Mecânica e Ondas

Textos de apoio às aulas de problemas

1.1 Dimensões

Suponha que lhe dizem que a força de atrito que atua num corpo é proporcional ao quadrado da velocidade. Quais são as unidades da constante de proporcionalidade *c*?

$$F = c\,v^2$$

$$[F] = [c][v]^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2} = [c]\,\frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{T}^2}$$

$$[c] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}} \Rightarrow [c] = \mathrm{kg/m}$$

Quantity	Symbol	Dimension
Area	A	L^2
Volume	V	L^3
Speed	v	$\mathrm{L/T}$
Acceleration	a	$\mathrm{L/T}^2$
Force	F	$\mathrm{ML/T}^2$
Pressure (F/A)	p	$\mathrm{M/LT}^2$
Density (M/V)	ρ	$\mathrm{M/L}^3$
Energy	E	$\mathrm{ML}^2/\mathrm{T}^2$
Power (E/T)	P	$\mathrm{ML}^2/\mathrm{T}^3$

1.2 Dimensões

A 3ª lei de Kepler relaciona o período T de um planeta com o raio r da sua órbita, a constante de gravitação G da lei de Newton e a massa M_S do sol: $T = C\, r^x G^y M_S^z$.
A constante C é adimensional.
Determine os valores de x, y e z (podem não ser inteiros).

Lei de Newton: $F = G\dfrac{m M_s}{r^2}$ Þ $G = \dfrac{F r^2}{m M_s}$

$$[G] = \frac{[F][r]^2}{[m][M_s]} = \frac{\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}\mathrm{L}^2}{\mathrm{M\,M}} = \frac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{M\,T}^2}$$

$$[T] = \mathrm{L}^x \left(\frac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{M\,T}^2}\right)^y \mathrm{M}^z$$

$$\mathrm{M}^0\,\mathrm{L}^0\,\mathrm{T}^1 = \left(\mathrm{L}^x \mathrm{L}^{3y}\right)\left[T^{-2y}\right]\left(\mathrm{M}^z \mathrm{M}^{-y}\right)$$

$$\begin{cases} 0 = x + 3y \\ 0 = z - y \\ 1 = -2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3/2 \\ y = -1/2 \\ z = -1/2 \end{cases}$$

$$T = C\, r^{3/2} G^{-1/2} M_s^{-1/2} = \frac{C}{\sqrt{G M_s}} r^{3/2}$$

Quantity	Symbol	Dimension
Area	A	L^2
Volume	V	L^3
Speed	v	$\mathrm{L/T}$
Acceleration	a	$\mathrm{L/T}^2$
Force	F	$\mathrm{ML/T}^2$
Pressure (F/A)	p	$\mathrm{M/LT}^2$
Density (M/V)	ρ	$\mathrm{M/L}^3$
Energy	E	$\mathrm{ML}^2/\mathrm{T}^2$
Power (E/T)	P	$\mathrm{ML}^2/\mathrm{T}^3$

1.3 Dimensões

Pretende-se determinar a dependência da força ascensional F de um avião com a sua velocidade v. Considere que F também varia com a largura (w) e o comprimento (ℓ) das asas e com a densidade do ar (ρ), de acordo com $F/w = C\ell^x v^y r^z$. A constante C é adimensional. Determine os valores de x, y e z (podem não ser inteiros).

As dimensões de qualquer grandeza física Q podem ser determinadas por uma expressão do tipo

$$[Q] = \mathrm{M}^a\ \mathrm{L}^b\ \mathrm{T}^g$$

Se essa grandeza Q depender de outras, como

$$Q = Q_1^x Q_2^y Q_3^z$$

então, as suas dimensões podem ser dadas por

$$\left[\mathrm{M}^a \mathrm{L}^b \mathrm{T}^g\right] = \left[\mathrm{M}^{a_1} \mathrm{L}^{b_1} \mathrm{T}^{g_1}\right]^x \left[\mathrm{M}^{a_2} \mathrm{L}^{b_2} \mathrm{T}^{g_2}\right]^y \left[\mathrm{M}^{a_3} \mathrm{L}^{b_3} \mathrm{T}^{g_3}\right]^z$$

Quantity	Symbol	Dimension
Area	A	L^2
Volume	V	L^3
Speed	v	$\mathrm{L/T}$
Acceleration	a	$\mathrm{L/T^2}$
Force	F	$\mathrm{ML/T^2}$
Pressure (F/A)	p	$\mathrm{M/LT^2}$
Density (M/V)	ρ	$\mathrm{M/L^3}$
Energy	E	$\mathrm{ML^2/T^2}$
Power (E/T)	P	$\mathrm{ML^2/T^3}$

1.3 Dimensões

Pretende-se determinar a dependência da força ascensional F de um avião com a sua velocidade v. Considere que F também varia com a largura (w) e o comprimento (ℓ) das asas e com a densidade do ar (ρ), de acordo com $F/w = C\ell^x v^y r^z$. A constante C é adimensional. Determine os valores de x, y e z (podem não ser inteiros).

Neste caso, $[F] = \mathrm{MLT^{-2}}$, $[v] = \mathrm{LT^{-1}}$, $[r] = \mathrm{ML^{-3}}$

e a constante C tem dimensão zero:

$$\frac{\mathrm{MLT^{-2}}}{\mathrm{L}} = \mathrm{L}^x \left(\mathrm{LT^{-1}}\right)^y \left(\mathrm{ML^{-3}}\right)^z$$

Como as dimensões têm que ser iguais nos dois lados da equação:

$$\mathrm{M^1 T^{-2} L^0} = \left(\mathrm{L}^x \mathrm{L}^y \mathrm{L}^{-3z}\right)\left(\mathrm{T}^{-y}\right)\left(\mathrm{M}^z\right)$$

$$\begin{cases} 1 = z \\ -2 = -y \\ 0 = x + y - 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{F}{w} = C\ell v^2 \rho \quad \text{ou} \quad F = CA\rho v^2$$

Quantity	Symbol	Dimension
Area	A	$\mathrm{L^2}$
Volume	V	$\mathrm{L^3}$
Speed	v	$\mathrm{L/T}$
Acceleration	a	$\mathrm{L/T^2}$
Force	F	$\mathrm{ML/T^2}$
Pressure (F/A)	p	$\mathrm{M/LT^2}$
Density (M/V)	ρ	$\mathrm{M/L^3}$
Energy	E	$\mathrm{ML^2/T^2}$
Power (E/T)	P	$\mathrm{ML^2/T^3}$

1.4 Movimento unidimensional

Uma partícula move-se ao longo do eixo x, de acordo com a equação x = 2+3t-t^2, em unidades SI. Determine, para o instante t = 3 s:

a) a posição da partícula;
b) a sua velocidade;
c) a sua aceleração.

$$x = 2 + 3t - t^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = 3 - 2t \quad \Rightarrow \quad a = \frac{dv}{dt} = -2$$

a) $x = 2 + 3(3) - (3)^2 = 2\ \mathrm{m}$

b) $v = 3 - 2(3) = -3\ \mathrm{m/s}$

c) $a = -2\ \mathrm{m/s^2}$

1.5 Movimento unidimensional

Uma partícula move-se ao longo do eixo x, de acordo com a equação $x = 2+3t-4t^2$, em unidades SI. Determine:

a) a posição da partícula, no instante em que muda de sentido;

b) a sua velocidade, quando volta à posição que tinha em $t = 0$.

a) $$x = 2 + 3t - 4t^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = 3 - 8t$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad x = 2{,}56\ \mathrm{m}$$

b) $$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2\ \mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad 2 = 2 + 3t - 4t^2 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{3}{4}\ \mathrm{s}$$

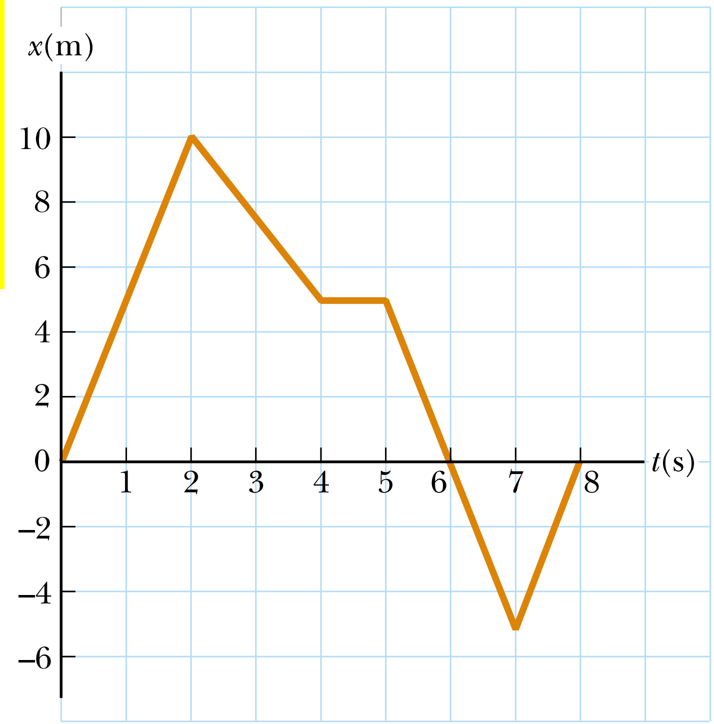
$$t = \frac{3}{4}\ \mathrm{s} \quad \Rightarrow \quad v = 3 - 8\left(\frac{3}{4}\right) = -3\ \mathrm{m/s}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} ax^2 + bx + c = 0 \\ x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array}}$$

1.6 Movimento unidimensional

A figura mostra a posição de um objeto, em função do tempo. Determine a velocidade do objeto, para

a) $t = 1$ s;
b) $t = 3$ s;
c) $t = 4{,}5$ s;
d) $t = 7{,}5$ s.



a) $$v = \frac{10 - 0}{2 - 0} = 5 \text{ m/s}$$

b) $$v = \frac{5 - 10}{4 - 2} = -2{,}5 \text{ m/s}$$

c) $$v = \frac{5 - 5}{5 - 4} = 0 \text{ m/s}$$

d) $$v = \frac{0 - (-5)}{8 - 7} = 5 \text{ m/s}$$

1.7 Movimento unidimensional

A figura representa a velocidade de um objeto, ao longo do tempo. Determine:

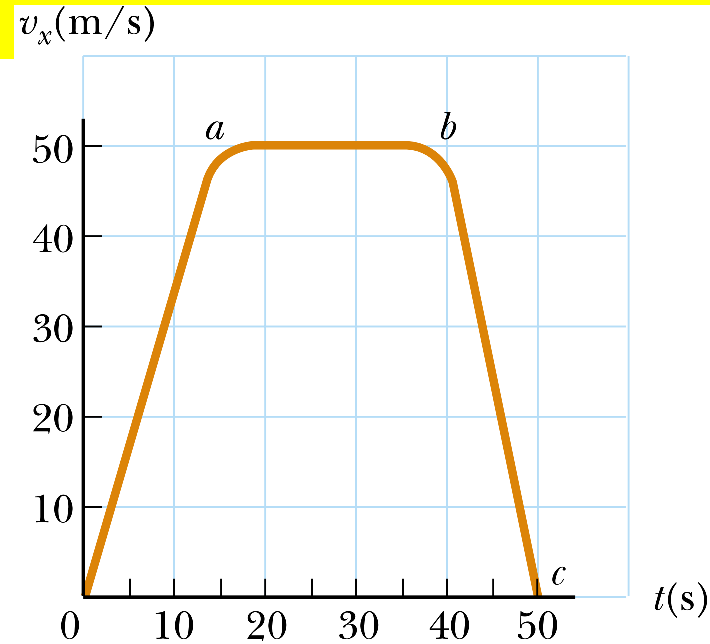
a) a distância total percorrida;

b) a distância percorrida entre t = 10 s e t = 40 s;

c) o gráfico da aceleração em função do tempo, entre t = 0 e t = 50 s;

d) a equação $x(t)$, para cada fase do percurso: de 0 a a, de a a b e de b a c;

e) a velocidade média, entre t = 0 e t = 50 s.



a) Distância total percorrida = área definida pelo gráfico $v(t)$:

$$\Delta x = \frac{1}{2}(15-0)(50-0)+(40-15)(50-0)+\frac{1}{2}(50-40)(50-0)$$
$$=1875\,\mathrm{m}$$

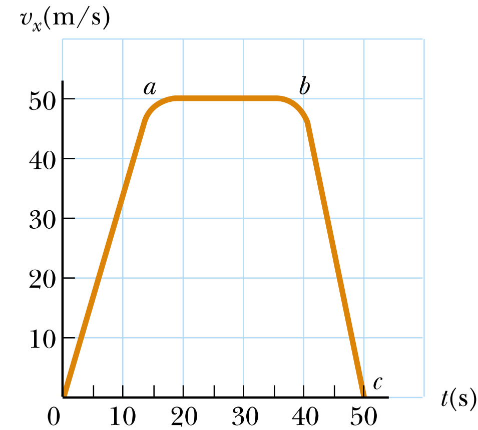
b) Área definida pelo gráfico $v(t)$, entre t = 10 s e t = 40 s:

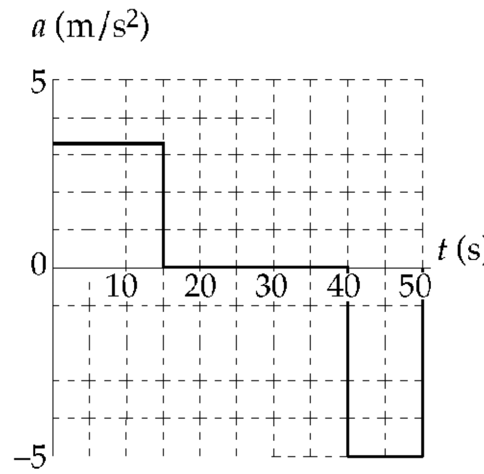
$$\Delta x = \frac{1}{2}(15-10)(50-33{,}3)+(15-10)(33{,}3-0)+(40-15)(50-0)$$
$$=1458{,}5\,\mathrm{m}$$

c) $0 \le t \le 15\text{s}$: $\quad a_1 = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{50 - 0}{15 - 0} = 3{,}333 \text{ m/s}^2$

$15 \le t \le 40$: $\quad a_2 = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{0 - 0}{40 - 15} = 0$

$40 \le t \le 50$: $\quad a_3 = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{0 - 50}{50 - 40} = - 5 \text{ m/s}^2$





d)

De 0 a a: $\quad x_1 = 0 + \frac{1}{2} a_1 t^2 = \frac{1}{2}(3{,}33)t^2 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1{,}67 t^2 \ (\text{m})$

De a a b: $\quad x_2 = \frac{1}{2}(15\text{s})(50\text{ m/s} - 0) + 50\text{ m/}(t - 15\text{s}) \quad \rightarrow \quad x_2 = 50t - 375 \ (\text{m})$

De b a c: $\quad x_3 = 375\text{m} + 1250\text{m} + \frac{1}{2}(-5\text{m/s}^2)(t - 40\text{s})^2 + 50\text{m/s}(t - 40\text{s}) \rightarrow x_3 = 250t - 2{,}5t^2 - 4375 \ (\text{m})$

e) $\quad v_{\text{med}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{1875}{50} = 37{,}5 \text{ m/s}$

1.8 Movimento unidimensional

Um objeto move-se ao longo do eixo x, de acordo com a equação $x = 3 - 2t + 3t^2$, em unidades SI. Determine:

a) a velocidade média, entre $t = 2$ s e $t = 3$ s;

b) a velocidade instantânea, em $t = 2$ s e em $t = 3$ s;

c) a aceleração média, entre $t = 2$ s e $t = 3$ s;

d) a aceleração instantânea, em $t = 2$ s e em $t = 3$ s.

a) $$\left.\begin{array}{ll} t = 2\,\text{s}: & x = 3 - 2 \times 2 + 3 \times 2^2 = 11\,\text{m} \\ t = 3\,\text{s}: & x = 3 - 2 \times 3 + 3 \times 3^2 = 24\,\text{m} \end{array}\right\} \quad v_{\text{med}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{24 - 11}{3 - 2} = 13\,\text{m/s}$$

b) $$v = \frac{dx}{dt} = -2 + 6t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 2\,\text{s}: & v = 10\,\text{m/s} \\ t = 3\,\text{s}: & v = 16\,\text{m/s} \end{cases}$$

c) $$a_{\text{med}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{16 - 10}{3 - 2} = 6\,\text{m/s}^2$$

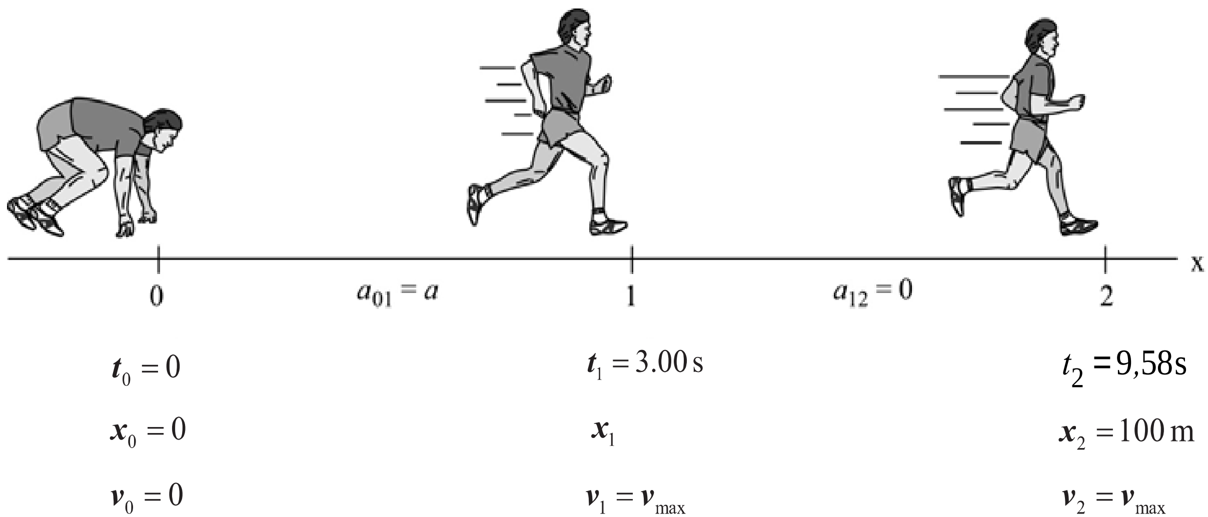
d) $$v = \frac{d^2x}{dt^2} = 6 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 2\,\text{s}: & a = 6\,\text{m/s}^2 \\ t = 3\,\text{s}: & a = 6\,\text{m/s}^2 \end{cases}$$

1.9 Movimento unidimensional

O recorde mundial dos 100m masculinos é de 9,58 s (Usain Bolt, Jamaica). Admita que a velocidade máxima é atingida em 3,0 s e que se mantém até ao final. Qual é a aceleração durante esses 3,0 s?

Distância total:

$$100\,\mathrm{m} = \Delta x_{01} + \Delta x_{12}$$



Distância percorrida até atingir a velocidade máxima:

$$\Delta x_{01} = v_0\,\Delta t_{01} + \frac{1}{2}a_{01}\left(\Delta t_{01}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}a_{01}\left(3{,}0\mathrm{s}\right)^2$$

Distância percorrida durante o resto do trajeto:

$$\Delta x_{12} = v_{\text{máx}}\,\Delta t_{12} + \frac{1}{2}a_{12}\left(\Delta t_{12}\right)^2 = \left(a_{01}\,\Delta t_{01}\right)\Delta t_{12} + 0 = \left(a_{01} \times 3{,}0\mathrm{s}\right)\left(9{,}58\mathrm{s} - 3{,}0\mathrm{s}\right)$$

Substituindo: $$100\,\mathrm{m} = \frac{1}{2}a_{01}\left(3{,}0\mathrm{s}\right)^2 + \left(a_{01} \times 3{,}0\mathrm{s}\right)\left(9{,}58\mathrm{s} - 3{,}0\mathrm{s}\right)$$

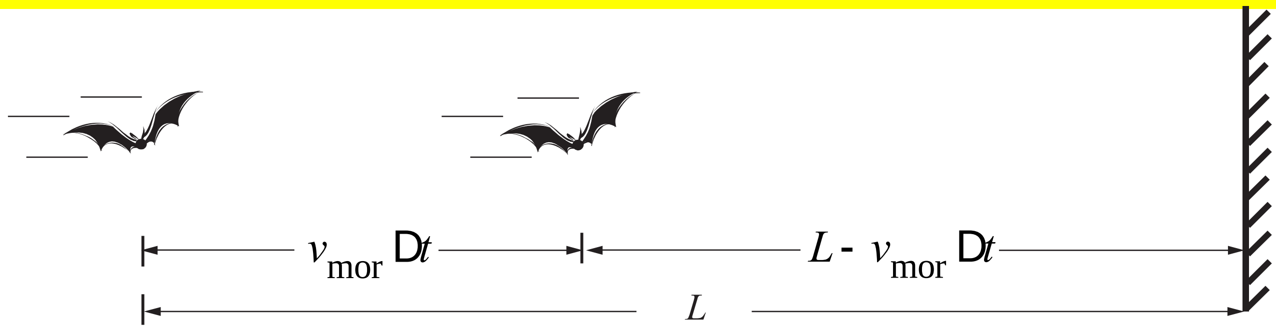
$$a_{01} = \frac{100\,\mathrm{m}}{\frac{1}{2}\left(3{,}0\mathrm{s}\right)^2 + \left(3{,}0\mathrm{s}\right)\left(9{,}58\mathrm{s} - 3{,}0\mathrm{s}\right)} = 4{,}13\mathrm{m/s}^2$$

1.10 Movimento unidimensional

Um morcego voa com velocidade constante v = 19,5m/s em linha reta, na direção da parede de uma gruta. Emite um impulso ultrassónico, que bate na parede, e ouve o seu eco 0,15 s depois. Quando recebe o eco, a que distância está da parede?

Distância a que está da parede, quando ouve o eco:

$$\Delta x_{\text{par}} = L - v_{\text{mor}}\,\Delta t$$



Tempo desde a emissão do impulso até ao recebimento do eco: $\Delta t = \Delta t_{\text{imp}} + \Delta t_{\text{eco}}$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{L}{v_{\text{som}}} + \frac{L - v_{\text{mor}}\Delta t}{v_{\text{som}}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}\left(v_{\text{som}} + v_{\text{mor}}\right)\Delta t$$

Substituindo: $\Delta x_{\text{par}} = L - v_{\text{mor}}\,\Delta t = \frac{1}{2}\left(v_{\text{som}} + v_{\text{mor}}\right)\Delta t - v_{\text{mor}}\,\Delta t = \frac{1}{2}\left(v_{\text{som}} - v_{\text{mor}}\right)\Delta t$

$$= \frac{1}{2}\left(343\,\text{m/s} - 19{,}5\,\text{m/s}\right)\left(0{,}15\,\text{s}\right) = 24\,\text{m}$$