Data: 15 de Fevereiro de 2022
Duração: 45 minutos+45 minutos
Professor responsável: Vasco Guerra

Exame / Testes de recuperação
FÍSICA ESTATÍSTICA, LEFT 2021/22

1^o teste: grupo 1
2^o teste: grupos 2 e 3

Justifique cuidadosamente as suas respostas e apresente detalhadamente todos os cálculos que efectuar.

1. [20 val] A radiação cósmica de fundo é uma das assinaturas do modelo do Big Bang e da física do universo primordial. Resulta de um processo em 3 fases que ocorre quando a temperatura do universo já baixou o suficiente para garantir a estabilidade de átomos neutros. Estes átomos não interagem significativamente com os fotões e o universo torna-se transparente à radiação que se propaga desde então, sofrendo apenas um desvio para o vermelho (*redshift*) com a expansão, que corresponde à radiação de fundo que presentemente preenche todo o céu. Neste exercício vamos estudar o primeiro passo deste processo, a *recombinação*.

   Consideremos um gás constituído por electrões, protões e átomos de hidrogénio, que podem interagir de acordo com um processo da forma

$$p + e^- \rightleftharpoons H + \gamma \ ,$$

   onde p, e, H e γ representam, respectivametne, um protão, um electrão, um átomo de hidrogénio e um fotão. Pretende obter-se uma relação para as concentrações de electrões livres, protões e átomos de hidrogénio, ou, mais especificamente, caracterizar o grau de ionização do universo em função do *redhisft*. Assuma que pode tratar todas as partículas classicamente e que estão em equilíbrio termodinâmico. As degenerescências de spin são $g_e = g_p = 2$, $g_H = 4$.

   A energia de cada partícula é dada por

$$\mathcal{H}_i = \frac{p_i^2}{2m_i} - E_i \ ,$$

   onde $i = \{e, p, H\}$, m_i é a massa da partícula respectiva, e $E_i = 0$ para electrões e protões (partículas livres) e $E_H = E_I$, onde E_I é o potencial de ionização do átomo de hidrogénio ($\sim 13,6$ eV).

   a. [3 val] Mostre que a função de partição do gás i no conjunto canónico é dada por

$$Q^i_{N_i} = \frac{1}{N_i!} \left(Q^i_1\right)^{N_i} \ ,$$

onde a função de partição de uma partícula é dada por

$$Q_1^i = g_i \frac{V}{\lambda_i^3} \exp\left(\frac{E_i}{k_B T}\right) \ ,$$

sendo N_i é o número de partículas do tipo i e $\lambda_i = \left(\frac{h^2}{2\pi m_i k_B T}\right)^{1/2}$ o comprimento de onda térmico do gás i.

b. [2 val] Calcule a energia livre de Helmholtz do gás i em função de T, N_i e Q_1^i.

c. [3 val] Mostre que o potencial químico do gás i é dado por

$$\mu_i = -k_B T \log\left(\frac{Q_1^i}{N_i}\right) = k_B T \log\left(\frac{n_i \lambda^3}{g_i}\right) - E_i \ ,$$

onde $n_i = N_i/V$.

d. [3 val] Escreva a função de partição do sistema completo e mostre que a energia livre de Helmholtz é $A = A_e + A_p + A_H$, com A_i obtido nas alíneas anteriores. Conclua sobre a possibilidade de utilizar os potenciais químicos calculados na alínea anterior no estudo do sistema completo.

e. [3 val] O equilíbrio de ionização (equilíbrio de Saha) corresponde à condição $\mu_e + \mu_p = \mu_H$, uma vez que o potencial químico dos fotões é nulo. Definindo $N_H = (1-x)N$ e $N_p = N_e = xN$, com $x \in [0,1]$, mostre que

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{V}{N}\left(\frac{2\pi m_e m_p}{h^2 m_H}\right)^{3/2} (k_B T)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_I}{k_B T}\right) \ .$$

[Nota cosmológica: define-se o início da época de recombinação quando $x = 0,5$. Os termos do lado direito são conhecidos em termos do desvio para o vermelho, z [$T = 2,728(1+z)$ K ; $n_p + n_H = 1,6(1+z)^3$]. O resultado é $z \simeq 1375$ e $T \simeq 3750$ K.]

f. [3 val] Obtenha os valores de x nos limites $T \to 0$ e $T \to \infty$. Comente os resultados.

g. [3 val] Uma forma alternativa de calcular o potencial químico para cada um dos gases é a partir da fugacidade usando o conjunto grande canónico. Utilize o conjunto grande canónico para recuperar os resultados da alínea 1c.

Data: 15 de Fevereiro de 2022
Duração: 45 minutos+45 minutos
Professor responsável: Vasco Guerra

Exame / Testes de recuperação
FÍSICA ESTATÍSTICA, LEFT 2021/22

1^o teste: grupo 1
2^o teste: grupos 2 e 3

Justifique cuidadosamente as suas respostas e apresente detalhadamente todos os cálculos que efectuar.

2. [3,5 val] Parta da definição de entropia de Gibbs,

$$S = -k \sum_n p_n \log(p_n) \ ,$$

onde p_n é a probabilidade de encontrar o sistema no estado n. Mostre que a a distribuição que maximiza a entropia corresponde a $p_n = cte$. Comente o resultado.

3. [16,5 val] Considere um gás de Bose ideal contido num cilindro de base A e altura L, colocado num campo gravítico uniforme e mantido à temperatura T. A energia de uma partícula é então dada por

$$E_{p,y} = \frac{p^2}{2m} + mgy \ ,$$

onde g é a aceleração da gravidade, m a massa de cada partícula, e y a altura da partícula dentro da caixa.

a. [3,5 val] Partindo das expressões para os números de ocupação $\langle n_{p,y} \rangle$ do gás de Bose, justifique que o número de partículas na caixa pode ser calculado pelo integral

$$N = \frac{4\pi A}{h^3} \int_0^L dy \int_0^\infty dp \, \frac{p^2}{z^{-1} \exp(\beta mgy) \exp(\beta p^2/2m) - 1} + N_0 \ ,$$

onde $\beta = 1/k_B T$, z é a fugacidade e N_0 é o número de partículas no nível $E_{p,y} = 0$.
Sugestão: comece por obter a expressão que permite calcular o número de partículas dN contido num volume $dV = A dy$.

b. Resolva o integral, sucessivamente, nos momentos e nas configurações, para mostrar que:

b.1 [3,5 val]

$$N = \frac{A}{\lambda^3} \int_0^L dy \, g_{3/2}\left(z \exp(-mgy/k_B T)\right) + N_0 \ ,$$

(recorde que $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$).

b.2 [3,5 val]

$$N = \frac{Ak_BT}{mg\lambda^3}\left[g_{5/2}(z) - g_{5/2}\left(z\exp\left(-\frac{mgL}{k_BT}\right)\right)\right] + N_0 \ .$$

Sugestão: utilize a relação de recorrência das funções de Bose-Einstein.

c. [3 val] Mostre que este sistema apresenta condensação de Bose-Einstein e que, no limite das baixas temperaturas, $k_BT \ll mgL$, a temperatura crítica T_C é dada por

$$T_C \simeq \frac{1}{k_B}\left[\frac{Ngh^3}{A\zeta(5/2)(2\pi)^{3/2}m^{1/2}}\right]^{2/5} \ .$$

d. [3 val] Verifique que para $T < T_C$ e nas condições da alínea anterior se tem

$$\frac{N_0}{N} \simeq 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^{5/2} \ .$$

[Nota histórica: este sistema foi estudado, por exemplo, em R. K.Bhaduri e W. van Dijk, *Physics Letters A* **380** (2016) 2480-2484 ; C. F. Du *et al Physica B* **407** (2012) 4375-4378.]