2.

a) $\rho(1,\dots,N,t)\,dz_1\dots dz_N$ dá-nos o número de pontos representativos (microestados) do sistema em que a partícula 1 está no elemento $dz_1 = d^3r_1\, d^3p_1$ do espaço de fase centrado em $(\vec{r}_1,\vec{p}_1)$, a partícula 2 está no elemento $dz_2 = d^3r_2\, d^3p_2$ centrado em $(\vec{r}_2,\vec{p}_2)$, etc., no instante t.

A função de distribuição de N partículas tem um significado semelhante, mas sem indicar "que partículas". Assim, $f_N(1,\dots,N,t)\,dz_1\dots dz_N$ dá-nos o número de pontos representativos no espaço de fase em que uma partícula está no elemento $dz_1 = d^3r_1\, d^3p_1$ em torno de $(\vec{r}_1,\vec{p}_1)$, outra está no elemento $dz_2 = d^3r_2\, d^3p_2$ em torno de $(\vec{r}_2,\vec{p}_2)$, etc, no instante t.

A função densidade de N-1 partículas é similar a f_N, mas definindo apenas as coordenadas de N-1 partículas:
$f_{N-1}(1,\dots,N-1,t)\,dz_1\dots dz_{N-1}$ dá-nos o número de pontos representativos em que uma partícula está no elemento $dz_1 = d^3r_1\, d^3p_1$ em torno de $(\vec{r}_1,\vec{p}_1)$, outra no elemento $dz_2 = d^3r_2\, d^3p_2$ em torno de $(\vec{r}_2,\vec{p}_2)$, ..., e outra no elemento $dz_{N-1} = d^3r_{N-1}\, d^3p_{N-1}$ em torno de $(\vec{r}_{N-1},\vec{p}_{N-1})$, independentemente da posição da última partícula, no instante t.
Finalmente, f_{N-2} é como f_{N-1}, com $f_{N-2}(1,\dots,N-2,t)\,dz_1\dots dz_{N-2}$ dando o número de pontos representativos em que N-2 partículas

estão nos elementos de volume dz_1 a dz_{N-2} centrados em $(\vec{r}_1, \vec{p}_1), \dots, (\vec{r}_{N-2}, \vec{p}_{N-2})$, independentemente das coordenadas das 2 partículas restantes, no instante t.

b) Das definições da alínea a) $f_N(1,\dots,N,t) = N!\,\rho(1,\dots,N,t)$, pois trocar as coordenadas de quaisquer duas partículas corresponde a um microestado que também contribui para f_N.

Temos ainda, das definições em a),

$$f_{N-1}(1,\dots,N-1,t) = \int dz_N\, f_N(1,\dots,N,t) = \int dz_N\, N!\,\rho(1,\dots,N,t)$$

e $$f_{N-2}(1,\dots,N-2,t) = \frac{1}{2}\int dz_N\, dz_{N-1}\, f_N(1,\dots,N,t) = \frac{1}{2}\int dz_{N-1}\, f_{N-1}(1,\dots,N-1,t)$$

onde o factor $\frac{1}{2}$ resulta de podermos trocar as posições das partículas $(N-1)$ e N, que estão a ser integradas no espaço todo.

Estas expressões coincidem com as expressões do formulário,

$$f_s(1,\dots,s,t) = \frac{N!}{(N-s)!}\int dz_{s+1}\cdots dz_N\, \rho(1,\dots,N,t)$$

que, para $N-1$ e $N-2$ se escrevem

$$f_{N-1}(1,\dots,N-1,t) = N!\int dz_N\, \rho(1,\dots,N,t) = \int dz_N\, \underbrace{N!\,\rho(1,\dots,N,t)}_{f_N(t)}$$

e

$$f_{N-2}(1,\dots,N-2,t) = \frac{N!}{2!}\int dz_{N-1}\, dz_N\, \rho(1,\dots,N,t) =$$

$$= \frac{1}{2}\int dz_{N-1}\underbrace{\int dz_N\, N!\,\rho(1,\dots,N,t)}_{f_{N-1}(1,\dots,N-1,t)} = \frac{1}{2}\int dz_{N-1}\, f_{N-1}(1,\dots,N-1,t)$$

c)

c1) $$\int dz_{N-1}\frac{\partial f_{N-1}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int dz_{N-1}\, f_{N-1}(1,\dots,N-1,t)}_{2 f_{N-2}} = 2\frac{\partial}{\partial t} f_{N-2}(1,\dots,N-2,t)$$

c2) $$\int dz_{N-1}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\vec{p}_i}{m}\cdot\vec{\nabla}_{r_i} f_{N-1} = \sum_{i=1}^{N-1}\int dz_{N-1}\frac{\vec{p}_i}{m}\cdot\vec{\nabla}_{r_i} f_{N-1}$$

O termo $i = N-1$ é nulo, pois $\int d^3 r_{N-1}\frac{\vec{p}_i}{m}\cdot\vec{\nabla}_{r_i} f_{N-1} =$

$$= \frac{\vec{p}_i}{m}\cdot\underbrace{\int d^3 r_{N-1}\,\vec{\nabla} f_{N-1}}$$

em cada uma das componentes aparecem termos

$$\int dr_j\frac{\partial f_{N-1}}{\partial r_j} = f_{N-1}(1,\dots,r_j)\Big|_{r_j=-\infty}^{+\infty} = 0,$$ se f_{N-1} for bem comportada. ($\to 0$ quando $\vec{r}\to\pm\infty$)

($j = x,y,z$).

Fica então $$\sum_{i=1}^{N-2}\int dz_{N-1}\frac{\vec{p}_i}{m}\cdot\vec{\nabla}_{r_i} f_{N-1} = \sum_{i=1}^{N-2}\frac{\vec{p}_i}{m}\cdot\vec{\nabla}_{r_i}\underbrace{\int dz_{N-1}\, f_{N-1}}_{2 f_{N-2}}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{N-2}\frac{\vec{p}_i}{m}\cdot\vec{\nabla}_{r_i} f_{N-2}$$

$c_3)$

$$\int dz_{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \vec{K}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} f_{N-1} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \int dz_{N-1} \vec{K}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} f_{N-1}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-2} \int dz_{N-1} \vec{K}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} f_{N-1}}_{\text{(a) termos } i,j \text{ até } N-2} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N-1} \int dz_{N-1} \vec{K}_{N-1,j} \cdot \vec{\nabla}_{p_{N-1}} f_{N-1}}_{\text{(b) termos com } i=N-1}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1} \int dz_{N-1} \vec{K}_{i,N-1} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} f_{N-1}}_{\text{(c) termos com } j=N-1}$$

$$\text{(a)} = \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-2} \vec{K}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} \underbrace{\int dz_{N-1} f_{N-1}}_{2 f_{N-2}} = 2 \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-2} \vec{K}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} f_{N-2}$$

$$\text{(b)} = \sum_{j=1}^{N-1} \int d^3 r_{N-1} \vec{K}_{N-1,j} \cdot \underbrace{\int d^3 p_{N-1} \vec{\nabla}_{p_{N-1}} f_{N-1}}_{=0 \text{ se } f_{N-1} \text{ se anular em } p \to \pm\infty}$$

$$\text{(c)} = \sum_{i=1}^{N-2} \int dz_{N-1} \vec{K}_{i,N-1} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} f_{N-1}$$, onde o termo do

somatório em $i = N-1$ se anula pois $\vec{K}_{N-1,N-1} = \vec{0}$.

c4) juntando os termos já calculados, temos

$$2\frac{\partial}{\partial t} f_{N-2} + 2\sum_{i=1}^{N-2}{}' \frac{\vec{p}_i}{m}\cdot\vec{\nabla}_{r_i} f_{N-2} + 2\sum_{i=1}^{N-2}{}'\sum_{j=1}^{N-2}{}' \vec{K}_{ij}\cdot\vec{\nabla}_{p_i} f_{N-2} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N-2}{}' \int dz_{N-1}\, \vec{K}_{i,N-1}\cdot\vec{\nabla}_{p_i} f_{N-1} + \Lambda \;,$$

onde Λ é o resultado da integração do termo do lado direito da equação para f_{N-1}.

Comparando com a equação para f_{N-2} da hierarquia, que se escreve

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{N-2} + \sum_{i=1}^{N-2}{}' \frac{\vec{p}_i}{m}\cdot\vec{\nabla}_{r_i} f_{N-2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-2}{}'\sum_{j=1}^{N-2}{}' \vec{K}_{ij}\cdot(\vec{\nabla}_{p_i}-\vec{\nabla}_{p_j}) f_{N-2} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N-2}{}' \int dz_{N-1}\, \vec{K}_{i,N-1}\cdot\vec{\nabla}_{p_i} f_{N-1}$$

e notando que $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-2}{}'\sum_{j=1}^{N-2}{}' \vec{K}_{ij}\cdot(\vec{\nabla}_{p_i}-\vec{\nabla}_{p_j}) = \sum_{i=1}^{N-2}{}'\sum_{j=1}^{N-2}{}' \vec{K}_{ij}\cdot\vec{\nabla}_{p_i}$,

vemos que estamos a obter a equação da hierarquia multiplicada por 2. Do lado direito temos já os termos iguais, pelo que para obtermos o factor 2 devemos ter $\Lambda = -\sum_{i=1}^{N-2}{}' \int dz_{N-1}\, \vec{K}_{i,N-1}\cdot\vec{\nabla}_{p_i} f_{N-1}$

c5)

$$\Lambda = -\sum_{i=1}^{N-1}{}' \int dz_{N-1}\, dz_N\, \vec{K}_{iN}\cdot\vec{\nabla}_{p_i} f_N = -\sum_{i=1}^{N-2}{}' \int dz_{N-1}\, dz_N\, \vec{K}_{iN}\cdot\vec{\nabla}_{p_i} f_N$$

onde o termo $i=N-1$ se anula como nos casos anteriores, na integração em $d^3 p_{N-1}$ de $\vec{\nabla}_{p_{N-1}}$.

Como a função ρ (e a função f_N) é simétrica na troca de quaisquer pares de coordenadas $i \leftrightarrow j$, e as variáveis z_{N-1} e z_N são integradas em todo o espaço (variáveis mudas), podemos trocar os papéis das partículas $N-1$ e N:

$$\Lambda = -\sum_{i=1}^{N-2}{}' \int dz_N\, dz_{N-1}\, \vec{K}_{i,N-1} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} f_N =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N-2}{}' \int dz_{N-1}\, \vec{K}_{i,N-1} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} \underbrace{\int dz_N\, f_N}_{f_{N-1} \text{ (ver b))}} = -\sum_{i=1}^{N-2}{}' \int dz_{N-1}\, \vec{K}_{i,N-1} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} f_{N-1},$$

tal como antecipado na alínea c4.

Dividindo os resultados parcelares de c1 a c5 por 2, recuperamos a equação para f_{N-2} da hierarquia.

—n—

Nota 1: este problema é a continuação do exercício 3 do teste de 26/3/2014

Nota 2: este exercício mostra de onde aparece o factor 2 aparentemente em falta quando se olha para o lado esquerdo e o lado direito da equação para f_{N-1}: do lado direito da equação para f_{N-2} há uma contribuição adicional que vem dos termos do lado esquerdo :)