideremos uma viga de secção retangular e espessura  $a$ , simplesmente apoiada nas extremidades e sujeita a uma carga uniformemente distribuída de intensidade  $q$  (ver Figura 3-18).

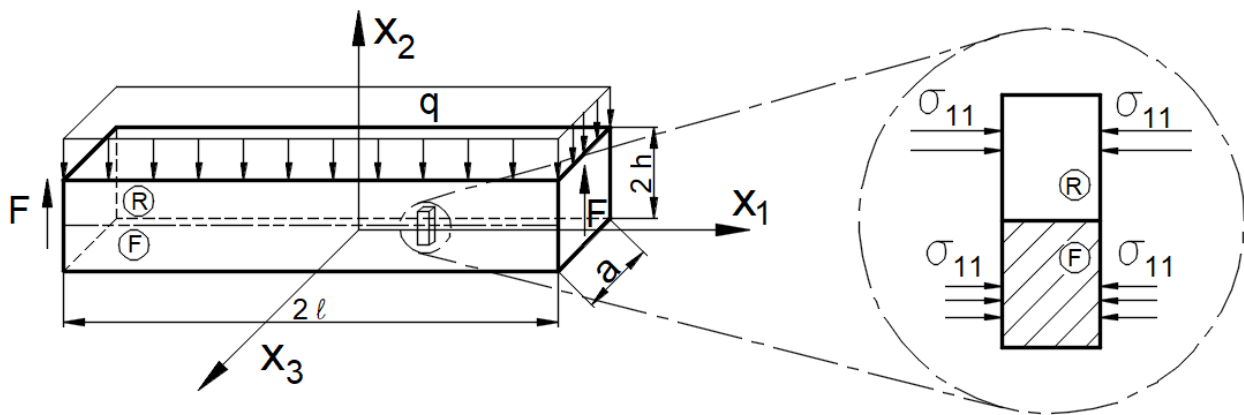


Figura 3-18 – Viga bi-apoiada com carga uniforme.

As condições de fronteira são especificadas pelo vetor tensão ou, tendo em atenção (3.13), especificando componentes do tensor das tensões. Neste caso, na superfície superior  $x_2 = h$ , temos

$$\sigma_{22} = -q, \quad \sigma_{21} = \sigma_{23} = 0,$$

e na superfície inferior  $x_2 = -h$ ,

$$\sigma_{21} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0;$$

nas duas superfícies laterais  $x_3 = 0, -a$ ,

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0.$$

Quando a interação com o exterior é desprezável, como nas três superfícies anteriores, diz-se que as superfícies são livres.

As condições nas faces  $x_1 = \pm l$  não são conhecidas em cada ponto, mas as forças e momentos resultantes são. Temos:

- força longitudinal nula,  $\int_S \sigma_{11} dx_2 dx_3 = 0,$

- força vertical na direção 2 equilibra a carga aplicada (notar a troca de sinal),

$$\begin{cases} \text{em } x_1 = \ell & \int_S \sigma_{12} dx_2 dx_3 = q \times \ell \times a \\ \text{em } x_1 = -\ell & \int_S \sigma_{12} dx_2 dx_3 = -q \times \ell \times a \end{cases}$$

- força na direção  $x_3$  nula,  $\int_S \sigma_{13} dx_2 dx_3 = 0$ ,
- momentos fletores nulos,  $\int_S x_2 \sigma_{11} dx_2 dx_3 = 0$  e  $\int_S x_3 \sigma_{11} dx_2 dx_3 = 0$ ,
- momento torsor nulo,  $\int_S (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) dx_2 dx_3 = 0$ .

Como se vê na Figura 3-18, a viga é constituída por dois materiais, um rijo (material R) e um flexível (material F). As condições na interface entre as duas partes da vigas são obtidas da lei de Newton de ação e reação (3.8),

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}).$$

Em termos das componentes do tensor das tensões de cada material na superfície  $x_2 = 0$ , as condições são:

$$\sigma_{21}^R = \sigma_{21}^F, \quad \sigma_{22}^R = \sigma_{22}^F, \quad \sigma_{23}^R = \sigma_{23}^F.$$

No entanto as outras componentes do tensor das tensões não têm de ser iguais na interface e em geral,

$$\sigma_{31}^R \neq \sigma_{31}^F, \quad \sigma_{33}^R \neq \sigma_{33}^F, \quad \sigma_{11}^R \neq \sigma_{11}^F$$

sem que isso implique, como se vê na Figura 3-18 no detalhe à direita, violação das condições de equilíbrio.

No segundo exemplo, uma viga curva é fletida por uma força na extremidade, como está representado na Figura 3-19. A utilização de coordenadas cilíndricas facilita a especificação das condições de fronteira. As superfícies curvas interior e exterior,  $r = r_i$  e  $r = r_e$ , são livres. Aí

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0.$$

As superfícies  $z = 0$  e  $z = -a$ , também são livres e nelas

$$\sigma_{zr} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{zz} = 0.$$

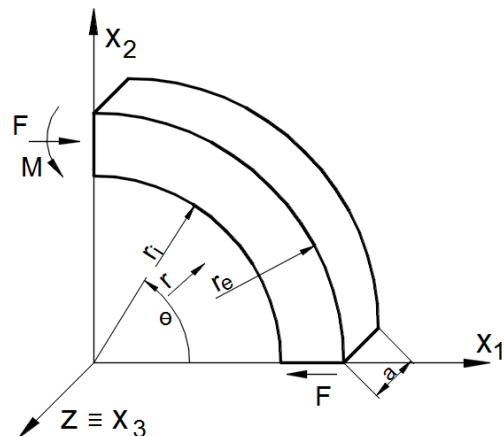


Figura 3-19 – Viga curva em flexão.

Nas superfícies  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi / 2$ , as condições de fronteira são:

$\theta = 0$ :

$$\begin{aligned} \sum F_{x_1} = 0 &\Leftrightarrow \int (\sigma_{\theta r}) dr dz - F = 0 & \sum F_{x_2} = 0 &\Leftrightarrow \int \sigma_{\theta\theta} dr dz = 0 & \sum F_{x_3} = 0 &\Leftrightarrow \int \sigma_{\theta z} dr dz = 0 \\ \sum M_{x_1} = 0 &\Leftrightarrow \int (\sigma_{\theta\theta} z) dr dz = 0 & \sum M_{x_2} = 0 &\Leftrightarrow \int (-\sigma_{\theta r} z + \sigma_{\theta z} r) dr dz = 0 & \sum M_{x_3} = 0 &\Leftrightarrow \int (\sigma_{\theta\theta} r) dr dz = 0 \end{aligned}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{aligned} \sum F_{x_1} = 0 &\Leftrightarrow \int \sigma_{\theta\theta} dr dz + F = 0 & \sum F_{x_2} = 0 &\Leftrightarrow \int \sigma_{\theta r} dr dz = 0 & \sum F_{x_3} = 0 &\Leftrightarrow \int \sigma_{\theta z} dr dz = 0 \\ \sum M_{x_1} = 0 &\Leftrightarrow \int (\sigma_{\theta z} r - \sigma_{\theta r} z) dr dz = 0 & \sum M_{x_2} = 0 &\Leftrightarrow \int (\sigma_{\theta\theta} z) dr dz = 0 & \sum M_{x_3} = 0 &\Leftrightarrow \int (\sigma_{\theta\theta} r) dr dz + M = 0 \end{aligned}$$

### 3.10 Tensões principais e direções principais

Vimos que é necessário conhecer nove componentes de tensão (das quais seis independentes) para especificar completamente o estado de interação superficial em qualquer ponto  $\mathbf{x}$  de um corpo. Essas nove componentes formam um tensor (pois seguem a lei de transformação de tensores de segunda ordem para rotações do referencial), conhecido por tensor das tensões  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , e apresentam-se na matriz simétrica

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (1.28)$$

Haverá planos onde não atuam tensões de corte? Para os determinar escrevemos a condição

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}, \quad \sigma \text{ escalar}, \quad (1.29)$$

uma vez que, nesse caso, as direções de  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  coincidem. Como  $\mathbf{n}$  é um vetor unitário,  $\sigma$  é a magnitude do vetor tensão que atua nesse plano. Utilizando a fórmula de Cauchy,

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n}$$

e passando os termos para o lado esquerdo da equação obtemos, em notação indicial,

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.30)$$

Este sistema homogêneo de três equações nas incógnitas  $n_j$  tem soluções não nulas se o determinante da matriz dos coeficientes se anular,

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0. \quad (1.31)$$

Em componentes teremos

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 1 - \sigma_{33} \end{vmatrix} = 0$$

conduzindo a uma equação cúbica em  $\sigma$ , denominada equação característica,

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (1.32)$$

cujos coeficientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os chamados invariantes porque têm o mesmo valor independentemente do referencial associado com as componentes do tensor das tensões e são definidos por



$$I_1 = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ii},$$

$$I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - \text{tr } (\boldsymbol{\sigma}^2)) = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ji}), \quad (1.33)$$

$$I_3 = \det \boldsymbol{\sigma} = \varepsilon_{ijk} \sigma_{1i} \sigma_{2j} \sigma_{3k}.$$

As três raízes da equação cúbica são denominadas tensões principais e são designadas por  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , sendo  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Seguidamente determina-se, para cada valor de tensão principal  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ou  $\sigma_3$ , um vetor unitário  $\mathbf{n}^1$ ,  $\mathbf{n}^2$ , ou  $\mathbf{n}^3$ , que é a direção principal associada a essa tensão principal, resolvendo as equações

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij} - \sigma_1 \delta_{ij}) n_j^1 &= 0, \\ (\sigma_{ij} - \sigma_2 \delta_{ij}) n_j^2 &= 0, \\ (\sigma_{ij} - \sigma_3 \delta_{ij}) n_j^3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Devido à simetria do tensor das tensões as três direções principais são ortogonais entre si e formam o referencial principal. Quando duas tensões principais são iguais, calcula-se a direção principal correspondente à tensão principal diferente e as outras duas direções principais são qualquer par de direções ortogonais entre si e à direção principal já determinada. Se  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , qualquer conjunto de três direções ortogonais entre si pode ser escolhido para referencial principal.

Por definição as tensões principais são tensões normais e nas superfícies onde atuam as tensões de corte são nulas. Como se verá na Secção 3.10,  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  são também as tensões máximas e mínimas que atuam em qualquer superfície que passa pelo ponto.

Se os eixos do referencial escolhido coincidirem com as direções principais o referencial designa-se por principal e a matriz das componentes do tensor das tensões é uma matriz diagonal:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

Nesse referencial, os invariantes são dados por

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \frac{1}{2} ((\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - \text{tr } (\boldsymbol{\sigma}^2)) = \frac{1}{2} ((\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)) = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3, \\ I_3 &= \det \boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \quad (1.36)$$

e o vetor tensão na superfície de normal  $\mathbf{n}$ , por  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = (\sigma_1 n_1, \sigma_2 n_2, \sigma_3 n_3)$ .

O conhecimento das tensões e direções principais permite-nos visualizar o estado de tensão em cada ponto do corpo; a resposta a um problema de cálculo de tensões só fica concluída quando apresentada em termos de valores principais.

### 3.10.1 Exemplo

O estado de tensão num ponto de um corpo é dado por

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{bmatrix},$$

a que corresponde a representação gráfica da Figura 3-20

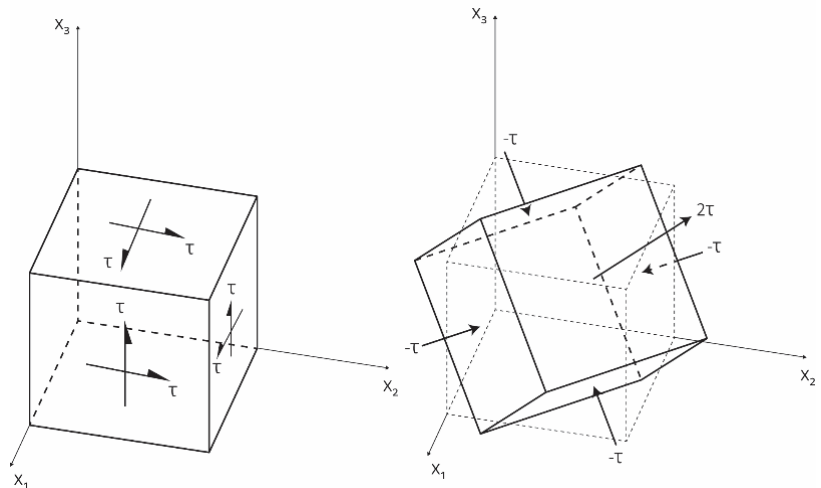


Figura 3-20 - Estado de tensão num ponto e tensões e direções principais correspondentes.

Pretende-se determinar as tensões e direções principais deste estado de tensão. Para isso escrevemos a equação característica (3.32) para este caso, obtendo

$$\sigma^3 - 3 \tau^2 \sigma - 2 \tau^3 = 0.$$

Por inspeção determinamos a raiz  $\sigma = -\tau$ . Pela regra de Ruffini  $(\sigma + \tau)(\sigma^2 - \tau \sigma - 2 \tau^2 \sigma) = \sigma^3 - 3 \tau^2 \sigma - 2 \tau^3$  e obtemos as outras duas raízes pela fórmula resolvente das equações de segundo grau. As tensões principais são:

$$\sigma_1 = 2 \tau, \quad \sigma_2 = -\tau, \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Duas das tensões principais são iguais; a direção principal associada à tensão principal diferente é calculada pela primeira equação (3.34) e é  $\mathbf{n}^1 = (\sqrt{3} / 3, \sqrt{3} / 3, \sqrt{3} / 3)$ , igualmente inclinada com os três eixos do referencial  $x_1x_2x_3$ . As outras duas direções principais são normais entre si e paralelas ao plano normal a  $\mathbf{n}^1$ , ver Figura 3-20.

### 3.10.2 Exemplo: distribuição de tensões num componente automóvel

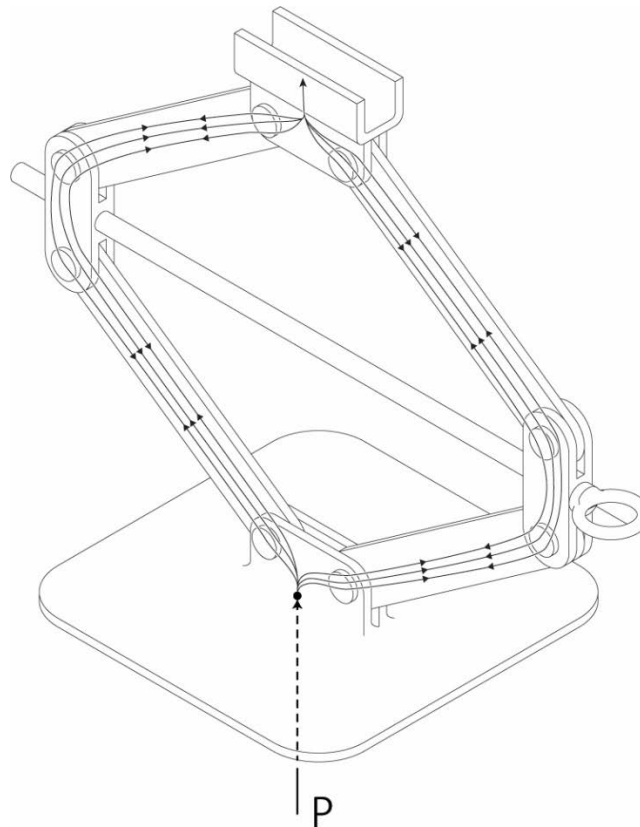
No exemplo seguinte determinamos as tensões e direções principais numa perna de um macaco automóvel em duas situações. Na primeira, as cargas aplicadas estão alinhadas e embora o topo do macaco esteja encastrado, não há momentos de encastramento. Na Figura 3-21 estão representadas as linhas de força que mostram a progressão da carga: nas pernas o estado de tensão é uniforme e de compressão uniaxial, e as linhas de força são tangentes em cada ponto à direção principal de  $\sigma_3$ .

No segundo caso de carga, Figura 3-22, a base do macaco está apoiada numa superfície inclinada (não representada) que faz com que a reação fique desalinhada, originando um momento de encastramento. Em cada perna haverá momentos aplicados: se a perna estiver na posição vertical, o momento será fletor; se a perna ficar horizontal, o momento será torsor; numa posição intermédia, como a representada na Figura, haverá em cada perna momento fletor  $M_B$  e momento torsor  $M_T$ .

Nessa situação o estado de tensão em cada perna deixa de ser uniforme e podemos ter, para determinados valores de descentramento da carga e geometria das pernas, o estado de tensão representado: na face próxima

da carga aplicada (indicada na Figura como face +), as tensões de compressão devido ao momento fletor somam-se às iniciais e a direção principal associada a  $\sigma_3$  roda ligeiramente e aparece  $\sigma_1 > 0$  devido à torção; na face afastada da carga aplicada (indicada na Figura 3-22 como face -), as tensões de tração devido ao momento fletor anulam as iniciais de compressão e aparece tração e compressão a  $45^\circ$  (corte puro, ver secção 3.12) devido à torção.

Em conclusão, um pequeno descentramento da carga aplicada altera por completo a distribuição de tensões na estrutura. O cálculo e a representação das tensões e direções principais em diversos pontos permite compreender o estado de tensão complexo nas pernas do macaco, que são as componentes mais esbeltas da estrutura e onde as tensões serão mais elevadas.



*Figura 3-21 - Macaco sujeito a cargas alinhadas.*

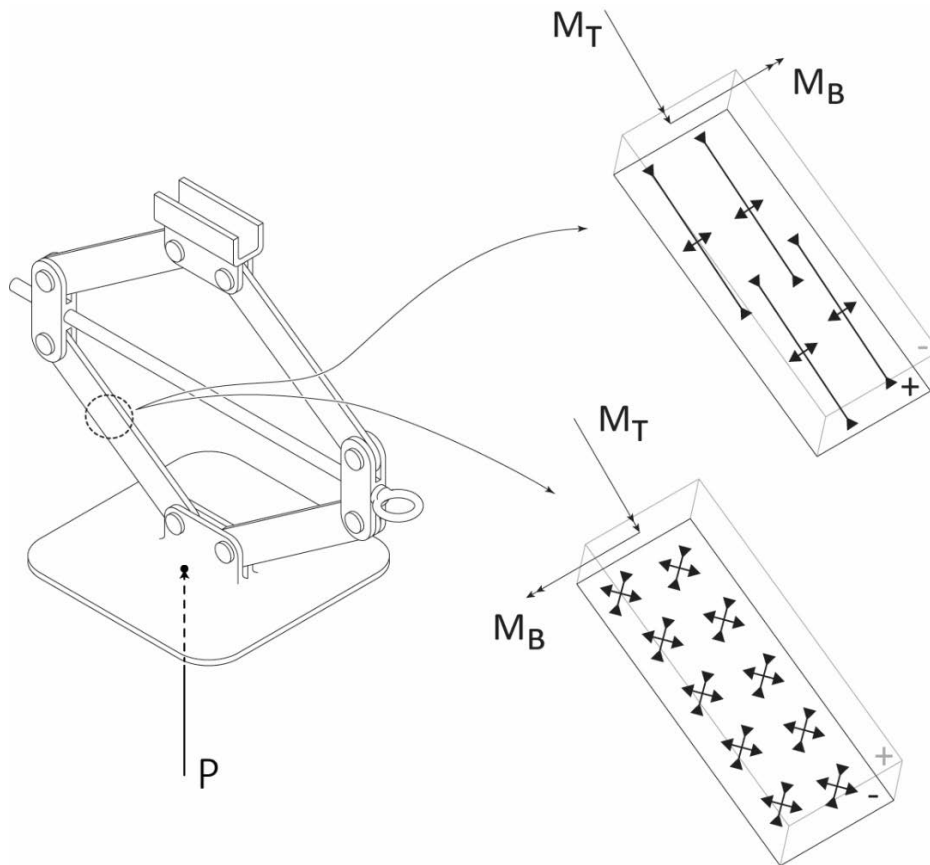


Figura 3-22 - Macaco sujeito a cargas desalinhadas causando flexão e torção nas pernas. Nos detalhes representam-se as tensões principais na face +, face próxima da carga aplicada e na face -, afastada da carga aplicada.

### 3.11 Tensões normais máximas e tensões de corte máximas

Considere-se uma superfície orientada que passa pelo ponto  $\mathbf{x}$ . O vetor tensão nessa superfície,  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}$ , pode ser decomposto na soma de uma tensão normal  $\sigma_n$  e direção  $\mathbf{n}$  e de uma tensão de corte  $\boldsymbol{\tau}$  de magnitude  $\tau$  (ver Figura 3-23),

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \sigma_{ij} n_j n_i$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} - \sigma_n \mathbf{n}$$

$$\tau^2 = |\mathbf{t}|^2 - \sigma_n^2 \tag{1.37}$$

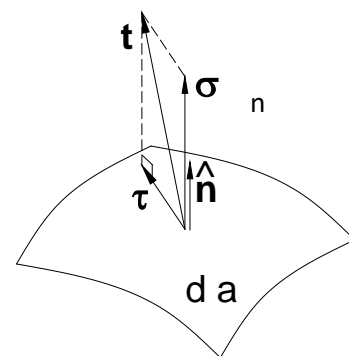


Figura 3-23 – Tensões normais e de corte.

Quais os valores máximos e mínimos da tensão normal, que designaremos por  $\sigma_{\max}$  e  $\sigma_{\min}$ , em qualquer das superfícies que passam pelo ponto? Escolhendo o referencial principal, onde  $\sigma_n$  é dado por

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

determinemos os valores extremos de  $\sigma_n$  para variações de  $n_1, n_2$  e  $n_3$ , sujeitos à condição de normal unitária  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ . Para isso utilizemos o método dos multiplicadores de Lagrange para calcular os extremos sem condições da função

$$F = \sigma_n - \lambda (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1),$$

que são dados pelas equações  $\partial F / \partial n_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , juntamente com a condição  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ . Essas quatro equações,

$$\sigma_1 n_1 - \lambda n_1 = 0$$

$$\sigma_2 n_2 - \lambda n_2 = 0$$

$$\sigma_3 n_3 - \lambda n_3 = 0$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

em que  $\lambda$  é um multiplicador de Lagrange, têm as seguintes soluções:

- i)  $\mathbf{n} = (+/- 1, 0, 0)$ ,  $\sigma_n = \sigma_1$
- ii)  $\mathbf{n} = (0, +/- 1, 0)$ ,  $\sigma_n = \sigma_2$
- iii)  $\mathbf{n} = (0, 0, +/- 1)$ ,  $\sigma_n = \sigma_3$ .

Como  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , a solução i) dá o valor máximo de  $\sigma_n$  e a solução iii) o valor mínimo, mostrando que as tensões principais são iguais aos valores máximos e mínimos das tensões normais do estado de tensão no ponto.

Determinemos agora o valor máximo das tensões de corte  $\tau_{\max}$  em qualquer das superfícies que passam pelo ponto. Trabalhando no referencial principal,

$$\tau^2 = |\mathbf{t}|^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$$

e calculamos os valores extremos de  $\tau^2$  para variações de  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ , sujeitos à condição  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ . Como anteriormente formamos a função

$$G = \tau^2 - \lambda (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1),$$

e determinamos os seus extremos, dados por  $\partial G / \partial n_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , juntamente com a condição  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ . As soluções são:

- i)  $\mathbf{n} = (+/- 1, 0, 0)$ ,  $|\tau|_{\text{ext}} = 0$
- ii)  $\mathbf{n} = (0, +/- 1, 0)$ ,  $|\tau|_{\text{ext}} = 0$
- iii)  $\mathbf{n} = (0, 0, +/- 1)$ ,  $|\tau|_{\text{ext}} = 0$
- iv)  $\mathbf{n} = (+/- \sqrt{2}/2, +/- \sqrt{2}/2, 0)$ ,  $|\tau|_{\text{ext}} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$
- v)  $\mathbf{n} = (+/- \sqrt{2}/2, 0, +/- \sqrt{2}/2)$ ,  $|\tau|_{\text{ext}} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$
- vi)  $\mathbf{n} = (0, +/- \sqrt{2}/2, +/- \sqrt{2}/2)$ ,  $|\tau|_{\text{ext}} = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3)$ .

As primeiras três soluções mostram que os valores mínimos (nulos) de  $|\tau|$  estão associados às direções principais e que o máximo absoluto  $\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$  ocorre num plano paralelo ao eixo principal 2 e que contém a bissetriz ao ângulo entre os eixos principais 1 e 3.

### 3.12 Estados planos de tensão

Consideremos uma placa fina de espessura  $2h$  solicitada por forças paralelas ao seu plano, atuando na espessura da placa, na sua fronteira (ver Figura 3-24).

As faces  $z = \pm h$  são faces livres; utilizando nesta secção a notação (3.16), teremos nessas faces

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0.$$

Devido à pequena espessura da placa, essas tensões serão aproximadamente nulas nos seus pontos interiores.

Façamos então a seguinte simplificação: as tensões  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{zx}$  e  $\sigma_{zy}$  são nulas em todos os pontos da placa e todas as outras componentes do tensor das tensões não variam com  $z$ . Essa simplificação, que será tanto mais realista quanto mais fina for a placa, origina um estado de tensão designado por estado de tensão plano.

O tensor das tensões em qualquer ponto da placa será

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Consideremos uma rotação do referencial de  $\theta$  de  $x, y$  para  $x', y'$  conforme representado na Figura 3-24. As novas componentes do tensor das tensões vêm dadas por (3.23):

$$\sigma_{ij} = \beta_{ik} \beta_{jl} \sigma_{kl}, \quad [\beta_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

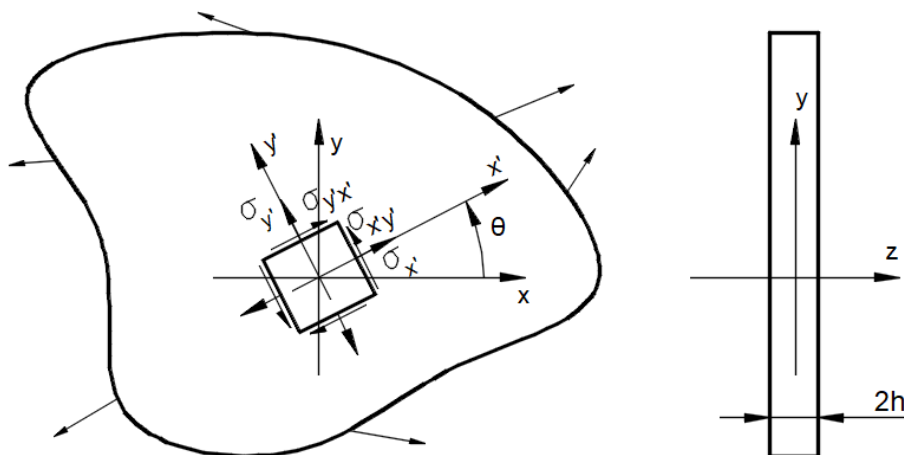


Figura 3-24 – Estado plano de tensão.

e a forma matricial do tensor das tensões será

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \sigma_{x'y'} & 0 \\ \sigma_{y'x'} & \sigma_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Fazendo as multiplicações indicadas em (3.39)

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2 \sigma_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ \sigma_{y'y'} &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2 \sigma_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ \sigma_{x'y'} &= (-\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Utilizando as identidades

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \quad \text{e} \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta), \quad (1.42)$$

as equações anteriores ficam na forma

$$\begin{aligned}\sigma_{x'x'} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{y'y'} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta - \sigma_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{x'y'} &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}\tag{1.43}$$

Destas equações podemos os pontos estacionários de  $\sigma_{x'x'}$  e  $\sigma_{y'y'}$  com  $\theta$ , pelas condições:

$$\frac{d\sigma_{x'x'}}{d\theta} = 2\sigma_{x'y'} \quad , \quad \frac{d\sigma_{y'y'}}{d\theta} = -2\sigma_{x'y'}\tag{1.44}$$

Conclui-se que  $\sigma_{x'x'}$  e  $\sigma_{y'y'}$  serão máximos ou mínimos quando as tensões de corte  $\sigma_{x'y'}$  se anularem, isto é, quando  $\sigma_{x'x'}$  e  $\sigma_{y'y'}$  forem tensões principais, o que acontece quando

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}.\tag{1.45}$$

Os valores de  $\theta$  que verificam a equação anterior definem a orientação dos eixos  $x'$  e  $y'$  principais. Substituindo esses valores de  $\theta$  nas equações (3.43) determinam-se as tensões principais, máximas e mínimas,

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}\end{aligned}\tag{1.46}$$

A tensão  $\sigma_{zz} = 0$  é também uma tensão principal deste estado de tensão e a direção  $z$  uma direção principal, porque as tensões de corte que atuam na superfície normal a  $z$ ,  $\sigma_{zx}$  e  $\sigma_{zy}$ , são nulas.

Podem-se determinar os valores de  $\theta$  que tornam estacionário  $\sigma_{x'y'}$ , derivando  $\sigma_{x'y'}$  em ordem a  $\theta$  e igualando a zero. Esses ângulos  $\theta$  fazem  $\pm 45^\circ$  com as direções principais determinadas e o valor máximo da tensão de corte nesses planos é

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}\tag{1.47}$$

É claro que estas podem não ser as tensões de corte máximas deste estado de tensão: no caso de  $\sigma_{\max}$  e  $\sigma_{\min}$  terem o mesmo sinal, e como  $\sigma_{zz} = 0$ , a tensão de corte máxima terá o valor  $\sigma_{\max}/2$  ou  $-\sigma_{\min}/2$  consoante o sinal de  $\sigma_{\max}$  e  $\sigma_{\min}$  for positivo ou negativo e atuará num plano cuja normal faz  $45^\circ$  com o eixo  $z$ , ver Secção 3.13.

Observe-se que os resultados desta secção confirmam os resultados da Secção 3.11 - Tensões normais máximas e tensões de corte máximas - para o caso particular de tensão plana, com a vantagem de fornecer fórmulas explícitas para calcular as tensões e direções principais.

### 3.12.1 Exemplo: placa com furo

A distribuição de tensões numa placa fina em estado plano de tensão ( $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ ), sujeita a uma tensão uniforme aplicada nos bordos verticais ( $\sigma_{xx} = \sigma$ ,  $\sigma_{xy} = 0$ ), livre nos bordos horizontais ( $\sigma_{yy} = 0$ ,  $\sigma_{yx} = 0$ ) e com um pequeno furo circular de raio  $a$ , Figura 3-25, é dada pelas seguintes expressões, devidas a Kirsch, relativas a um referencial cilíndrico localizado no centro do furo:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma/2 (1 - a^2 / r^2) (1 + (1 - 3 a^2 / r^2) \cos (2\theta) ) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma/2 (1 + a^2 / r^2 - (1 + 3 a^4 / r^4) \cos (2\theta) ) \\ \sigma_{r\theta} &= -\sigma/2 (1 - a^2 / r^2) (1 + 3 a^2 / r^2) \sin (2\theta) \end{aligned} \quad (1.48)$$

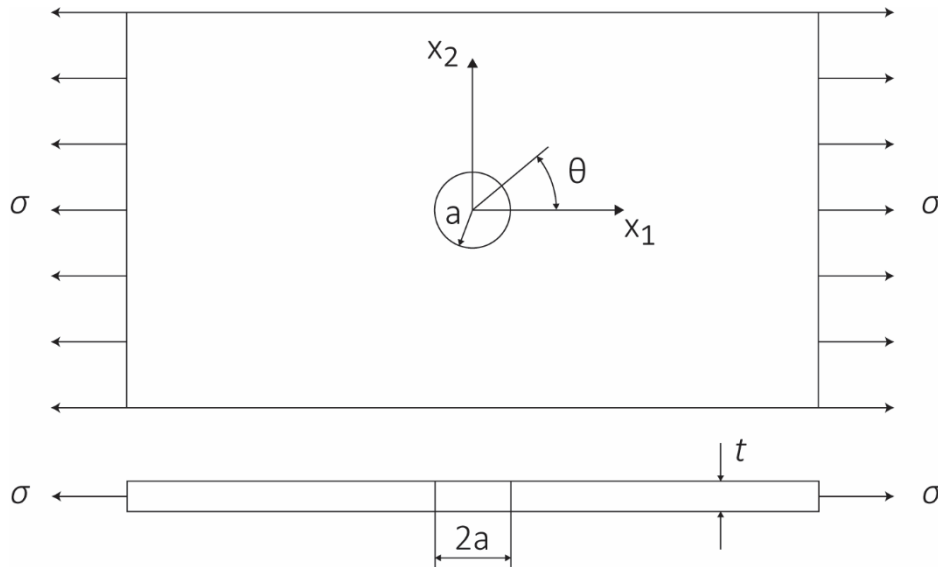


Figura 3-25 - Placa fina com furo circular.

A solução proposta verifica as condições de fronteira do problema: longe do furo temos  $\sigma_{rr} \approx \sigma/2 (1 + \cos (2\theta) )$ ,  $\sigma_{\theta\theta} \approx \sigma/2 (1 - \cos (2\theta) )$ ,  $\sigma_{r\theta} \approx -\sigma/2 \sin (2\theta)$  e utilizando (3.43) obtemos

$$\sigma_{xx} = \sigma, \sigma_{xy} = 0, \sigma_{yy} = 0, \text{ para } a/r \ll 1$$

e no bordo do furo

$$\sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0, \text{ para } r = a.$$

As expressões anteriores também verificam as equações de equilíbrio (3.27) e são portanto a solução do problema da placa fina com furo, no caso em que a placa é feita dum material elástico, linear, isotrópico e homogéneo. O significado destas propriedades será explicado no Capítulo 5, sendo aqui importante reter que, embora nessas expressões não apareçam explicitamente parametros materiais, para outro tipo de materiais a solução já não será dada por (3.48).

A partir das expressões (3.48) verifica-se que a tensão principal máxima na placa é  $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta} = 3 \sigma$  em  $r = a$ ,  $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ ,  $0 < z < t$ : no bordo do furo e ao longo de dois segmentos axiais, a tensão é três vezes superior à tensão aplicada. Este aumento do valor de  $\sigma_{\theta\theta}$  é muito localizado e é causado por uma perturbação da geometria da placa (existência de furo): é o fenómeno da concentração de tensões.



A tensão de corte máxima  $\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = 3 \sigma/2$  ocorre nos mesmos pontos mas em planos inclinados a  $45^\circ$  com o eixo dos  $\theta$  e dos  $z$ , com o eixo dos  $\theta$  e dos  $r$  e paralelos a  $r$  e  $z$ , respetivamente.

Note-se também que no bordo do furo, para  $r = a$ ,  $\theta = 0, \pi$ , a tensão tangencial  $\sigma_{\theta\theta}$  é de compressão,  $\sigma_{\theta\theta} = -\sigma$ .

Se o furo tiver forma elíptica, com o eixo menor da elipse paralelo à tensão aplicada (Figura 3-26), a tensão de tração nas extremidades do eixo maior do furo é dada por

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma (1 + 2 a / b),$$

em que  $a$  e  $b$  são as dimensões dos semi-eixos maiores e menores da elipse, respetivamente. Quando  $a/b > 1$ , a concentração de tensões é superior à do furo circular; fendas ( $a/b \rightarrow \infty$ ) fazem aumentar significativamente o nível de tensões no corpo.

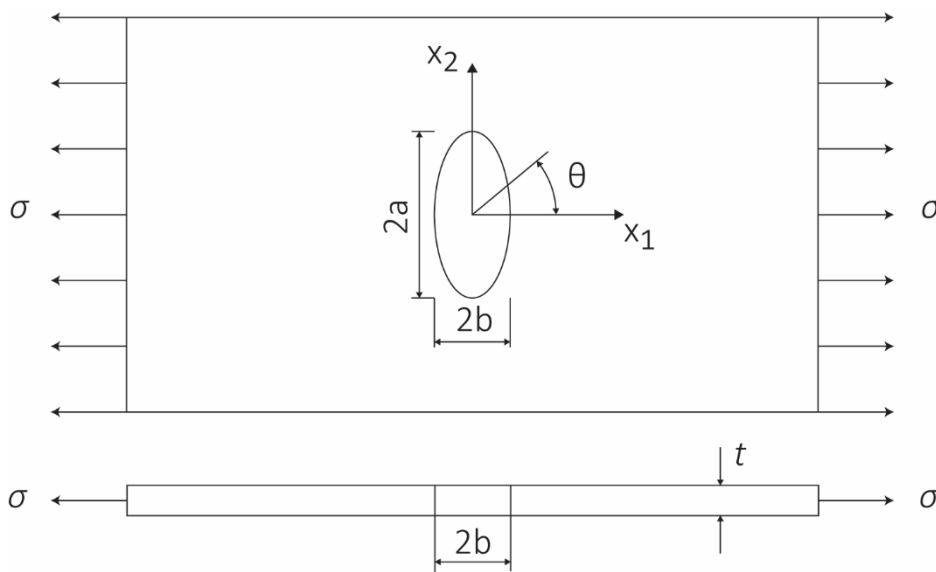


Figura 3-26 Placa fina com furo elítico.

### 3.12.2 Exemplo: cilindro de parede fina com furo

Consideremos agora um cilindro de parede fina de espessura  $t$  e raio médio  $R$  (para condições e nomenclatura ver Secção 3.7) com um pequeno furo na parede e sujeito a forças de tração  $P$  e momentos torsores  $T$ , representado na Figura 3-27. Pretende-se determinar a tensão máxima no cilindro e a sua localização.

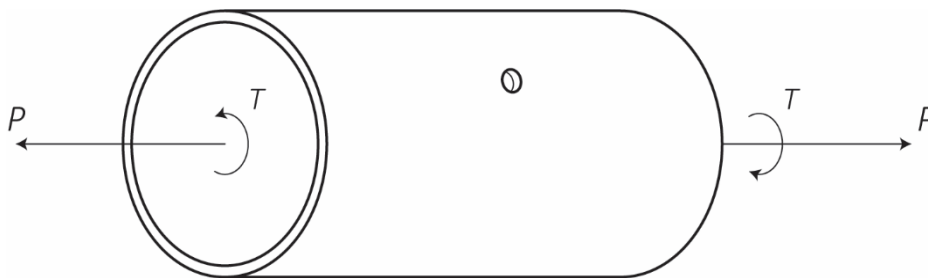


Figura 3-27 - Cilindro de parede fina com furo circular sujeito à tração e torção.

Longe do furo as tensões são dadas pelas fórmulas para cilindros de parede fina: a carga  $P$  origina uma tensão normal  $\sigma_{zz} = P / (2 \pi R t)$  que designaremos por  $\sigma$  e o momento  $T$  uma tensão de corte  $\sigma_{z\theta} = T / (2 \pi R^2 t)$  que designaremos por  $\tau$ . Note-se que se o momento torsor  $T$  for causado por um binário  $P R$ , em que  $P$  é uma força tangencial de valor igual à carga axial e  $R$  o braço igual ao raio médio do cilindro, então  $\sigma_{zz} = \sigma_{z\theta}$ .

As tensões principais e direções principais deste estado de tensão são, por (3.46),

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{zz} / 2 \pm \sqrt{(\sigma_{zz}^2 / 4 + \sigma_{z\theta}^2)} = \sigma / 2 \pm \sqrt{(\sigma^2 / 4 + \tau^2)}, \quad \text{tg } 2\theta = 2 \sigma_{z\theta} / \sigma_{zz} = 2 \tau / \sigma \quad (1.49)$$

e  $\sigma_2 = \sigma_{rr} = 0$ .

Para estudar a distribuição de tensões na zona do furo vamos admitir que o raio do cilindro  $R$ , a sua espessura  $t$  e o raio do furo  $a$  verificam a condição  $a^2 / (Rt) < 0.1$ . Nesse caso o cilindro de parede fina pode, na zona do furo, ser considerado como uma placa plana e utilizamos as expressões (3.48) para aí calcular a distribuição de tensões.

Se o cilindro fôr apenas tracionado,  $\sigma_1 = \sigma_{zz} = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  e  $\theta = 0^\circ$ . Neste caso a sua tensão máxima será  $\sigma_{\max} = 3 \sigma$  e ocorrerá na superfície do furo, nas extremidades dos diâmetros do furo normais à direção axial, como se viu acima.

Se o cilindro for apenas torcido,  $\sigma_1 = + \tau$ ,  $\sigma_3 = - \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$  e  $\theta = 45^\circ$ . Podemos utilizar as expressões (3.48) para calcular a distribuição de tensões na vizinhança do furo, sobrepondo a solução de um estado uniaxial de tração remoto na direção de  $\sigma_1$  com a solução de um estado de compressão uniaxial remoto na direção de  $\sigma_3$ : primeiro fazemos coincidir o eixo  $x$  local de (3.48) com a direção principal 1 e seguidamente fazemos coincidir o eixo  $x$  local de (3.48) com a direção principal 3; adicionamos em cada ponto as componentes correspondentes, sem esquecer a troca de sinal devido ao estado de compressão. A tensão máxima será  $\sigma_{\max} = 3 \tau + \tau = 4 \tau$  e ocorrerá na superfície do furo, nas extremidades dos diâmetros do furo que fazem  $45^\circ$  com a direções tangencial e axial. A tensão mínima será  $\sigma_{\min} = - \tau - 3 \tau = - 4 \tau$  e ocorrerá nas extremidades dos diâmetros ortogonais aos anteriores.

Quando o cilindro é solicitado simultaneamente à tracção e à torção, utiliza-se o procedimento anterior para determinar a tensão máxima na vinhança do furo:  $\sigma_{\max} = 3 \sigma_1 - \sigma_3$ , com  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  dados por (3.48) e esta tensão aparece no bordo do furo, nas extremidades dos diâmetros paralelos à direção principal 3.

### 3.13 Círculo de Mohr para estados planos de tensão

As equações (3.43) têm uma representação geométrica chamada círculo de Mohr. Com o auxílio de um exemplo, explicamos o método. Seja o estado plano de tensão num ponto dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e admitimos para este exemplo que  $\sigma_{xx} > \sigma_{yy} > 0$  e que  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} > 0$ , como representado na Figura 3-28.

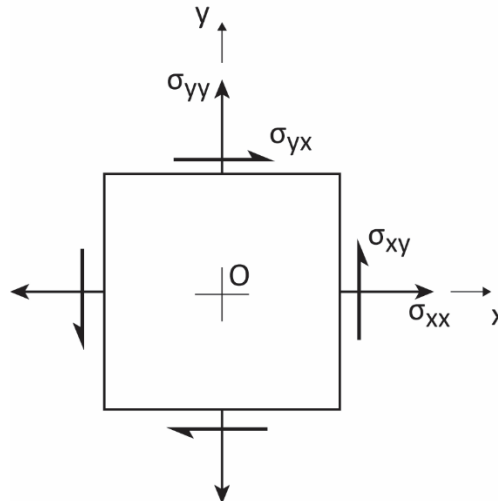


Figura 3-28 – Elemento de tensão; a cruz indica o centro do elemento.

Na construção geométrica referida, o estado de tensão é representado num plano chamado plano de Mohr, com as tensões normais marcadas no eixo horizontal  $\sigma$  e as tensões de corte no eixo vertical  $\tau$ .

As tensões normais são marcadas como positivas se forem de tração e como negativas no caso de serem de compressão.

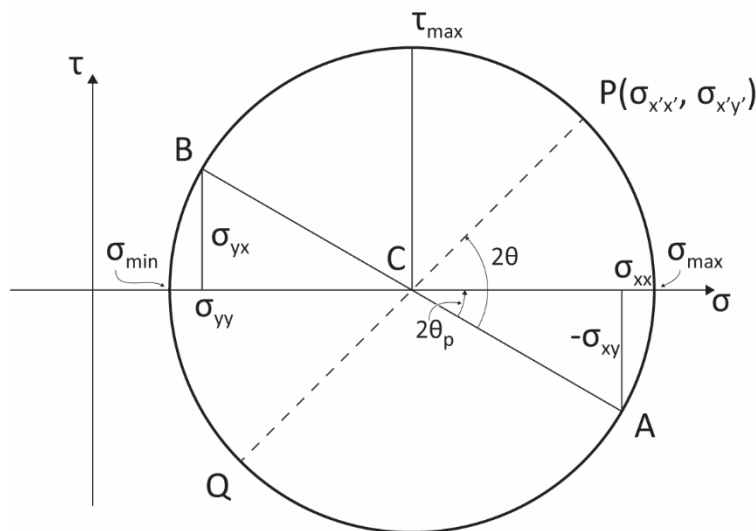


Figura 3-29 – Círculo de Mohr num estado plano de tensão.

As tensões de corte seguem uma convenção especial e específica para o círculo de Mohr: se derem origem a um momento no sentido dos ponteiros do relógio em torno do centro do elemento (ver Figura 3-28), são marcadas como positivas; se derem origem a um momento no sentido contrário são marcadas como negativas.

No plano de Mohr marquemos o ponto A cuja abcissa é  $\sigma_{xx}$  e cuja ordenada é  $-\sigma_{xy}$  e marquemos o ponto B cuja abcissa é  $\sigma_{yy}$  e cuja ordenada é  $\sigma_{yx}$ . De acordo com a convenção das tensões de corte no círculo de Mohr,  $\sigma_{xy}$  é marcada como negativa e  $\sigma_{yx}$  é marcada como positiva. Sublinhe-se que esta convenção é específica para o círculo de Mohr pois, como sabemos, o tensor das tensões é simétrico e  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ .

Seguidamente traça-se o segmento de reta AB que intersesta o eixo das abcissas em C. Com centro em C, desenha-se um círculo passando por A e B, que é o círculo de Mohr, ver Figura 3-29.

Para obter as componentes normais e de corte do vetor tensão que atua num plano cuja normal faz um ângulo  $\theta$  com o eixo do x no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, desenha-se o raio CP que faz um ângulo  $2\theta$  com CA (ver Figura 3-29). A abcissa de P dá a tensão normal que atua nesse plano e a ordenada de P, a tensão de corte. O ponto Q, na extremidade do diâmetro PQ, tem abcissa e ordenada que dão as tensões normais e de corte num plano cuja normal faz  $\theta + \pi / 2$  com o eixo do x.

Cada ponto do círculo de Mohr tem coordenadas que correspondem a um vetor tensão que atua num plano que faz um determinado ângulo com o eixo do x. O ponto marcado na Figura 3-29  $\sigma_{\max}$  corresponde a uma tensão principal pois a tensão de corte é nula. A sua abcissa é a soma da abcissa do centro do círculo,  $\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$  com o

raio do círculo,  $\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$ . O ponto marcado  $\sigma_{\min}$  é também uma tensão principal com abcissa dada pela diferença entre as parcelas anteriores. Relembrando as fórmulas (3.46),

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

vê-se que a construção geométrica círculo de Mohr se relaciona com os resultados da seção anterior (3.12): o

círculo tem centro no ponto C de abcissa  $\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$  e raio  $CA = CB = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$  e interseca o eixo horizontal nos pontos de abcissa  $C + CA$  e  $C - CA$  e que são as tensões principais. O ângulo  $\theta_p$  entre o referencial principal e o referencial x y é dado por  $\text{tg } 2\theta_p = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$ .

Para um estado de tensão tridimensional também existe uma construção gráfica que envolve três círculos de Mohr a unir cada par de tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  e que iremos apenas referir: na Figura 3-30 estão representados três círculos para o caso em que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 = 0$  (ou seja, um estado plano de tensão). Neste caso a tensão de corte máxima,  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ , corresponde ao raio do círculo maior.

Consideremos, por fim, três exemplos de estados planos de tensão típicos e sua representação geométrica, Figura 3-31:

- i) o estado de tensão “corte puro”, assim designado por existir um referencial onde apenas atuam apenas tensões de corte:  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_3 = -\sigma_1$  e o círculo de Mohr está centrado na origem;
- ii) o estado hidrostático de tensão ou compressão, assim designado por corresponder em 3D à ação de um fluido em repouso; aqui significa  $\sigma_1 = \sigma_2$  e o círculo reduz-se a um ponto;
- iii) o estado de tração uniaxial:  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 = 0$  e o círculo passa pela origem.

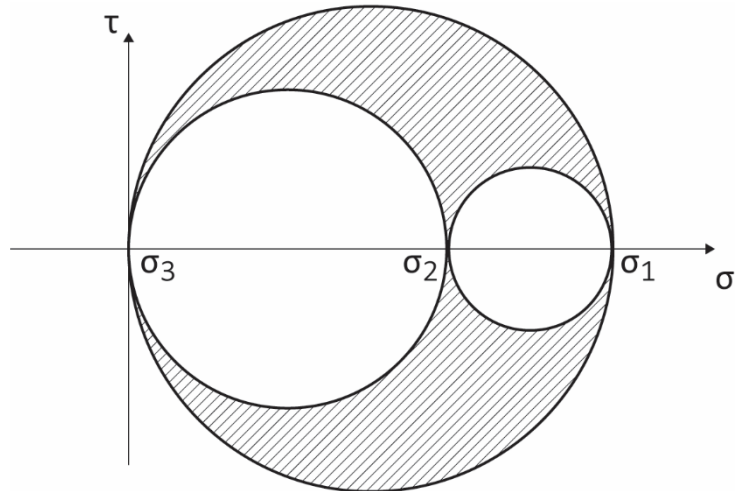


Figura 3-28 – Círculos de Mohr 3D.

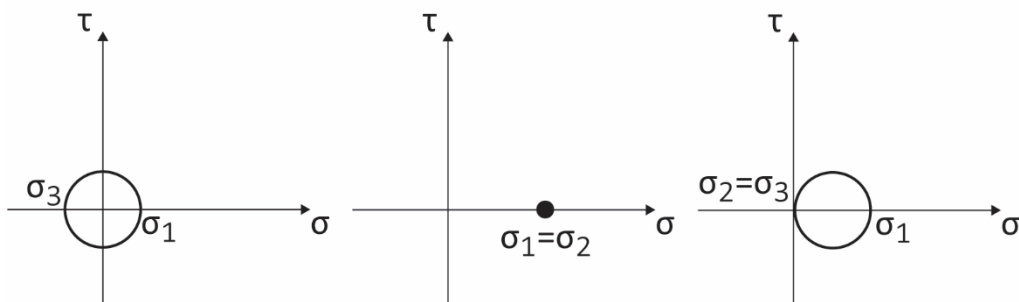
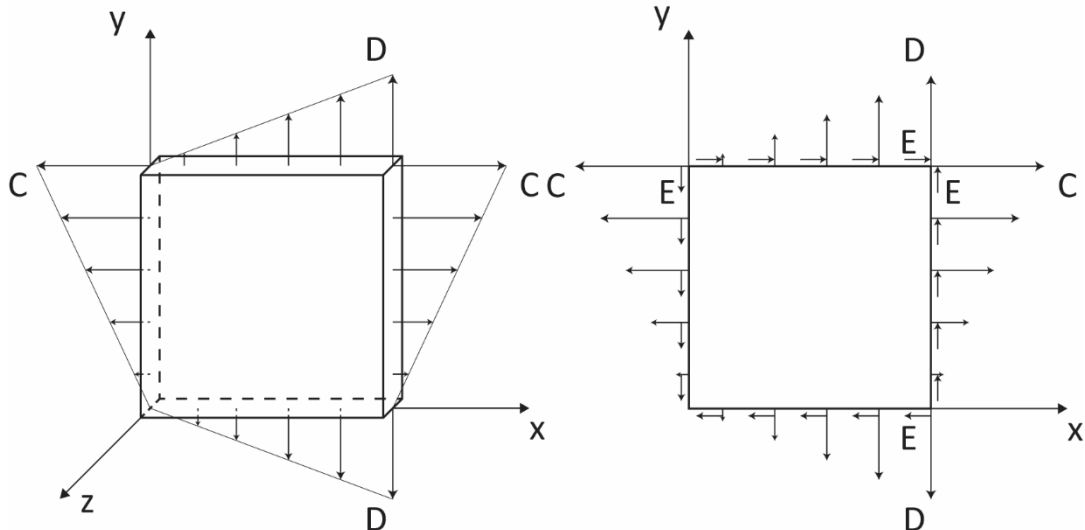


Figura 3-29 Estados de tensão plana: corte puro, hidroestático e uniaxial.

### 3.13.1 Exemplo

Uma placa fina quadrada de lado  $l$  e espessura  $t$  está em tensão plana. Conforme se mostra na Figura 3-32, é solicitada por cargas distribuídas aplicadas nos bordos que variam linearmente. Não há forças volúmicas. A distribuição das tensões normais na placa devido às cargas aplicadas é a seguinte:  $\sigma_{xx} = C/l y$ ,  $\sigma_{yy} = D/l x$  e  $\sigma_{zz} = 0$ , em que as constantes  $C \geq D > 0$ . Também existe uma distribuição de tensões de corte  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$  e a primeira questão é determinar qual a forma mais geral dessas tensões de corte que pode ser associada com as tensões normais dadas.



Figuras 3-30 e 3-33 Placa em tensão plana, com tensões normais que variam linearmente, sem e com tensões de corte

Devido à placa estar em tensão plana  $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$  em todos os pontos da placa e os outros campos não variam com  $z$ ; a distribuição imposta de tensões normais implica que  $\partial\sigma_{xx} / \partial x = 0$  e  $\partial\sigma_{yy} / \partial y = 0$ . As equações de equilíbrio sem forças volúmicas,

$$\partial\sigma_{xx} / \partial x + \partial\sigma_{yx} / \partial y + \partial\sigma_{zx} / \partial z = 0$$

$$\partial\sigma_{xy} / \partial x + \partial\sigma_{yy} / \partial y + \partial\sigma_{zy} / \partial z = 0$$

$$\partial\sigma_{xz} / \partial x + \partial\sigma_{yz} / \partial y + \partial\sigma_{zz} / \partial z = 0,$$

reduzem-se assim a

$$\partial\sigma_{yx} / \partial y = 0 \quad \text{e} \quad \partial\sigma_{xy} / \partial x = 0.$$

Mas  $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$ , o que implica que essas tensões de corte não variam nem com  $x$  nem com  $y$  e só podem ser constantes na placa.

Seja então a distribuição de tensões de corte dada por  $\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = E > 0$ , ver Figura 3-33. Qual a tensão de corte máxima na placa e em que ponto é que ocorre?

A tensão de corte máxima é dada pela fórmula (3.47)

$$\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = \sqrt{((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2)^2 + \sigma_{xy}^2}.$$

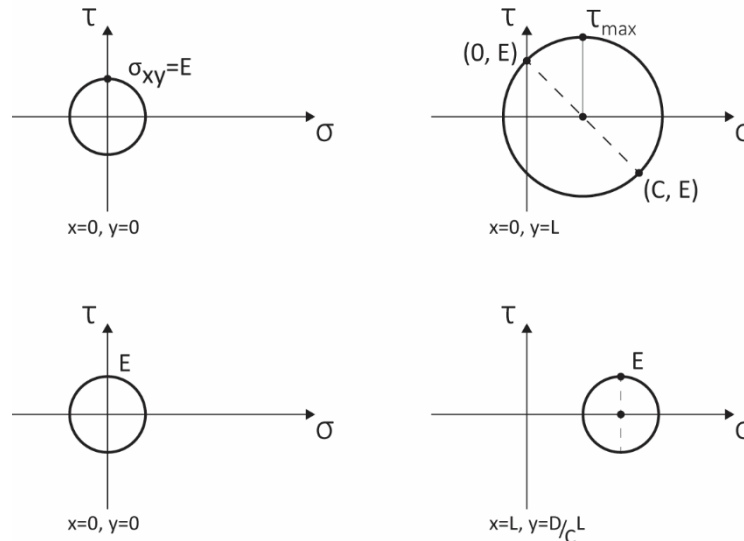


Figura 3-31 Círculos de Mohr para diversos pontos da placa; em cima, ao longo da reta  $x = 0$ ; em baixo, ao longo da reta  $y = (D/C)x$ .

Como a tensão de corte  $\sigma_{xy}$  é constante, o que faz variar a tensão de corte máxima na placa é a diferença  $|\sigma_{xx} - \sigma_{yy}|$ . Como as tensões normais variam linearmente, basta analisar essa diferença nos quatro cantos da placa: canto  $(0, 0)$ ,  $|\sigma_{xx} - \sigma_{yy}| = 0$ ; canto  $(l, 0)$ ,  $|\sigma_{xx} - \sigma_{yy}| = D$ ; canto  $(l, l)$ ,  $|\sigma_{xx} - \sigma_{yy}| = |C - D|$ ; canto  $(0, l)$ ,  $|\sigma_{xx} - \sigma_{yy}| = C$ . Conclui-se que, como  $C \geq D > 0$ , a tensão de corte máxima ocorre em  $(0, l)$ .

Na Figura 3-34 representam-se os círculos de Mohr para pontos da placa nas extremidades das retas  $x = 0$  e  $y = (D/C)x$ . Observe-se que no ponto  $(0, l)$   $\sigma_{max}$  e  $\sigma_{min}$  têm sempre sinais contrários, não se aplicando aí a observação do penúltimo parágrafo da Secção 3.12.

### 3.14 Problemas de Tensão

#### 3.14.1 Problema 3.1 – Tensões de corte numa chaveta

A haste e o veio representados na Figura 3-35 são solidários por intermédio de uma chaveta. A haste tem 500 mm de comprimento e duas forças  $F$  iguais e opostas aplicadas nas suas extremidades que equilibram o momento  $T$  aplicado no veio de 100 mm de diâmetro.

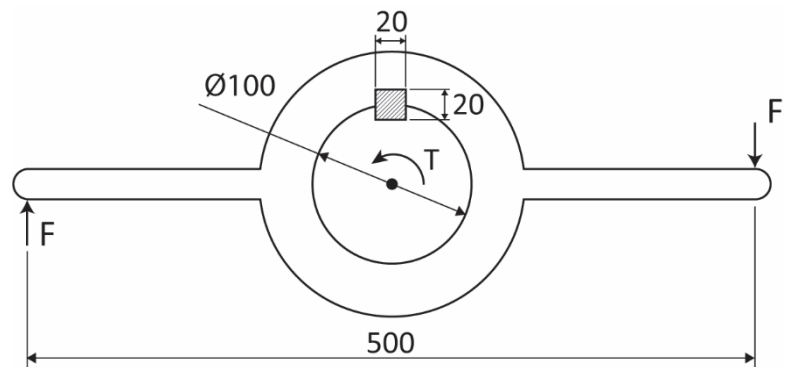


Figura 3-32 Chaveta num veio.

A chaveta tem 80 mm de comprimento e secção de  $20 \times 20$  mm<sup>2</sup>.

Calcular  $F$  máximo para que a tensão de corte na chaveta não ultrapasse 50 MPa.

### Resolução

Admite-se que o contacto entre a haste e o veio e entre ambos e a chaveta é sem atrito: a rotação relativa entre a haste e o veio é impedida apenas pela chaveta.

No entanto as forças de contacto entre os diversos componentes dependem da sua rigidez relativa e das folgas existentes. Começemos por considerar uma chaveta com folga. Quando as forças  $F$  e o momento  $T$  são aplicados, vão aparecer forças horizontais aplicadas na chaveta devido à acção da haste e do veio. Estas forças não são colineares e tendem a fazer rodar a chaveta. Quando se atinge o equilíbrio podemos ter a situação representada na Figura 3-36: duas forças iguais e opostas  $P$  aplicadas na chaveta, colineares e normais à sua superfície devido à ausência de atrito; se existirem outros pares de forças iguais e opostas devido ao contacto de cantos opostos da chaveta com as superfícies dos escatéis do veio e da haste, não haverá colinearidade das duas forças principais.

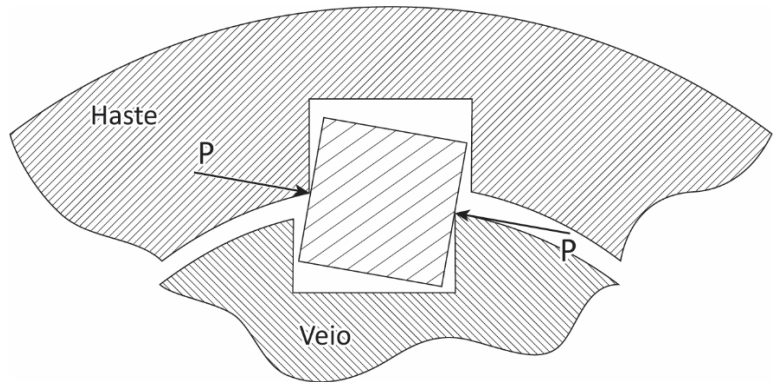


Figura 3-33 Chaveta com folga em equilíbrio.

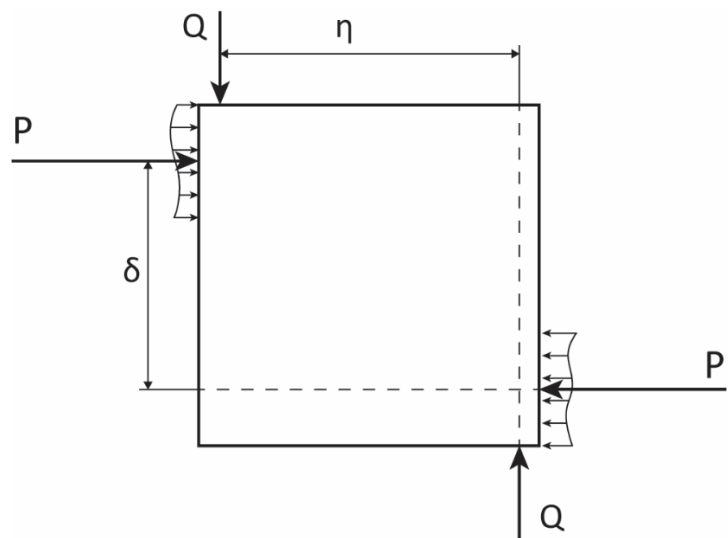


Figura 3-34 Corpo livre da chaveta sem folga.

Consideremos agora a situação em que não há folgas, ver Figura 3-37 onde se representa a chaveta como corpo livre. A força horizontal aplicada na chaveta pela haste está distribuída na metade superior da face vertical esquerda e a aplicada pelo veio está distribuída na metade inferior da face vertical direita. As resultantes dessas forças são iguais e opostas mas não são colineares, sendo a distância entre as suas linhas de ação  $\delta$ . Designadas por  $P$  geram um momento  $P \delta$  que é equilibrado por forças verticais iguais e opostas distribuídas nas faces horizontais da chaveta devido ao contacto com a haste e veio. Designemos as resultantes dessas forças verticais por  $Q$ ; sendo não colineares, dão origem ao momento  $Q \eta$  em que  $\eta$  é o braço. Verifica-se que os pontos de aplicação das forças  $Q$  está mais próximo dos cantos da chaveta do que os das forças  $P$ , ou seja,  $\eta > \delta$ . Como  $P \delta = Q \eta$  por equilíbrio de momentos,  $P > Q$ .

Não sendo as forças aplicadas na chaveta colineares, o material da chaveta tem localmente tendência a deslizar um sobre o outro em vez de alongar ou encurtar (o que acontece quando as forças são colineares) e a tensão é tangente à superfície em que está aplicada. Trata-se de uma tensão de corte  $\tau$  e o seu valor médio obtém-se dividindo a força pela área da superfície onde se distribui. Neste problema  $\tau = P / (80 \times 20)$  MPa e não consideramos  $Q$ , uma vez que  $P > Q$ .



Para obter P em função de F considere-se o corpo livre formado pela haste sem veio nem chaveta, Figura 3-38.

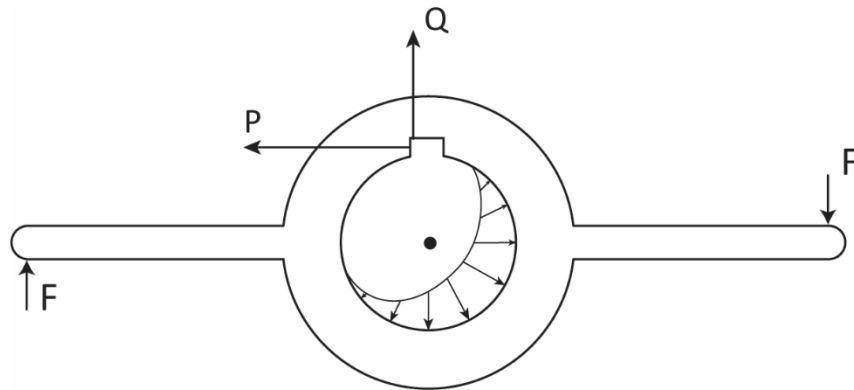


Figura 3-35 Corpo livre da haste.

As forças P e Q aplicadas pela chaveta na haste são equilibradas por forças distribuídas de contacto entre a haste e o veio. Não havendo atrito essas forças são normais à superfície de contacto, um cilindro de diâmetro 100 mm, e o seu momento relativamente ao eixo do cilindro é nulo. Por essa razão, ao se fazer equilíbrio de momentos das forças aplicadas na chaveta em relação ao eixo do cilindro, apenas se deve considerar o momento devido a F, P e Q,

$$\Sigma M_o = -F \times 500 + P \times (50 + \delta/2) - Q \times \eta/2 = -F \times 500 + P \times (50 + \delta/2) - P \times \delta/2 = -F \times 500 + P \times 50 = 0,$$

donde se conclui que  $P = 10 F$ .

Juntando os resultados já obtidos, para que a tensão de corte na chaveta não ultrapasse 50 MPa,

$$\tau = P / (80 \times 20) = 10 F / (80 \times 20) \leq 50 \text{ MPa}, \quad F \leq 8 \text{ kN}.$$

### 3.14.2 Problema 3.2 - Barra sujeita ao peso próprio com carga concentrada

Determine a força axial ao longo de uma barra de secção quadrada de área  $A$ , comprimento  $L$  e feita de material com massa específica  $\rho$ . As dimensões da secção são pequenas em comparação com o seu comprimento, isto é  $L \gg \sqrt{A}$ . A barra está sujeita ao campo gravítico, tem uma força concentrada  $F$  aplicada a meio da barra na direção do seu eixo e sentido contrário ao da força gravítica e está apoiada na sua base inferior, ver Figura 3-39.

Resolução:

As equações de equilíbrio (3.17) reduzem-se, como no exemplo 3.6.1, a

$$\partial \sigma_{33} / \partial x_3 + \rho g = 0,$$

admitindo-se que  $\sigma_{33}$  depende apenas de  $x_3$ . A força de volume aparece agora com o sinal trocado relativamente ao exemplo 3.6.1 porque se inverteu o sentido do eixo  $x_3$ . A força interna axial na secção da barra, denominada  $N$ , é dada por

$$N(x_3) = A \sigma_{33}(x_3),$$

em que  $A$  é a área da secção, ver Figura 3-40. Como há uma força concentrada  $F$  a atuar em  $x_3 = L/2$ ,  $N(x_3)$  vai ter uma descontinuidade em  $x_3 = L/2$ . Para a calcular considera-se uma fatia fina da barra, de  $L/2 - \epsilon$  a  $L/2 + \epsilon$ ; o equilíbrio de forças nessa fatia é dado por

$$-N(L/2 - \epsilon) - F + N(L/2 + \epsilon) + 2 \rho g A \epsilon = 0,$$

que, quando  $\epsilon$  tende para 0, nos dá a condição de descontinuidade de  $N$  em  $x_3 = L/2$ :

$$N(L/2 +) - N(L/2 -) = F.$$

Para determinar  $N(x_3)$  a equação a resolver é a equação de equilíbrio multiplicada pela área da secção,

$$dN / dx_3 + \rho g A = 0,$$

sabemos que não há forças aplicadas no topo da barra e que existe uma descontinuidade onde a força concentrada está aplicada. A formulação do problema é então: determinar  $N(x_3)$ , tal que

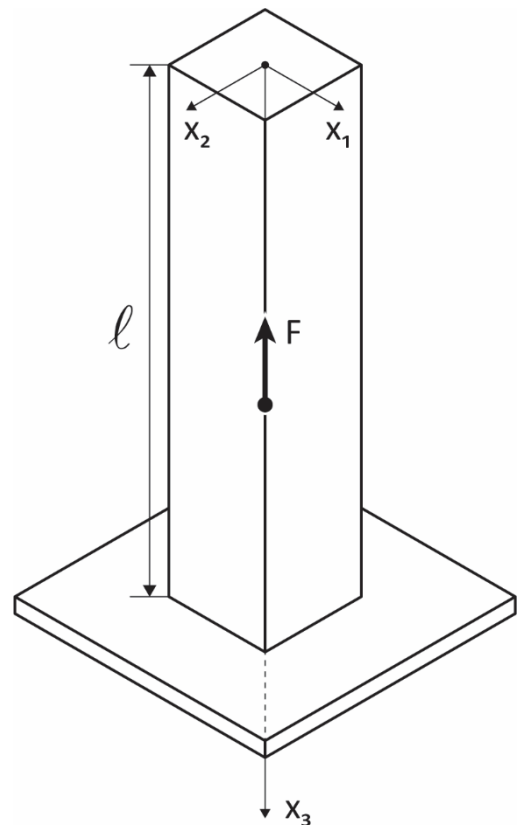


Figura 3-36 Barra apoiada sujeita ao peso próprio e a carga concentrada.

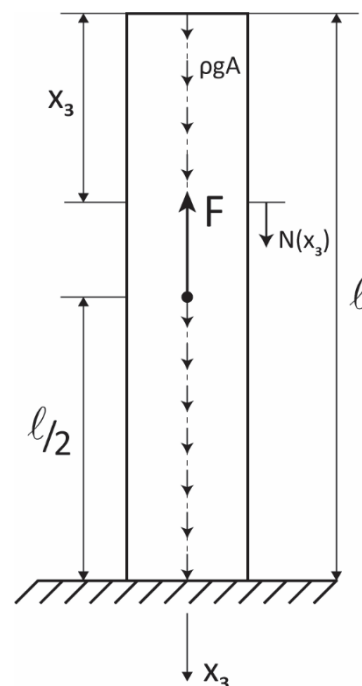


Figura 3-40 Determinação da força axial  $N$  ao longo de barra apoiada sujeita a carga distribuída e carga concentrada.

$$dN / dx_3 + \rho g A = 0, \quad 0 < x_3 < L/2, \quad L/2 < x_3 < L,$$

$$N(0) = 0,$$

$$N(L/2 +) - N(L/2 -) = F.$$

Integrando,

$$N = -\rho g A x_3 + K.$$

Para  $0 < x_3 < L/2$ , a constante de integração  $K$  determina-se pela condição do topo da barra ser uma superfície livre, isto é,

$$N = 0 \text{ em } x_3 = 0 \rightarrow K = 0.$$

Para a região  $L/2 < x_3 < L$  utilizamos a condição de descontinuidade anteriormente estabelecida com  $N(L/2 -) = -\rho g A L/2$ ,

$$N(L/2 +) + \rho g A L/2 = F,$$

que nos permite determinar  $K$  para  $L/2 < x_3 < L$ ,

$$-\rho g A L/2 + K + \rho g A L/2 = F \rightarrow K = F.$$

A força axial ao longo da barra é dada por

$$N(x_3) = -\rho g A x_3, \quad 0 < x_3 < L/2,$$

$$N(x_3) = -\rho g A x_3 + F, \quad L/2 < x_3 < L.$$

### 3.14.3 Problema 3.3 - Tensões Normais, de Corte e Tensões e Direções Principais

As componentes do tensor das tensões num ponto  $P$  são dadas em unidades apropriadas por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

- o vetor tensão  $\mathbf{t}$  em  $P$  que atua num plano normal ao eixo  $x_1$ ;
- o vetor tensão  $\mathbf{t}$  em  $P$  que atua num plano paralelo ao plano  $2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ ;
- a componente normal  $\sigma_n$  do vetor tensão no plano de b);
- a componente de corte  $\tau$  do vetor tensão no plano de b);
- as tensões principais em  $P$ ;
- as correspondentes direções principais.

#### Resolução

- O plano normal ao eixo  $x_1$  tem normal unitária  $(1, 0, 0)$ . Pela fórmula de Cauchy,  $t_i = \sigma_{ij} n_j$ , o vetor tensão é

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) A normal unitária é  $\frac{1}{3} (2, -2, -1)$  e o vetor tensão é

$$\mathbf{t} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

c) A componente normal  $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 1/9 [2 \times (-5) - 2 \times (-10) - 1 \times (-7)] = 17/9$ .

d) A componente de corte  $\tau = \sqrt{(|\mathbf{t}|^2 - \sigma_n^2)} = \sqrt{((-5)^2 + (-10)^2 + (-7)^2) / 9 - 17^2 / 9^2} = 1/9 \sqrt{1277}$ .

e) As tensões principais são solução de

$$\begin{vmatrix} 1 - \sigma & 2 & 3 \\ 2 & 4 - \sigma & 6 \\ 3 & 6 & 1 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

conduzindo à equação característica  $\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = \sigma^3 - 5 \sigma^2 - 91/2 \sigma - 0 = 0$ , com os coeficientes dados por

$$I_1 = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ii} = 1 + 4 + 1 = 6,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - \text{tr } (\boldsymbol{\sigma}^2)) = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) = \frac{1}{2} (6^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 3^2 + 6^2 + 1^2)) = -40,$$

$$I_3 = \det \boldsymbol{\sigma} = \epsilon_{ijk} \sigma_{1i} \sigma_{2j} \sigma_{3k} = 1 \times 4 \times 1 + 2 \times (2 \times 6 \times 3) - 3 \times 4 \times 3 - 2 \times 2 \times 1 - 6 \times 6 \times 1 = 0.$$

Uma das raízes é nula e as outras duas obtêm-se pela fórmula resolvente das equações de segundo grau com o resultado  $\sigma_1 = 10$ ,  $\sigma_2 = 0$  e  $\sigma_3 = -4$ .

f) A direção principal que corresponde a, por exemplo,  $\sigma_1 = 10$  é dada pela solução do sistema

$$\begin{aligned} -9 n_1 + 2 n_2 + 3 n_3 &= 0 \\ 2 n_1 - 6 n_2 + 6 n_3 &= 0 \\ 3 n_1 + 6 n_2 - 9 n_3 &= 0, \end{aligned}$$

que é o vetor unitário  $\mathbf{n}^1 = 1/\sqrt{70} (3, 6, 5)$ . As outras duas direções principais são  $\mathbf{n}^2 = 1/\sqrt{5} (-2, 1, 0)$  e  $\mathbf{n}^3 = 1/\sqrt{14} (1, 2, -3)$ .

### 3.14.4 Problema 3.4 – Equilíbrio do campo de tensões numa viga

Uma viga encastrada com secção retangular ocupa a região  $-a \leq x_1 \leq a$ ,  $-h \leq x_2 \leq h$ ,  $0 \leq x_3 \leq l$ . O encastramento é em  $x_3 = l$  e na face  $x_3 = 0$  está aplicada uma carga P na direção do eixo  $x_2$ , ver Figura 3-41. O tensor das tensões na viga tem as seguintes componentes:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A + B x_2^2 \\ 0 & A + B x_2^2 & C x_2 x_3 \end{bmatrix}$$

onde A, B e C são constantes. Determine

- qual a relação entre B e C para que esta distribuição de tensões satisfaça as equações de equilíbrio sem forças volúmicas;
- as condições de fronteira nas faces laterais da viga e a relação entre A e B para que a distribuição de tensões satisfaça essas condições de fronteira;
- as condições de fronteira nas faces  $x_3 = 0, l$  em termos de forças resultantes e as relações entre a força aplicada P e A, B e C;

- d) as condições de fronteira nas faces  $x_3 = 0, l$  em termos de momentos resultantes com o momento de encastramento em  $x_3 = l$  em termos de  $P$ ;
- e) a força resultante que atua no corte pelo plano  $x_2 = 0$ ;
- f) a força resultante que atua no corte pelo plano  $x_2 = -h / a x_1$ .

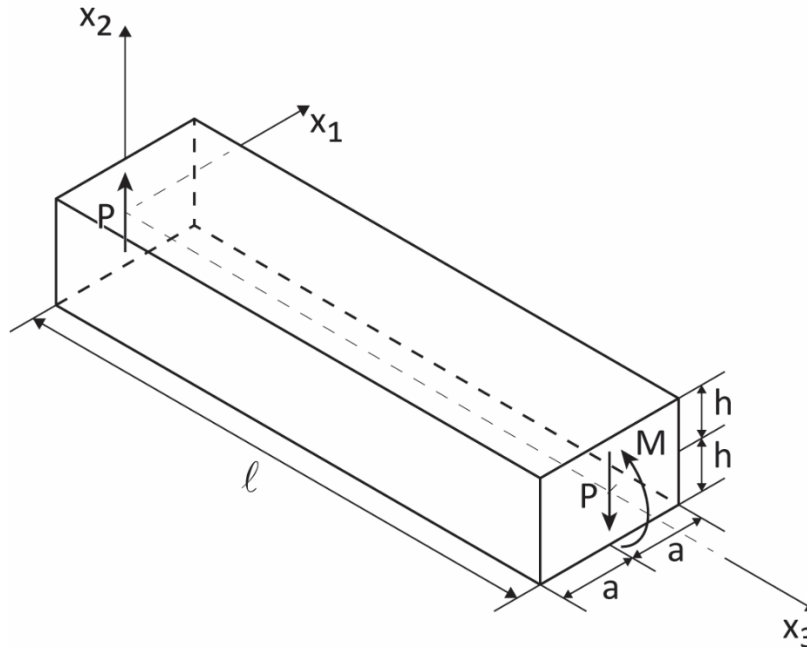


Figura 3-41 Viga encastada em  $x_3 = l$ , flectida por carga  $P$  aplicada em  $x_3 = 0$ .

**Resolução:**

- a) Substituindo as componentes do tensor das tensões nas equações de equilíbrio sem forças volúmicas obtemos

$$\partial\sigma_{11} / \partial x_1 + \partial\sigma_{21} / \partial x_2 + \partial\sigma_{31} / \partial x_3 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\partial\sigma_{12} / \partial x_1 + \partial\sigma_{22} / \partial x_2 + \partial\sigma_{32} / \partial x_3 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\partial\sigma_{13} / \partial x_1 + \partial\sigma_{23} / \partial x_2 + \partial\sigma_{33} / \partial x_3 = 0 + 2 B x_2 + C x_2 = 0$$

e a distribuição de tensões dada verifica as equações de equilíbrio desde que  $2 B + C = 0$ .

- b) As faces  $x_2 = \pm h$  são superfícies livres, a normal unitária é  $(0, \pm 1, 0)$  e o vetor tensão é

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A + B h^2 \\ 0 & A + B h^2 & C h x_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A + B h^2 \end{pmatrix},$$

ou o seu simétrico em  $x_2 = -h$ . A condição de superfícies livres implica que  $A + B h^2 = 0$ .

- c) Na face  $x_3 = 0$  as condições são

$$F_1 = - \int_{-h}^h \int_{-a}^a \sigma_{31} dx_1 dx_2 = 0, F_2 = - \int_{-h}^h \int_{-a}^a \sigma_{32} dx_1 dx_2 = P, F_3 = - \int_{-h}^h \int_{-a}^a \sigma_{33} dx_1 dx_2 = 0. \text{ As condições em } F_1 \text{ e } F_3 \text{ são verificadas e na direção } x_2 \text{ temos a relação } -4 a (A h + B h^3 / 3) = P. \text{ Utilizando as relações anteriores entre } A, B \text{ e } C \text{ obtemos } C = -3 P / (4 a h^3).$$

Na face  $x_3 = l$  as condições são

$$F_1 = \int_{-h}^h \int_{-a}^a \sigma_{31} dx_1 dx_2 = 0, F_2 = \int_{-h}^h \int_{-a}^a \sigma_{32} dx_1 dx_2 = -P, F_3 = \int_{-h}^h \int_{-a}^a \sigma_{33} dx_1 dx_2 = 0 \text{ e são verificadas.}$$

- d) Na face  $x_3 = 0$  as condições em termos de momentos resultantes são

$$M_1 = - \int_{-h}^h \int_{-a}^a x_2 \sigma_{33} dx_1 dx_2 = 0, M_2 = - \int_{-h}^h \int_{-a}^a x_1 \sigma_{33} dx_1 dx_2 = 0, M_3 = - \int_{-h}^h \int_{-a}^a (x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31}) dx_1 dx_2 = 0.$$

Na face  $x_3 = l$  as condições são

$M_1 = \int_{-h}^h \int_{-a}^a x_2 \sigma_{33} dx_1 dx_2 = -P l$ ,  $M_2 = \int_{-h}^h \int_{-a}^a x_1 \sigma_{33} dx_1 dx_2 = 0$ ,  $M_3 = \int_{-h}^h \int_{-a}^a (x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31}) dx_1 dx_2 = 0$ . O primeiro integral tem o valor  $\int_{-h}^h \int_{-a}^a x_2 C x_2 l dx_1 dx_2 = 4 a h^3 l C / 3$  e utilizando a relação anterior entre C e P verificamos a primeira condição. As outras duas condições também são verificadas pois as funções integrandas são funções ímpares numa região de integração simétrica.

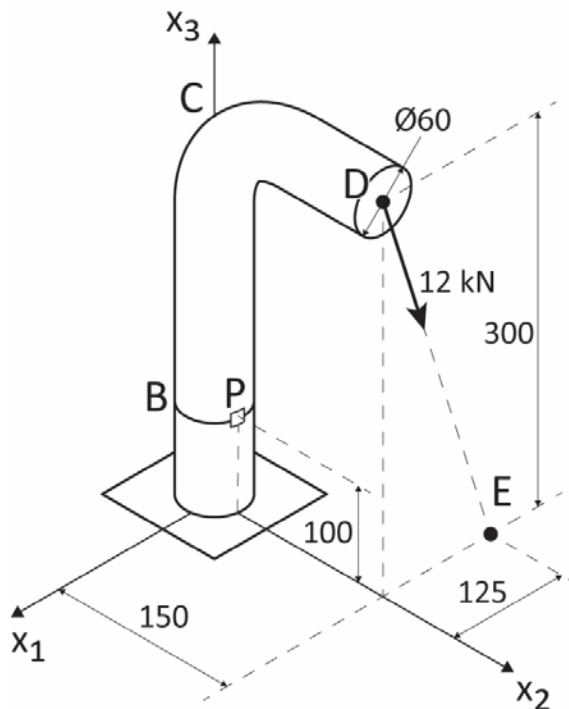
- e) O vetor tensão que atua no corte pelo plano  $x_2 = 0$  é  $(0, 0, A)$ , constante nesse corte, e a força resultante é  $(0, 0, 2 a l A) = (0, 0, 3 l P / (4 h))$  pois  $A = 3 P / (8 a h)$ . Esta força equilibra na direção  $x_3$  a resultante das tensões  $\sigma_{33}$  em  $x_3 = l$ . Para simplificar o cálculo dessa resultante, nota-se que aí  $\sigma_{33}$  é constante com  $x_1$  e linear com  $x_2$  sendo o seu valor  $C l a h^2$  ou, usando  $C = -3 P / (4 a h^3)$ ,  $-3 l P / (4 h)$ .
- f) O vetor tensão que atua no corte pelo plano  $x_2 = -h / a x_1$  é dado por

$$\mathbf{t} = 1/\sqrt{h^2 + a^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A + B x_2^2 \\ 0 & A + B x_2^2 & C x_2 x_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = a/\sqrt{h^2 + a^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A + B x_2^2 \end{pmatrix}.$$

A força resultante tem a direção de  $x_3$  e magnitude  $F_3 = l \int_{-h}^h (A + B x_2^2) a/\sqrt{h^2 + a^2} \sec \gamma dx_2$  em que  $\gamma$  é o ângulo entre a normal ao plano de corte e o eixo  $x_1$ ,  $\cos \gamma = h/\sqrt{h^2 + a^2}$ . Fazendo a integração,  $F_3 = 2 a l (A + \frac{1}{3} B h^2) = l P / (2 h)$ , com  $B = -A / h^2$  e  $A = 3 P / (8 a h)$ . Esta força é equilibrada pela resultante das tensões  $\sigma_{33}$  em  $x_3 = l$ ,

$$-F_3 = \int_{-h}^h \int_{-a x_2/h}^a \sigma_{33} dx_1 dx_2 = \int_{-h}^h \int_{-a x_2/h}^a C l x_2 dx_1 dx_2 = \frac{2}{3} a C l h^2 = -l P / (2 h), \text{ com } C = -3 P / (4 a h^3).$$

### 3.14.5 Problema 3.5 – Tensões devidas a esforços combinados



Uma força de 12 kN está aplicada no poste em L de 60 mm de diâmetro que se mostra na Figura 3-42. No ponto P determine as tensões e direções principais, a tensão de corte máxima e as direções em que ocorre.

Figura 3-42 Poste encastado sujeito a carga concentrada.

#### Resolução:

As tensões em elementos estruturais com dimensões da secção reta muito inferiores às dimensões longitudinais determinam-se a) calculando o sistema de forças e momentos que aplicado no centroide da secção que contém o ponto em questão mantém em equilíbrio o corpo livre escolhido, b) utilizando as teorias conhecidas de barras, veios e vigas para calcular as tensões nessa secção e o estado de tensão no ponto, c) calculando as tensões e

direções principais desse estado de tensão e d) calculando as tensões de corte máximas e direções em que ocorrem.

- a) O centroide da secção que contém o ponto P está localizado, relativamente ao referencial que se mostra na figura, em (0, 0, 100) e a força de componentes  $(-12 \times 125/325, 0, -12 \times 300/325)$  está aplicada em (0, 150, 300).

A força **F** e o momento **M** existentes no centroide dessa secção têm componentes  $(F_1, F_2, F_3)$  e  $(M_1, M_2, M_3)$ , respetivamente.

Para determinar **F** e **M** considere-se as equações de equilíbrio de forças do corpo livre BCD, que é formado pelo poste em L desde a secção que contém o ponto P até á secção onde está aplicada a força de 12 kN,  $F_1 + (-12 \times 125/325) = 0, F_2 + 0 = 0, F_3 + (-12 \times 300/325) = 0,$   $\mathbf{F} = (12 \times 125/325, 0, 12 \times 300/325)$  kN.

A equação de equilíbrio de momentos do mesmo corpo livre relativamente ao centroide da secção que contém o ponto P permite determinar o momento **M**,

$M_1 + 150 \times (-12 \times 300/325) = 0, M_2 + (300 - 100) \times (-12 \times 125/325) = 0, M_3 + (-150 \times (-12 \times 125/325)) = 0,$   
 $\mathbf{M} = (540/325, 300/325, -225/325)$  kN · m.

Nota-se que  $F_1$  é um esforço transversal e  $F_3$  um esforço axial;  $M_1$  e  $M_2$  são momentos fletores e  $M_3$  um momento torsor.

- b) As tensões na secção são dadas pelas fórmulas conhecidas de Mecânica dos Materiais:

$$\sigma_{33} = -F_3 / A - M_1 x_2 / I_1 + M_2 x_1 / I_2, \sigma_{31} = -F_1 Q_2 / (I_2 t_2) + M_3 x_2 / J, \sigma_{32} = -F_2 Q_1 / (I_1 t_1) - M_3 x_1 / J,$$

em que A é a área da secção,  $I_1$  e  $I_2$  os segundos momentos de área,  $Q_1$  e  $Q_2$  os primeiros momentos de área e  $t_1$  e  $t_2$  as espessuras da secção no ponto P, relativamente aos eixos  $x_1$  e  $x_2$ , e  $J = I_1 + I_2$  o momento polar. De notar que os sinais das diversas expressões têm em atenção que a normal exterior à secção que passa pelo ponto P aponta no sentido negativo de  $x_3$ .

Os valores numéricos neste problema são os seguintes:

$A = \pi \times 30^2 = 2827 \text{ mm}^2, I_1 = I_2 = \pi \times 30^4 / 4 = 636172 \text{ mm}^4, Q_1 = 0, Q_2 = (\frac{1}{2} \pi \times 30^2) \times (4/3 \times 30 / \pi) = 18000 \text{ mm}^3, J = I_1 + I_2 = 1272345 \text{ mm}^4, t_1 = 0 \text{ mm } t_2 = 60 \text{ mm},$  para o ponto P = (0, 30, 100) mm,

$$\sigma_{33} = -12 \times 300/325 / 2827 \times 10^3 + 540/325 \times 30 / 636172 \times 10^6 + 300/325 \times 0 / 636172 \times 10^6 = -3.91837 + 78.353 + 0 = 74.435 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{31} = -12 \times 125/325 \times 18000 / (636172 \times 60) \times 10^3 + (-225/325) \times 30 / 1272345 \times 10^6 = -2.17648 - 16.3236 = 18.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{32} = -0 \times 0 / (636172 \times 0) - M_3 \times 0 / 1272345 = 0$$

O ponto P está à superfície do poste, que é uma superfície livre, e as componentes  $\sigma_{21} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0$ . Por último admite-se que, de acordo com a teoria de Mecânica dos Materiais que estamos a usar, a componente  $\sigma_{11} = 0$ . O tensor das tensões no ponto P é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18.5 & 0 & 74.435 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

O estado de tensão é plano pois a tensão  $\sigma_{22}$  é uma das tensões principais e é nula.

- c) A determinação das tensões principais para um estado de tensão plano utiliza as fórmulas (3.46)

$$\sigma_{\max} = (\sigma_{11} + \sigma_{33})/2 + \sqrt{((\sigma_{11} - \sigma_{33})/2)^2 + \sigma_{13}^2} = (0 + 74.435)/2 + \sqrt{((0 - 74.435)/2)^2 + 18.5^2} = 37.22 + 41.56 = 78.78 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{\min} = (\sigma_{11} + \sigma_{33})/2 - \sqrt{((\sigma_{11} - \sigma_{33})/2)^2 + \sigma_{13}^2} = (0 + 74.435)/2 - \sqrt{((0 - 74.435)/2)^2 + 18.5^2} = 37.22 - 41.56 = -4.34 \text{ MPa,}$$

sendo a tensão principal intermédia,  $\sigma_{\text{int}} = 0$ .

As direções principais são calculadas pela fórmula

$\text{tg}(2\theta_p) = 2 \sigma_{13} / (\sigma_{11} - \sigma_{33}) = 2 \times 18.5 / (-74.435) = -0.4971$ ,  $2\theta_p = -26.43^\circ$ ,  $\theta_p = -13.21^\circ$ ,  
 donde se conclui que o eixo principal 1 faz um ângulo de  $13.21^\circ$  com o eixo  $x_3$ , um ângulo de  $90^\circ$  com  $x_2$  e um ângulo de  $103.21$  com  $x_1$ ; o eixo principal 2 tem a direção de  $x_2$  e o eixo principal 3 é ortogonal aos outros dois.

d) A tensão de corte máxima é dada por (3.47)

$\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = \sqrt{((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2)^2 + \sigma_{xy}^2} = \sqrt{((0 - 74.435)/2)^2 + 18.5^2} = 41.56 \text{ MPa}$  e ocorre em planos cujas normais fazem ângulos de  $31.785^\circ$  ou  $58.215^\circ$  com  $x_3$  e são ortogonais a  $x_2$ .

### 3.14.6 Problema 3.6 – Distribuição de tensões e planos de simetria; transformação de coordenadas

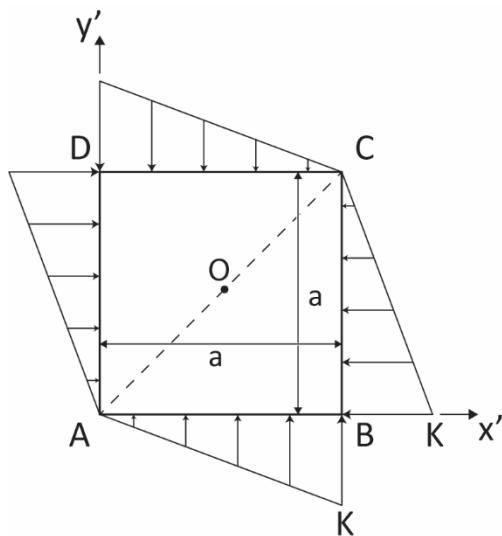


Figura 3-43 Placa fina em tensão plana.

Uma placa fina quadrada ABCD de lado  $a$  e espessura  $t$  está em tensão plana. Conforme se mostra na Figura 3-43, é solicitada por cargas distribuídas aplicadas nos bordos que variam linearmente de  $0$  a  $-K$  MPa,  $K > 0$ . Não há forças volúmicas. Determine:

- as condições de fronteira em  $x' = 0$ ,  $a$  e em  $y' = 0$ ,  $a$ ;
- as forças resultantes que atuam na fronteira da placa;
- os planos de simetria do problema e o vetor tensão nos planos de simetria;
- a distribuição de tensões ao longo de  $x' = \frac{1}{2}a$  e  $y' = \frac{1}{2}a$ .
- semelhanças e diferenças deste problema com o Problema 3.1 - Tensões de corte numa chaveta.

#### Resolução:

- As condições de fronteira em  $x' = 0$  são  $\sigma_{x'x'} = -K/a y'$ ,  $\sigma_{x'y'} = 0$  e  $\sigma_{x'z'} = 0$  e em  $x' = a$ ,  $\sigma_{x'x'} = K(y'/a - 1)$ ,  $\sigma_{x'y'} = 0$  e  $\sigma_{x'z'} = 0$ .  
 As condições de fronteira em  $y' = 0$  são  $\sigma_{y'y'} = -K/a x'$ ,  $\sigma_{y'x'} = 0$  e  $\sigma_{y'z'} = 0$  e em  $y' = a$ ,  $\sigma_{y'y'} = K(x'/a - 1)$ ,  $\sigma_{y'x'} = 0$  e  $\sigma_{y'z'} = 0$ .
- Tratando-se de forças distribuídas que variam linearmente, a resultante em  $x' = 0$  tem componentes  $(\frac{1}{2} K a t, 0, 0)$  e ponto de aplicação  $(0, \frac{2}{3} a, 0)$  e em  $x' = a$  tem componentes  $(-\frac{1}{2} K a t, 0, 0)$  e ponto de aplicação  $(a, \frac{1}{3} a, 0)$ .  
 A força resultante em  $y' = 0$  tem componentes  $(0, \frac{1}{2} K a t, 0)$  e ponto de aplicação  $(\frac{2}{3} a, 0, 0)$  e em  $y' = a$  tem componentes  $(0, -\frac{1}{2} K a t, 0)$  e ponto de aplicação  $(\frac{1}{3} a, a, 0)$ .
- A placa do problema tem a geometria de um quadrado de lado  $a$  e espessura  $t$ . Considere os planos normais à placa que contêm as diagonais AC e BD do quadrado. Cada plano divide a placa em dois triângulos retângulos isósceles simétricos que são a imagem um do outro dada por um espelho colocado nesses planos. Essa imagem-espelho verifica-se relativamente a todas as características de cada triângulo: geometria, cargas aplicadas e material de que os triângulos são feitos. Esses planos são os planos de simetria do problema.



O vetor tensão que atua nos planos de simetria tem uma característica importante: a sua componente de corte é nula. Para o compreender considerem-se os corpos livres formados pelos triângulos ABC e ACD. Num ponto genérico das hipotenusas atua um vetor tensão  $\mathbf{t}(\mathbf{x}', \mathbf{n})$  com componente normal  $\sigma_n$  e de corte  $\tau$  e pela lei de Newton de ação e reação  $\mathbf{t}(\mathbf{x}', \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}', -\mathbf{n})$  conforme está representado na Figura 3-44a.

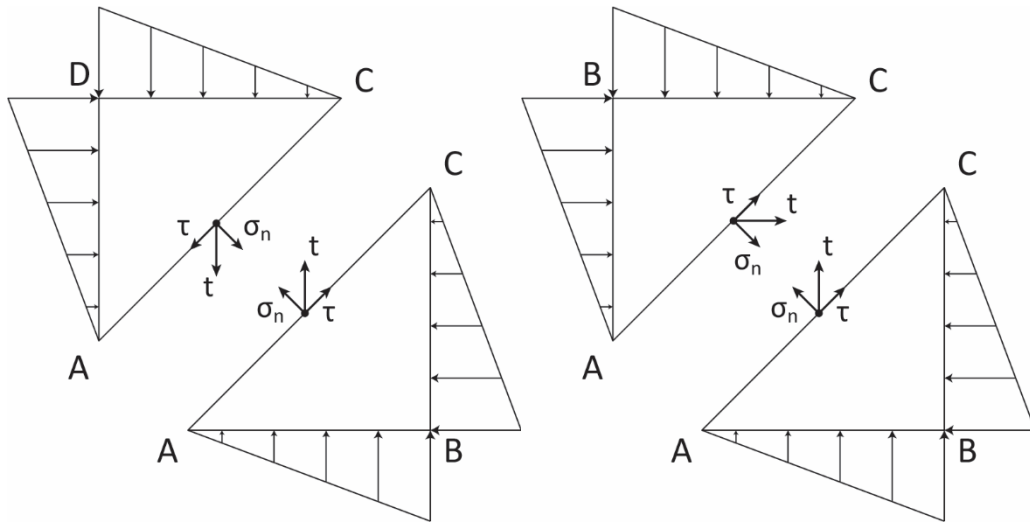


Figura 3-44 a e b Vetor tensão num ponto genérico da diagonal: a) condição de equilíbrio, b) condição de simetria.

Mas sendo ACD a imagem espelho de ABC, podemos rodar ABC de  $180^\circ$  em torno da hipotenusa para obter o diagrama de corpo livre de ACD, ver Figura 3-44b.

Comparando os dois corpos livres de ACD, verifica-se que a componente de corte  $\tau$  do vetor tensão na hipotenusa tem sentidos opostos, implicando que  $\tau = 0$  ao longo das diagonais AC e BD.

Para determinar o vetor tensão ao longo dos planos de simetria considere-se o corpo livre ABO, em que O é o centro da placa, Figura 3-45. Nessa Figura sugere-se uma solução: o vetor tensão é normal aos catetos de comprimentos  $a/\sqrt{2}$ ,  $\mathbf{t} = \sigma_n \mathbf{n}$ , variando linearmente entre 0 e  $-K$ . Confirmemos se a sugestão é válida:

1. No ponto A  $\sigma_n = 0$  porque  $\sigma_{x'x'} = 0$ ,  $\sigma_{y'y'} = 0$  e  $\sigma_{x'y'} = 0$ . No ponto B  $\sigma_n = -K$  porque  $\sigma_{x'x'} = -K$ ,  $\sigma_{y'y'} = -K$  e  $\sigma_{x'y'} = 0$ .
2. As resultantes do vetor tensão nos catetos são normais aos catetos e têm grandeza  $\frac{1}{2} K a$  e  $t/\sqrt{2}$ .
3. O corpo livre ABO está em equilíbrio porque  $\Sigma F_{x'} = \frac{1}{2} K a t/\sqrt{2} \cos 45^\circ - \frac{1}{2} K a t/\sqrt{2} \cos 45^\circ = 0$  e  $\Sigma F_{y'} = \frac{1}{2} K a t - \frac{1}{2} K a t/\sqrt{2} \sin 45^\circ - \frac{1}{2} K a t/\sqrt{2} \sin 45^\circ = \frac{1}{2} K a t - \frac{1}{2} K a t/\sqrt{2} (\sqrt{2}/2) - \frac{1}{2} K a t/\sqrt{2} (\sqrt{2}/2) = 0$  e as três resultantes que atuam nos lados de ABO têm linhas de ação concorrentes, o que garante equilíbrio de momentos: a linha de ação da resultante em AB é  $x' = \frac{2}{3} a$ , a linha de ação da resultante em BO é  $y' = x' - \frac{2}{3} a$  e a linha de ação da resultante em OA é  $y' = -x' + \frac{2}{3} a$ , intersecando-se as três linhas de ação em  $(\frac{2}{3} a, 0)$ .

Mostraremos a seguir que as equações de equilíbrio das tensões também são verificadas.

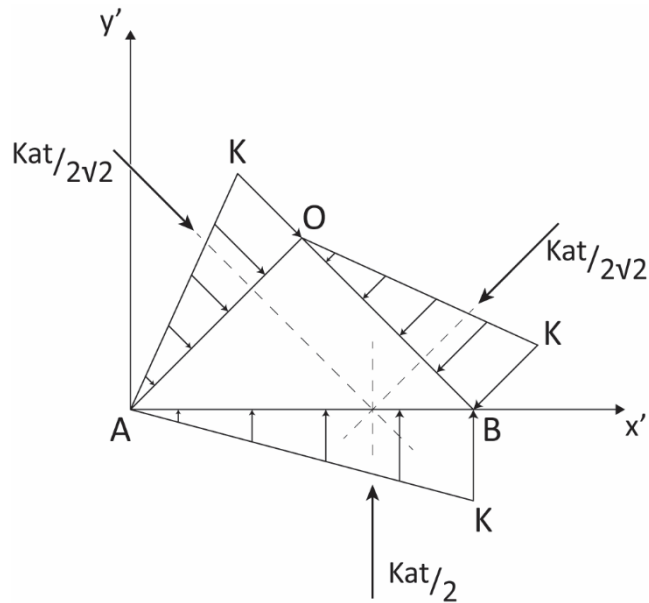


Figura 3-45 Corpo livre de elemento triangular da placa quadrada ABCD com centro em O.

- d) Para determinar a distribuição de tensões noutros pontos da placa notamos a solução conhecida da placa em tensão plana EFGH da Figura 3-46 analisada no Exemplo 3.13-1, cuja distribuição de tensões é  $\sigma_{xx} = -K/l y$ ,  $\sigma_{yy} = -K/l x$  e  $\sigma_{xy} = 0$ , no referencial xy. Esta placa tem um plano de simetria ao longo da diagonal  $y = x$  onde  $\sigma_n$  varia linearmente entre 0 e  $-K$ .

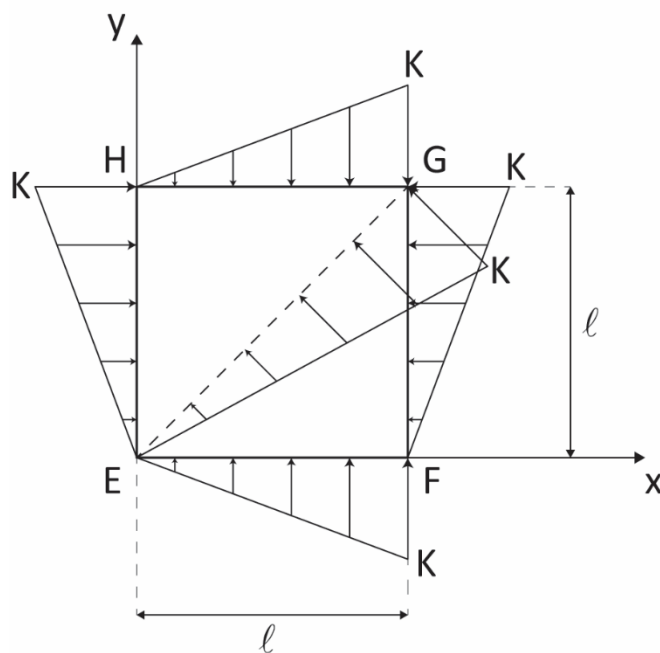


Figura 3-46 Placa em tensão plana, com tensões normais que variam linearmente e sem tensões de corte. Representação do vetor tensão ao longo do plano de simetria que contém a diagonal EG.

Como se pode concluir observando os corpos livres dos triângulos EGH e ABO, ambos têm a mesma geometria e tensões aplicadas quando o lado  $a = \sqrt{2} l$ , logo a distribuição de tensões nas placas triangulares é a mesma. Como no Exemplo 3.13-1 se mostrou que a distribuição de tensões em EGH verifica as equações de equilíbrio, podemos concluir que a distribuição de tensões sugerida para ABO

na alínea c) desta resolução verifica as equações de equilíbrio. Além disso, a partir do conhecimento da distribuição de tensões em ABO, podemos também saber, por simetria, a distribuição de tensões na placa ABCD.

O referencial  $x'y'$  está rodado de  $45^\circ$  em relação ao referencial  $xy$ , ver Figura 3-47. Para trabalhar em  $x'y'$  utilizamos, com  $\theta = 45^\circ$ , a transformação de coordenadas

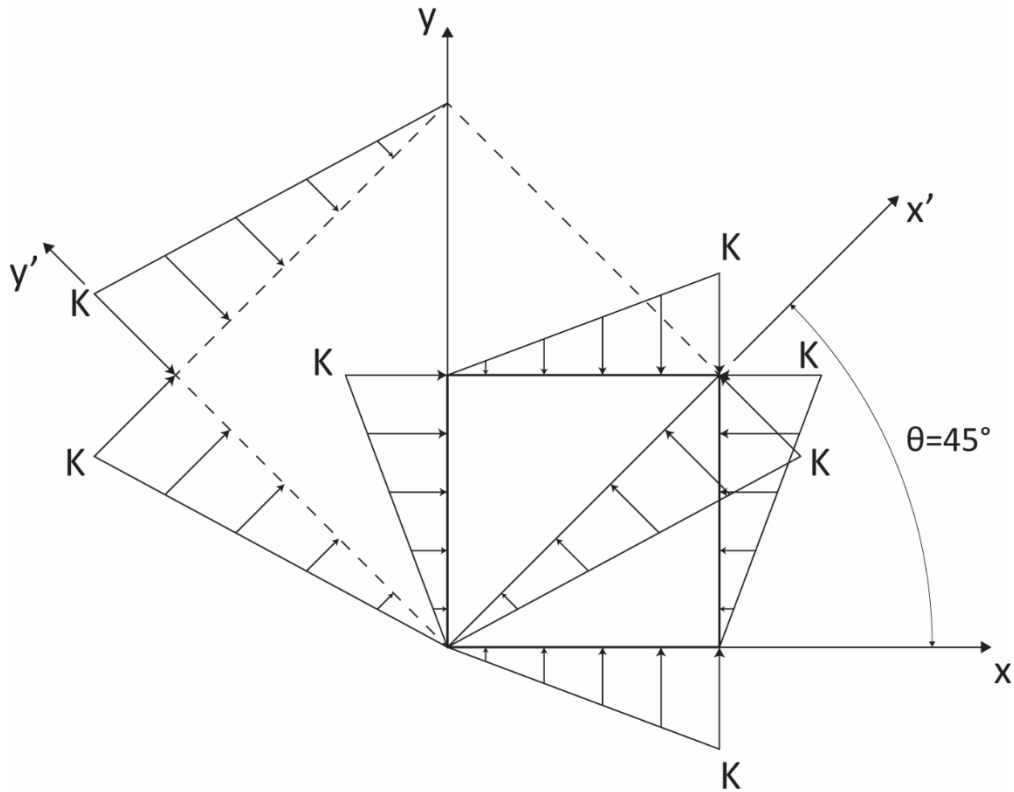


Figura 3-47 Elemento triangular com o mesmo estado de tensão nas duas placas ABCD (ref.  $x'y'$ ) e EFGH (ref.  $xy$ ).

$$\sigma_{x'x'} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos(2\theta)/2 + \sigma_{xy} \sin(2\theta) = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 = (-K/l y - K/l x)/2 = -K/l (x + y)/2$$

$$\sigma_{y'y'} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 - (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos(2\theta)/2 - \sigma_{xy} \sin(2\theta) = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 = -K/l (x + y)/2$$

$$\sigma_{x'y'} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin(2\theta)/2 + \sigma_{xy} \cos(2\theta) = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2 = K/l (y - x)/2.$$

A distribuição de tensões ao longo de  $x' = \frac{1}{2} a$  e  $y' = \frac{1}{2} a$  no triângulo ABO corresponde à distribuição de tensões ao longo de  $y = -x + l$  no triângulo EGH (com  $l = a/\sqrt{2}$ ), obtendo-se

$$\sigma_{x'x'} = -K/l (x - x + l)/2 = -K/2$$

$$\sigma_{y'y'} = -K/2$$

$$\sigma_{x'y'} = K/l (-x + l - x)/2 = \frac{1}{2} K (1 - 2x/l), 0 \leq x \leq l/2,$$

variando a tensão de corte  $\sigma_{x'y'}$  entre  $\frac{1}{2} K$  no canto H da placa EFGH e zero no centro, onde não há tensões de corte, ou entre  $\frac{1}{2} K$  no centro da placa ABCD e zero no meio do lado AB, ver Figura 3-48.

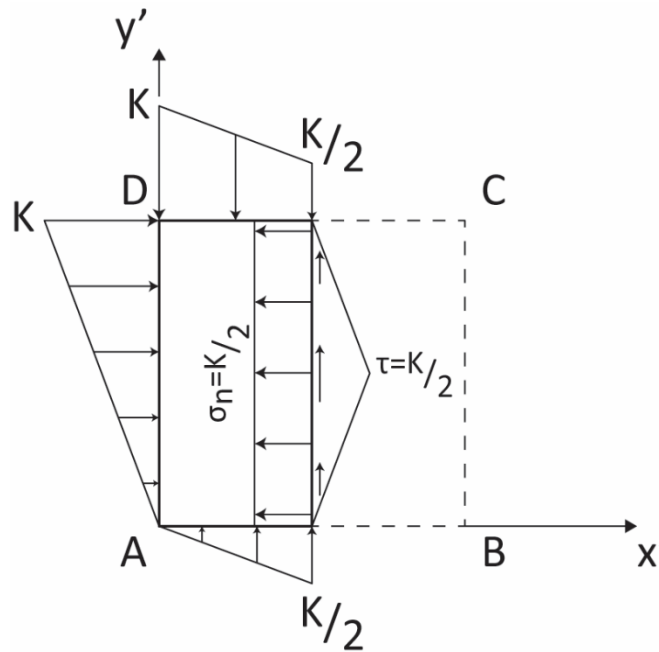


Figura 3-48 Componentes normais e de corte do vetor tensão da placa ABCD ao longo de  $x' = a/2$ .

e) O problema aqui analisado é uma simplificação do Problema 3.1 em que se determina a distribuição de tensões de corte numa chaveta. Que simplificações se fizeram? As forças aplicadas na chaveta, horizontais e verticais, são aqui iguais, enquanto que no Problema 3.1 as forças horizontais são maiores que as verticais; as tensões estão aqui aplicadas em toda a superfície da chaveta enquanto que no Problema 3.1 as forças distribuídas estão aplicadas em metade das faces horizontais e verticais da chaveta, pois descrevem o contacto com a haste e o veio. Esta distribuição de tensões aplicadas permite aqui determinar a distribuição de tensões completa na placa enquanto que no Problema 3.1 apenas se determinaram as tensões de corte médias, dividindo as forças não colineares aplicadas na chaveta pela área resistente,  $\tau = P / A$ .

Se seguimos o mesmo método neste problema, como  $P = \frac{1}{2} K a t$  e  $A = a t$  obtém-se  $\tau = \frac{1}{2} K$ , que é igual à tensão de corte máxima determinada na alínea anterior. Conclui-se que as formulações e metodologias de solução do problema da distribuição de tensões na chaveta são diferentes, chegando-se no entanto a resultados equivalentes.

### 3.14.7 Problema 3.7 – Tensões em parafusos de rodas de automóvel

O condutor de um automóvel que pesa 1600 kg trava a fundo bloqueando as rodas e os pneus que nelas estão montados. O coeficiente de atrito entre os pneus e a estrada é  $\frac{1}{4}$  e cada roda está fixada ao eixo por 4 parafusos igualmente espaçados entre si. Os parafusos têm um diâmetro de 1 cm e distam 6 cm do eixo da roda, que está a 36 cm da estrada. Determine:

- A força de corte (esforço transversal) máxima que atua em cada parafuso.
- Sendo a tensão de corte admissível do material dos parafusos 150 MPa, verifique se as tensões de corte nos parafusos estão dentro desse limite, admitindo que não há tensões iniciais devido a pré-aperto.
- Se quando as rodas forem montadas no automóvel for aplicada nos parafusos uma tensão normal de pré-aperto de 140 MPa, verifique se a tensão de corte nos parafusos é admissível, para a situação de travagem das alíneas anteriores.

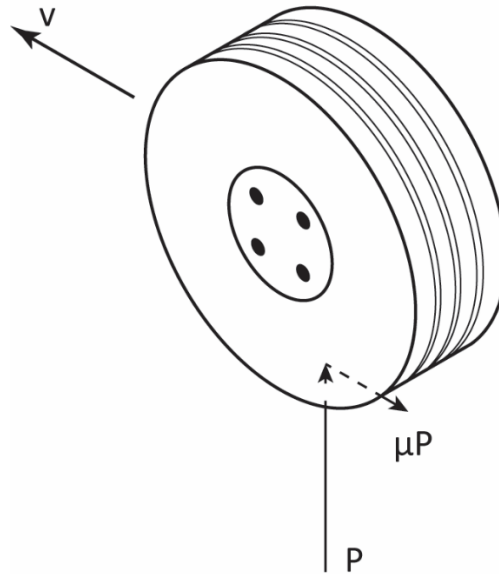


Figura 3-49 Acção da estrada no pneu e na roda devido a travagem súbita.

Resolução:

- a) Designe-se a força vertical em cada pneu devido ao peso do automóvel por  $P$ , o coeficiente de atrito pneu-estrada por  $\mu$  e por  $v$  a velocidade da roda bloqueada, ver Figura 3-49. A distancia do eixo da roda à estrada é  $a$  e a distancia do parafuso ao eixo da roda é  $b$ .

O problema é estáticamente indeterminado. Resolvemos a indeterminação admitindo neste cálculo que as forças se distribuem igualmente pelos 4 parafusos. No diagrama de corpo livre da roda bloqueada representado na Figura 3-50, haverá 3 tipos de forças a atuar em cada um dos 4 furos da roda que recebem os parafusos: uma força vertical  $P/4$  que equilibra a parcela do peso do automóvel que cabe a cada roda, uma força horizontal  $\mu P/4$  que equilibra a força de travagem em cada roda e uma força  $(\mu P a) / (4 b)$ , normal ao raio que une o furo ao eixo, que equilibra o momento relativo ao eixo da força de travagem em cada roda.

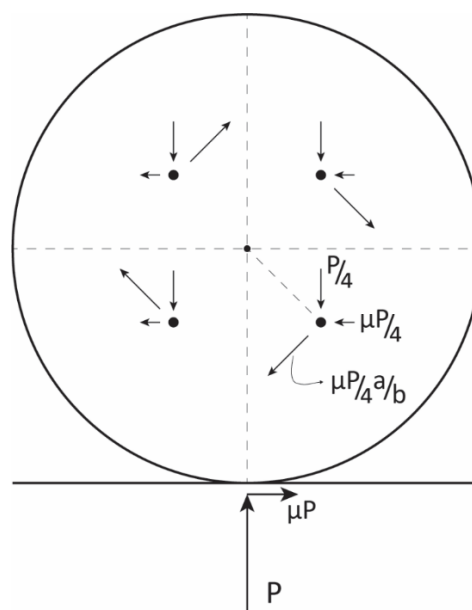


Figura 3-50 Corpo livre da roda e pneu; as cargas que equilibram  $P$  e  $\mu P$  dividem-se igualmente pelos 4 parafusos de fixação.

Note-se que esta última força tem direção variável, pois depende da posição em que cada furo está quando ocorre a travagem, e tem geralmente grandeza maior que as duas primeiras pois a distancia do eixo à estrada é sempre maior que a distancia do eixo aos furos que recebem os parafusos.

Em cada um dos quatro parafusos atuarão forças iguais e opostas às anteriores, ver Figura 3.51. Quando é que ocorre a força máxima no parafuso? Quando a força cuja direção varia,  $(\mu P a) / (4 b)$ , tiver a direção da resultante das outras duas forças, ver Figura. A força máxima no parafuso é então dada por

$$F_{\max} = (\mu P a) / (4 b) + \sqrt{((P/4)^2 + (\mu P/4)^2)} = (\mu a/b + \sqrt{1 + \mu^2}) P/4$$

Para os dados do problema, admitindo que cada roda suporta  $\frac{1}{4}$  do peso do automóvel,  $P = 4000 \text{ N}$ ,  $\mu = \frac{1}{4}$ ,  $a/b = 6$  e  $F_{\max} = 25\,308 \text{ N}$ .

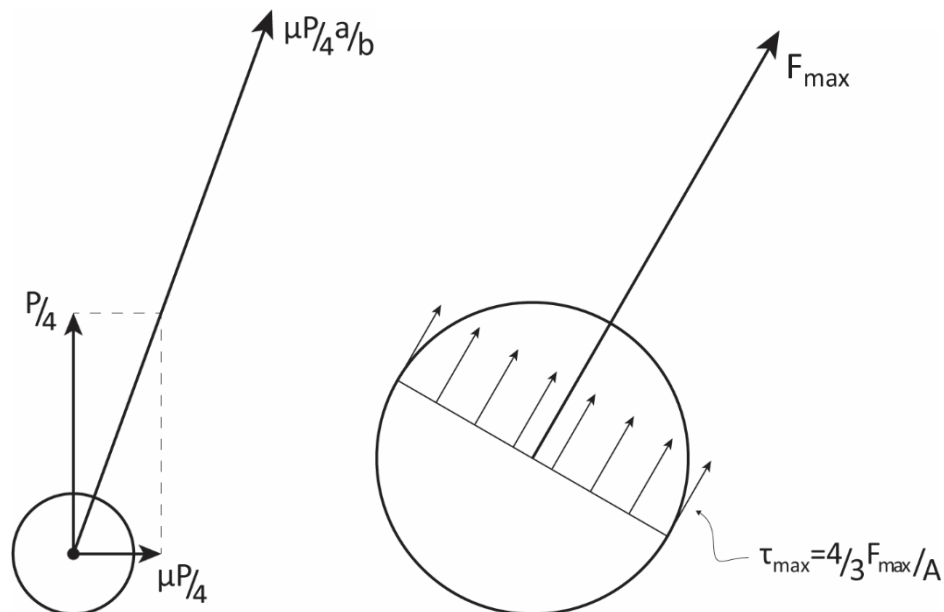


Figura 3-51 Orientação da força de direção variável que origina magnitude máxima da força em cada parafuso.

Figura 3-52 Localização e valor da tensão de corte máxima em cada parafuso de secção circular.

- b) A tensão de corte máxima na secção circular do parafuso será, utilizando a fórmula da tensão de corte  $\tau = (V Q) / (I t)$ , em que  $V$  é a força de corte na secção ou esforço transversal,  $Q$  o primeiro momento de área acima do eixo da secção normal à direção de  $V$ ,  $t$  a espessura da secção no ponto de interesse segundo a direção do eixo anterior e  $I$  o segundo momento de área da secção,

$$\tau_{\max} = (4/3) (F_{\max}/A_{\text{secção}}) = (4/3) \times 2.5308 / (\pi/4) \text{ MPa} = 4.3 \text{ MPa},$$

inferior à tensão admissível, ver Figura 3.52.

- c) a tensão de corte máxima quando se aplica a tensão normal de pré-aperto obtém-se utilizando o círculo de Mohr ou a fórmula

$$\tau_{\max} = \sqrt{((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2)^2 + \sigma_{xy}^2} = \sqrt{(((140 - 0)/2)^2 + 4.3^2)} = 70.1 \text{ MPa},$$

com resultado inferior à tensão admissível do material dos parafusos ao corte.

Note-se que este último cálculo é conservativo: quando se aplica a tensão normal, o atrito entre a roda e o eixo vai suportar algum esforço de corte que antes era suportado integralmente pelo parafuso, como se vê na Figura 3-53; dependendo do valor do coeficiente de atrito e da força de aperto, pode até acontecer que o parafuso não suporte nenhum esforço de corte.

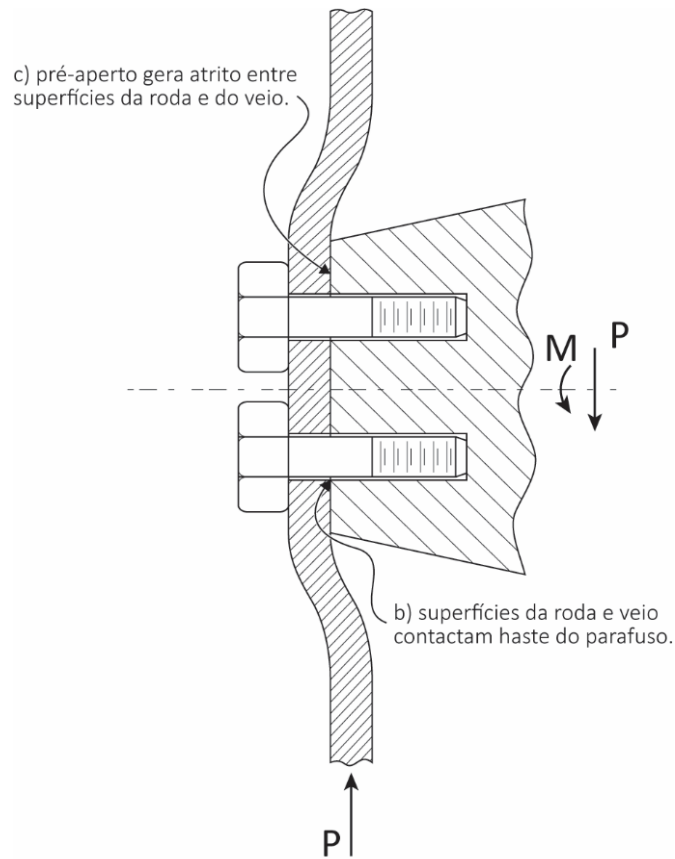


Figura 3-53 Junta aparafusada: b) ao corte, c) com pré-aperto.