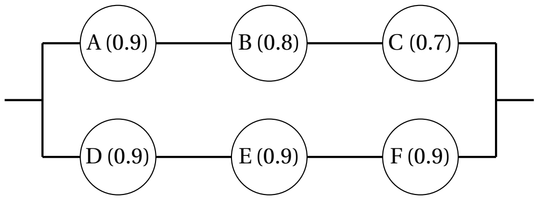
Duração: **120** minutos **Exame 1**

Justifique convenientemente todas as respostas

Pergunta 1	2 valores

Considere um circuito constituído pelas componentes A, B, C, D, E e F, que funcionam de forma mutuamente independente e estão dispostas conforme o diagrama ao lado.



A probabilidade de que cada componente funcione consta deste mesmo diagrama (e está entre parêntesis). O circuito funciona se e só se houver um caminho da esquerda para a direita que passe por componentes funcionais.

Qual é a probabilidade de o circuito funcionar?

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	Probabilidade
A = componente A está a funcionar	$P(A) = 0.9$
B = componente B está a funcionar	$P(B) = 0.8$
C = componente C está a funcionar	$P(C) = 0.7$
Z = componente Z está a funcionar, Z = D, E, F	$P(D) = P(E) = P(F) = 0.9$

- **Prob. pedida**

  Ao admitirmos que os eventos A, B, C, D, E e F são mutuamente independentes, temos

$$
\begin{aligned}
&P(\text{“circuito funciona”})\\
&= P[(A\cap B\cap C)\cup(D\cap E\cap F)]\\
&= P(A\cap B\cap C)+P(D\cap E\cap F)-P(A\cap B\cap C\cap D\cap E\cap F)\\
&= P(A)\times P(B)\times P(C)+P(D)\times P(E)\times P(F)-P(A)\times P(B)\times P(C)\times P(D)\times P(E)\times P(F)\\
&= 0.9\times 0.8\times 0.7+0.9\times 0.9\times 0.9-0.9\times 0.8\times 0.7\times 0.9\times 0.9\times 0.9\\
&= 0.504+0.729-0.504\times 0.729\\
&= 0.865584.
\end{aligned}
$$

Pergunta 2	2 valores

Admita que a variável aleatória X representa o número de partículas de contaminação à superfície de um disco ótico com $100\,cm^2$ e possui uma distribuição de Poisson com variância igual a 10.5.

Mostre que a moda de X é igual a 10 e obtenha a probabilidade de X exceder esse valor.

- **V.a.**

  X = número de partículas de contaminação à superfície de um disco ótico com $100\,cm^2$

- **Distribuição**

  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

- **Obtenção de λ**

  $\lambda: \quad V(X) = 10.5 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 10.5$

- **F.p. de X**

  $P(X=x) = \frac{e^{-10.5}\times 10.5^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}_0$

- **Moda de X**

$$
\begin{aligned}
mo = mo(X) \in \mathbb{N}_0 \quad : & \quad \begin{cases} P(X=mo) \geq P(X=mo-1) \\ P(X=mo) \geq P(X=mo+1) \end{cases} \\
& \quad \begin{cases} \frac{P(X=mo)}{P(X=mo-1)} \geq 1 \\ \frac{P(X=mo+1)}{P(X=mo)} \leq 1 \end{cases} \\
& \quad \begin{cases} \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{mo}}{mo!}}{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{mo-1}}{(mo-1)!}} \geq 1 \\ \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{mo+1}}{(\lambda+1)!}}{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{mo}}{mo!}} \leq 1 \end{cases} \\
& \quad \begin{cases} \frac{\lambda}{mo} \geq 1 \\ \frac{\lambda}{mo+1} \leq 1 \end{cases} \\
& \quad \begin{cases} mo \leq \lambda \\ mo+1 \geq \lambda, \end{cases}
\end{aligned}
$$

  i.e., $mo = mo(X) = [\lambda] = [10.5] = 10$ (onde $[x]$ representa a parte inteira do real x). ✓

- **Probabilidade pedida**

$$
\begin{aligned}
P(X > mo) &= 1 - P(X \leq mo) \\
&= 1 - F_{Poisson(\lambda)}(mo) \\
&= 1 - F_{Poisson(10.5)}(10) \\
&\overset{tabelas, calc.}{=} 1 - 0.5207 \\
&= 0.4793.
\end{aligned}
$$

Pergunta 3	2 valores

Admita que a duração (em centenas de horas) de certa componente mecânica num teste de vibração é uma variável aleatória X com distribuição exponencial tal que $E(X^2 + X + 1) = 2$.

Após ter obtido o parâmetro da distribuição de X, determine a probabilidade de tal duração não exceder 200 horas, sabendo que a componente mecânica encontra-se em teste há (mais de) 50 horas.

- **V.a. de interesse, f.d.p. e f.d.**

  $X =$ duração (em centenas de horas) de componente mecânica num teste de vibração

  $f_X(x) \overset{form.}{=} \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

  $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$

- **Obtenção de λ**

  Tirando partido do formulário, temos

$$
\begin{aligned}
\lambda \in \mathbb{R}+ \quad : \quad & E(X^2+X+1)=2 \\
& [V(X)+E^2(X)]+E(X)+1=2 \\
& \left[\frac{1}{\lambda^2}+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\right]+\frac{1}{\lambda}+1=2 \\
& \frac{2}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}+1=2 \\
& 2+\lambda+\lambda^2=2\lambda^2 \qquad (\lambda>0) \\
& \lambda^2-\lambda-2=0 \\
& \lambda=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-2)}}{2} \\
& \lambda=\frac{1\pm 3}{2}
\end{aligned}
$$

Logo, $\lambda = 2$.

- **Probabilidade pedida**

  Ao invocarmos a propriedade da falta de memória da distribuição exponencial, obtemos

$$
\begin{aligned}
P(X\le 2 \mid X>0.5) &= P(X\le 1.5+0.5 \mid X>0.5) \\
&= P(X\le 1.5) \\
&= F_X(1.5) \\
&= 1-e^{-2\times 1.5} \\
&\simeq 0.950213.
\end{aligned}
$$

[Alternativamente,

$$
\begin{aligned}
P(X\le 2 \mid X>0.5) &= \frac{P(X\le 2, X>0.5)}{P(X>0.5)} = \frac{P(0.5<X\le 2)}{P(X>0.5)} = \frac{F_X(2)-F_X(0.5)}{1-F_X(0.5)} \\
&= \frac{\left(1-e^{-2\lambda}\right)-\left(1-e^{-0.5\lambda}\right)}{1-\left(1-e^{-0.5\lambda}\right)} \\
&= \frac{e^{-0.5\lambda}\times\left(1-e^{-1.5\lambda}\right)}{e^{-0.5\lambda}} \\
&= 1-e^{-2\times 1.5} \\
&\equiv F_X(1.5).]
\end{aligned}
$$

Pergunta 4 — 2 valores

Suponha que a variável aleatória X (respetivamente, Y) representa o número de fornos industriais considerados com *defeitos graves* (respetivamente, com *defeitos ligeiros*) numa amostra de dois fornos selecionados casualmente da produção diária de uma unidade fabril. Admita que o par aleatório (X, Y) possui função de probabilidade conjunta dada por

	Y		
X	0	1	2
0	0.49	0.28	0.04
1	0.14	0.04	0
2	0.01	0	0

Calcule o valor esperado e a variância do número total de fornos sem quaisquer defeitos numa amostra de dois fornos selecionados casualmente da produção diária.

- **Par aleatório e f.p. marginais**

  (X,Y)

  $X=$ número de fornos industriais considerados com *defeitos graves* numa amostra...

  $Y=$ número de fornos industriais considerados com *defeitos ligeiros* numa amostra...

  Atendendo a que $P(X=x)=\sum_y P(X=x,Y=y)$ e $P(Y=y)=\sum_x P(X=x,Y=y)$, temos

	Y			$P(X=x)$
X	0	1	2	
0	0.49	0.28	0.04	0.81
1	0.14	0.04	0	0.18
2	0.01	0	0	0.01
$P(Y=y)$	0.64	0.32	0.04	1

- **R.v.**

  $2-X-Y=$ número total de fornos sem quaisquer defeitos numa amostra de dois fornos selecionados casualmente da produção diária

- **Cálculos auxiliares, valor esperado e variância pedida**

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{2} x\,P(X=x) = 0\times 0.81+1\times 0.18+2\times 0.01 = 0.2;\\
E(X^2) &= \sum_{x=0}^{2} x^2\,P(X=x) = 0^2\times 0.81+1^2\times 0.18+2^2\times 0.01 = 0.22;\\
V(X) &= E(X^2)-E^2(X) = 0.22-0.2^2 = 0.18;\\
E(Y) &= \sum_{y=0}^{2} y\,P(Y=y) = 0\times 0.64+1\times 0.32+2\times 0.04 = 0.4;\\
E(Y^2) &= \sum_{y=0}^{2} y^2\,P(Y=y) = 0^2\times 0.64+1^2\times 0.32+2^2\times 0.04 = 0.48;\\
V(Y) &= E(Y^2)-E^2(Y) = 0.48-0.4^2 = 0.32;\\
E(XY) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} x\,y\,P(X=x,\,Y=y) = 1\times 1\times 0.04 = 0.04;\\
cov(X,Y) &= E(XY)-E(X)\times E(Y) = 0.04-0.2\times 0.4 = -0.04.
\end{aligned}
$$

- **Valor esperado e varaiância pedido**

$$
\begin{aligned}
E(2-X-Y) &= 2-E(X)-E(Y)\\
&= 2-0.2-0.4\\
&= 1.4
\end{aligned}
$$

- **Variância pedida**

$$
\begin{aligned}
V(2-X-Y) &= V[(-1)\times(X+Y)]\\
&= (-1)^2\times V(X+Y)\\
&= V(X)+V(Y)+2\times cov(X,Y)\\
&= 0.18+0.32+2\times(-0.04)\\
&= 0.42.
\end{aligned}
$$

Pergunta 5	2 valores

Considere que o número de acessos por minuto a um *website* é uma variável aleatória X com distribuição de Poisson de parâmetro igual a 9.

Numa amostra causal de 60 desses períodos de tempo, qual é a probabilidade aproximada de o número médio de acessos por minuto ser superior a $E(X)$ e não exceder o terceiro quartil de X?

Assuma que os números de acessos em períodos de um minuto são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X.

- **V.a.; valor esperado, variância e terceiro quartil comuns**

  X_i = números de acessos no período de um minuto i, $\quad i = 1, \ldots, n$

  $n = 60$

  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X \sim \text{Poisson}(\lambda = 9)$

  $E(X_i) = E(X) = \mu \overset{form}{=} \lambda = 9$

  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 \overset{form}{=} \lambda = 9$

  A consulta das tabelas da f.d. de X, permitem afirmar que

  $$0.7060 = F_X(11^-) \leq 0.75 \leq F_X(11) = 0.8030,$$

  logo o terceiro quartil de X é dado por $F_X^{-1}(0.75) = 11$.

- **V.a. de interesse**

  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

  $E(\bar{X}) = \cdots = \mu = 9$

  $V(\bar{X}) = \cdots = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{9}{60} = 0.15$

- **Distribuição aproximada de $\bar{X}$**

  De acordo com o TLC,

  $$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \overset{a}{\sim} \text{normal}(0,1).$$

- **Prob. pedida** (valor aproximado)

  Considere-se $a = E(X) = \mu = 9$ e $b = F_X^{-1}(0.75) = 11$. Então

  $$\begin{aligned}
  P(a < \bar{X} \leq b) &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{b - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{a - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) \\
  &\overset{TLC}{\simeq} \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) \\
  &= \Phi\left(\frac{11 - 9}{\sqrt{0.15}}\right) - \Phi\left(\frac{9 - 9}{\sqrt{0.15}}\right) \\
  &\simeq \Phi(5.16) - \Phi(0) \\
  &\overset{tabelas/calc.}{\simeq} 1 - 0.5 \\
  &= 0.5.
  \end{aligned}$$

Pergunta 6	2 valores

Admita que o número mensal de estados X, entre os 19 estados da zona Euro com taxa de inflação inferior a 2%, é bem modelado por uma distribuição beta-binomial, com função de probabilidade

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{19!}{(19-x)!}\times\frac{(18+\beta-x)!}{(19+\beta)!}\times\beta, & x=0,1,\ldots,19\\ 0, & \text{outros valores de } x,\end{cases}$$

onde $\beta\in\{2,6\}$.

A concretização de uma amostra aleatória de dimensão 3 proveniente de X conduziu a $x_1=0$, $x_2=0$ e $x_3=1$. Obtenha a estimativa de máxima verosimilhança de $E(X)=\frac{19}{\beta+1}$.

- **V.a. de interesse**

  X = número mensal de estados entre os 19 estados da zona Euro com taxa de inflação inferior a 2%

- **F.p. de** X

  $$P(X=x)=\begin{cases}\frac{19!}{(19-x)!}\times\frac{(18+\beta-x)!}{(19+\beta)!}\times\beta, & x=0,1,\ldots,19\\ 0, & \text{outros valores de } x,\end{cases}$$

- **Parâmetro desconhecido e espaço paramétrico**

  β

  $\Theta=\{2,6\}$

- **Amostra**

  $\underline{x}=(x_1=0,x_2=0,x_3=1)$, amostra de dimensão 3 proveiniente da população X.

- **Obtenção da estimativa de MV de** β

  Será representada por $\hat\beta$ e $L(\hat\beta\mid\underline{x})=\max_{\beta\in\Theta}L(\beta\mid\underline{x})$, onde $L(\beta\mid\underline{x})$ representa a f. de verosimilhança. [Deste modo, $\hat\beta$ é o valor mais plausível/verosímil para o parâmetro desconhecido β, tendo em conta a amostra $\underline{x}$.]

  Função de verosimilhança

  $$\begin{aligned}
L(\beta\mid\underline{x}) &= P(\underline{X}=\underline{x})\\
&\overset{X_i\ indep}{=} \prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)\\
&\overset{X_i\sim X}{=} \prod_{i=1}^{n}P(X=x_i)\\
&= \prod_{i=1}^{3}\frac{19!}{(19-x_i)!}\times\frac{(18+\beta-x_i)!}{(19+\beta)!}\times\beta\\
&= \left[\frac{19!}{(19-0)!}\times\frac{(18+\beta-0)!}{(19+\beta)!}\times\beta\right]\times\left[\frac{19!}{(19-0)!}\times\frac{(18+\beta-0)!}{(19+\beta)!}\times\beta\right]\\
&\qquad\times\left[\frac{19!}{(19-1)!}\times\frac{(18+\beta-1)!}{(19+\beta)!}\times\beta\right]\\
&= \frac{19!}{18!}\times\frac{[(18+\beta)!]^2\times(17+\beta)!}{[(19+\beta)!]^3}\times\beta^3\\
&= 19\,\beta^3\times\frac{[(18+\beta)!]^2\times(17+\beta)!}{[(19+\beta)!]^3}\qquad\left[=\frac{19\,\beta^3}{(19+\beta)^3\,(18+\beta)}\right]
\end{aligned}$$

  Maximização e concretização

  [Como Θ é um conjunto discreto, a estimativa de MV de β obtém-se calculando os vários valores de $L(\beta\mid\underline{x})$, para $\beta\in\Theta$, e identificando o ponto de máximo — i.e., faz-se por pesquisa ponto por ponto.]

		$L(\beta \mid \underline{x})$
β	2	$19 \times 2^3 \times \frac{[(18+2)!]^2 \times (17+2)!}{[(19+2)!]^3} = \frac{38}{46305} \simeq 0.000821$
	6	$19 \times 6^3 \times \frac{[(18+6)!]^2 \times (17+6)!}{[(19+6)!]^3} = \frac{171}{15625} \simeq 0.010944$

A inspecção da tabela anterior leva a concluir que a função de verosimilhança atinge o máximo quando $\beta = 6$, pelo que $\hat{\beta} = 6$.

- **Outro parâmetro desconhecido**

  $h(\beta) = E(X) = \frac{19}{\beta+1}$

- **Estimativa de MV de $h(\lambda)$**

  Uma vez que $h(\beta)$ é uma função bijetiva de β podemos invocar a propriedade de invariância dos estimadores de MV e concluir que a estimativa de MV de $h(\beta)$ é

$$\begin{aligned} \widehat{h(\beta)} &= h(\hat{\beta}) \\ &= \frac{19}{\hat{\beta}+1} = \frac{19}{6+1} \simeq 2.714286. \end{aligned}$$

Pergunta 7	2 valores

Pretende-se estimar a proporção de pessoas que, em Portugal, vai comprar o novo modelo de uma reputada marca de telemóvel. Para o efeito, foi selecionada uma amostra casual de 500 indivíduos, dos quais 323 afirmaram que irão adquirir este novo modelo de telemóvel.

Determine um intervalo aproximado de confiança a 90% para a probabilidade p de uma pessoa escolhida ao acaso adquirir esse novo modelo de telemóvel.

- **V.a. de interesse**

  $X = \begin{cases} 1, & \text{pessoa selecionada compra o novo modelo de telemóvel} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- **Situação**

  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

  p DESCONHECIDO

- **Obtenção de IC aproximado para p**

  Passo 1 - Seleção da v.a. fulcral para p

$$Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \overset{a}{\sim} \text{normal}(0,1)$$

  Passo 2 — Obtenção dos quantis de probabilidade

  Como $(1-\alpha) * 100\% = 90\% \Leftrightarrow \alpha = 0.1$, lidaremos com os quantis seguintes:

$$\begin{cases} a_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha/2) = -\Phi^{-1}(1-\alpha/2) = -\Phi^{-1}(0.950) \overset{tabela/calc.}{=} -1.6449 \\ b_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(0.950) = 1.6449. \end{cases}$$

  Passo 3 — Inversão da desigualdade $a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha$

$$P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left[a_\alpha \leq (\bar{X}-p)/\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n} \leq b_\alpha\right] \simeq 1-\alpha$$

$$P\left[\bar{X} - b_\alpha \times \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \le p \le \bar{X} - a_\alpha \times \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right] \simeq 1-\alpha$$

Passo 4 — Concretização

A expressão geral do intervalo aproximado de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ para p é

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(p) \simeq \left[\bar{x} \pm \Phi^{-1}(1-\alpha/2) \times \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right].$$

Ao termos em conta que $n = 500$, $\Phi^{-1}(1-\alpha/2) = 1.9600$ e $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{323}{500} = 0.646$,

$$\begin{aligned} IC_{90\%}(p) &\simeq \left[0.646 - 1.6449 \times \sqrt{\frac{0.646(1-0.646)}{500}}, 0.646 + 1.6449 \times \sqrt{\frac{0.646(1-0.646)}{500}}\right] \\ &= [0.646 - 0.035178, 0.646 + 0.035178] \\ &= [0.610822, 0.681178]. \end{aligned}$$

Pergunta 8	2 valores

Um fabricante de cicloergómetros elétricos afirma que o comprimento (em centímetros) de qualquer dos dois pedais possui valor esperado igual a 25.

Foram selecionados aleatoriamente 61 cicloergómetros, tendo-se observado uma média amostral e uma variância amostral corrigida iguais a 25.5 e 3.2, respetivamente. Apoiarão os dados a conjetura do fabricante ? Decida com base no valor-p aproximado.

- **V.a. de interesse**

  X = comprimento de qualquer um dos dois pedais de um cicloergómetro elétrico

- **Situação**

  X v.a. com dist. arbitrária, com valor esperado μ e variância σ^2 desconhecidos

- **Hipóteses**

  $H_0 : \mu = \mu_0 = 25$

  $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- **Estatística de teste**

  $$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim}_{H_0} \text{normal}(0,1)$$

- **Região de rejeição de H_0 (para valores da estatística de teste)**

  O teste é bilateral, logo a região de rejeição de H_0 é do tipo $W = (-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$.

- **Decisão (com base no valor-p)**

  Atendendo a que o valor observado da estatística de teste e do valor-p são iguais a

  $$\begin{aligned} t &= \frac{25.5 - 25}{\sqrt{3.2}/\sqrt{61}} \\ &\simeq 2.18 \\ valor-p &\simeq 2 \times P(T > |2.18| \mid H_0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \times [1 - \Phi(2.18)] \\
&\overset{tabelas,calc.}{=} 2 \times (1 - 0.9850) \\
&= 0.03.
\end{aligned}
$$

Consequentemente, é suposto:

- não rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \leq valor - p = 3\%$, designadamente ao n.u.s. de 1%;
- rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 > valor - p = 3\%$, nomeadamente aos n.u.s. de 5% e 10%.

Pergunta 9 2 valores

Num estudo para avaliar as preferências entre os utilizadores de quatro tipos de cadeiras de rodas manuais, foram inquiridos 230 utilizadores, tendo sido obtidos os resultados seguintes: 58 mostraram preferência pela cadeira de tipo 1; 25 pela de tipo 2; 21 pela de tipo 3; e 126 pela de tipo 4.

Vários fisiatras sustentam que, entre os utilizadores de cadeiras de rodas manuais, a probabilidade de escolha de uma cadeira de tipo 1 é: o dobro da probabilidade de escolha de uma cadeira do tipo 2; o triplo da de tipo 3; e metade da de tipo 4.

Averigue, aplicando um teste apropriado, se a opinião dos fisiatras é consistente com os resultados do estudo ao nível de significância de 5%.

- **V.a. de interesse**

  X = tipo preferido de cadeira de rodas pelo utilizador inquirido

  $$P(X = x_i) = \begin{cases} p_i, & i = 1,2,3,4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Hipóteses**

  $H_0 : p_i = p_i^0,\ i = 1, \ldots, 4$

  $H_1 : p_i \neq p_i^0$, para algum i , onde

  $$\begin{cases} p_1^0 = 2 \times p_2^0 \\ p_1^0 = 3 \times p_3^0 \\ p_1^0 = \frac{1}{2} \times p_4^0 \\ p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 + p_4^0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_2^0 = \frac{1}{2}\, p_1^0 \\ p_3^0 = \frac{1}{3}\, p_1^0 \\ p_4^0 = 2\, p_4^0 \\ p_1^0 + \frac{1}{2}\, p_2^0 + \frac{1}{3}\, p_3^0 + 2\, p_4^0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6+3+2+12}{6}\, p_1^0 = 1 \Leftrightarrow p_1^0 = \frac{6}{23} \\ p_2^0 = \frac{1}{2}\, p_1^0 = \frac{3}{23} \\ p_3^0 = \frac{1}{3}\, p_1^0 = \frac{2}{23} \\ p_4^0 = 2\, p_4^0 = \frac{12}{23}. \end{cases}$$

- **N.s.**

  $\alpha_0 = 5\%$

- **Estatística de teste**

  $$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim}_{H_0} \chi^2_{(k-\beta-1)}$$

  onde:

  k = número de classes = 4 (tipos de cadeiras de rodas manuais);

  O_i = frequência absoluta observável da classe i;

  E_i = frequência absoluta esperada, sob H_0, da classe i;

  β = número de parâmetros a estimar = 0

  [dado que a distribuição conjecturada em H_0 está completamente especificada].

- **Região de rejeição de** H_0 (para valores de T)

  Ao efectuarmos um teste de ajustamento do qui-quadrado a região de rejeição de H_0 é um intervalo à direita $W = (c, +\infty)$, onde

  $$c = F^{-1}_{\chi^2_{(k-\beta-1)}}(1-\alpha_0) = F^{-1}_{\chi^2_{(4-0-1)}}(1-0.05) \overset{tabela/calc.}{=} 7.815.$$

- **Cálculo das frequências absolutas esperadas sob** H_0

  As frequências absolutas esperadas sob H_0 são dadas por $E_i = n \times p_i^0$, $i = 1, 2, 3, 4$ e iguais a:

  $E_1 = 230 \times \frac{6}{23} = 60;$

  $E_2 = 230 \times \frac{3}{23} = 30;$

  $E_3 = 230 \times \frac{2}{23} = 20;$

  $E_4 = 230 \times \frac{12}{23} = 120.$

- **Decisão (com base no valor-p)**

  No cálculo do valor observado da estatística de teste convém recorrer à seguinte tabela auxiliar:

i	Freq. abs. obs. o_i	Freq. abs. esper. sob H_0 $E_i = n \times p_i^0$	Parcelas valor obs. estat. teste $\frac{(o_i-E_i)^2}{E_i}$
1	58	60	$\frac{(58-60)^2}{60} = \frac{1}{15} \simeq 0.067$
2	25	30	$\frac{(25-30)^2}{30} = \frac{5}{6} \simeq 0.833$
3	21	20	$\frac{(21-20)^2}{20} = \frac{1}{20} = 0.05$
4	126	120	$\frac{(126-120)^2}{120} = \frac{3}{10} = 0.3$
	$\sum_{i=1}^4 o_i = n = 230$	$\sum_{i=1}^4 E_i = n = 230$	$t = \sum_{i=1}^4 \frac{(o_i-E_i)^2}{E_i} = \frac{5}{4} = 1.25$

  Como $t = 1.25 \not\in W = (7.815, +\infty)$ não devemos rejeitar H_0 ao n.s. $\alpha_0 = 5\%$ (ou a qualquer n.s. inferior a $\alpha_0 = 5\%$).

Pergunta 10 — 2 valores

Uma engenheira biomédica está a investigar, em pacientes hemiplégicos, a relação entre o tempo de realização do teste *timed up and go* (x, em segundos) e a frequência cardíaca (Y, em batimentos por minuto) após a realização deste teste. Numa amostra de 10 pacientes, obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 202, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 4\,328, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 801, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 65\,343, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 16\,581,$$

onde $[\min_{i=1,\ldots,10} x_i, \max_{i=1,\ldots,10} x_i] = [12, 30]$.

Admita que as variáveis x e Y estão relacionadas de acordo com o modelo de regressão linear simples, $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$.

Interprete a estimativa de mínimos quadrados do parâmetro β_1 do modelo e indique uma estimativa da alteração no valor esperado da frequência cardíaca, se o tempo de realização do teste *timed up and go* aumentar de $x = 14$ para $2x = 28$ segundos.

- **[Modelo de RLS**

  Y = frequência cardíaca (v.a. resposta)

  x = tempo de realização do teste (variável explicativa)

  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$

$E(\epsilon_i) = 0, \ V(\epsilon_i) = \sigma^2, \quad i = 1, \ldots, n$

$cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0, \ i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, n]$

- **Estimativa de MQ de β_1**

  Importa notar que

  - $n = 10$
  - $\sum_{i=1}^n x_i = 202$

    $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{202}{10} = 20.2$

    $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 4\,328$

    $\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2 = 4\,328 - 10 \times 20.2^2 = 247.6$
  - $\sum_{i=1}^n y_i = 801$

    $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{801}{10} = 80.1$

    $[\sum_{i=1}^n y_i^2 = 65\,343$

    $\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\,\bar{y}^2 = 65\,343 - 10 \times 80.1^2 = 1\,182.9]$
  - $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 16\,581$

    $\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y} = 16\,581 - 10 \times 20.2 \times 80.1 = 400.8.$

  Logo,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2} \\ &= \frac{400.8}{247.6} \\ &\simeq 1.618740. \end{aligned}$$

- **Interpretação de $\hat{\beta}_1$**

  De acordo com o modelo de RLS, estimamos que um aumento de um segundo no tempo de realização do teste conduza a um aumento no valor esperado da frequência cardíaca de aproximadamente 1.618740 (batimentos por minuto).

- **Estimativa de $E(Y \mid x = 28) - E(Y \mid x = 14)$**

$$\begin{aligned} E(Y \mid x = 28) - E(Y \mid x = 14) &= (\beta_0 + \beta_1 \times 28) - (\beta_0 + \beta_1 \times 14) \\ &= 14\,\beta_1 \\ \widehat{14\,\beta_1} &= 14 \times \hat{\beta}_1 \\ &\simeq 14 \times 1.618740 \\ &\simeq 22.662360. \end{aligned}$$