1.

a) O comportamento dos gases quânticos aproxima-se do dos gases ideais a altas temperaturas / baixas densidades. Mais especificamente, o comprimento de onda de De Broglie, que é da ordem do comprimento de onda térmico, deve ser muito inferior à distância média entre as partículas:

$$\lambda \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \quad , \quad \lambda = \left(\frac{h^2}{2\pi m k T}\right)^{1/2}$$

Definindo $n = \frac{N}{V}$ (densidade de partículas), esta condição pode escrever-se na forma $n\lambda^3 \ll 1$ (não temos partículas dentro de uma esfera de raio λ em torno de cada partícula)

b) Os gases de Fermi obedecem a um princípio de exclusão e o seu comportamento quântico pode associar-se a uma "repulsão estatística", que leva a que a sua pressão seja superior à do gás ideal clássico. Os gases de Bose, pelo contrário, estão associados a uma "atracção estatística", que leva a que a sua pressão seja inferior à do gás ideal clássico.

Se fossem 2 gases ideais clássicos, com o mesmo número de partículas e a mesma temperatura, o equilíbrio corresponderia a $V_F = V_B = \frac{1}{2}V$.

À luz do que foi dito acima, espera-se que o gás de Fermi ocupe um volume maior que o gás de Bose.

c) Para altas temperaturas, z é pequeno e

$$f_{3/2}(z) = \sum_{l=1}^{+\infty} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l^{3/2}} \simeq z - \frac{z^2}{2^{3/2}}$$

$$f_{5/2}(z) = \sum_{l=1}^{+\infty} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l^{5/2}} \simeq z - \frac{z^2}{2^{5/2}}$$

$$n = \frac{N}{V} = \frac{f_{3/2}(z)}{\lambda^3} \simeq \left(z - \frac{z^2}{2^{3/2}} \right) \frac{1}{\lambda^3}$$

$$n\lambda^3 \simeq z - \frac{z^2}{2^{3/2}}$$

Escrevendo $z = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l (n\lambda^3)^l$ e mantendo os termos à segunda ordem em $n\lambda^3$, $z = a_0 + a_1 (n\lambda^3) + a_2 (n\lambda^3)^2 + \dots$

$$(n\lambda^3) = a_0 + a_1 (n\lambda^3) + a_2 (n\lambda^3)^2 - \frac{\left[a_0 + a_1 n\lambda^3 + a_2 (n\lambda^3)^2\right]^2}{2^{3/2}}$$

Termo independente:

$$0 = a_0 - \frac{a_0^2}{2^{3/2}} \Rightarrow a_0 = 0$$

Termo em $(n\lambda^3)$:

$$1 = a_1$$

Termo em $(n\lambda^3)^2$:

$$a_2 - \frac{1}{2^{3/2}} = 0 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Assim $z \simeq n\lambda^3 + \frac{1}{2\sqrt{2}} (n\lambda^3)^2 = n\lambda^3 \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} n\lambda^3 \right]$

Substituindo na equação de estado,

$$\frac{P}{KT} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \simeq \frac{1}{\lambda^3}\left[z - \frac{z^2}{2^{5/2}}\right] = \frac{z}{\lambda^3}\left(1 - \frac{z}{2^{5/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda^3} n\lambda^3 \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} n\lambda^3\right]\left[1 - \frac{n\lambda^3}{2^{5/2}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} n\lambda^3\right)\right]$$

$$\simeq n\left[1 + \frac{n\lambda^3}{2\sqrt{2}} - \frac{n\lambda^3}{2^{5/2}}\right] = n\left(1 + \frac{2-1}{4\sqrt{2}} n\lambda^3\right)$$

$$\frac{P}{nKT} \simeq 1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} n\lambda^3 = 1 + \alpha(n\lambda^3), \qquad \alpha = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

—n—

d) $P_F = P_B$; $T_F = T_B$

$$\frac{P_F}{KT_F} = n_F\left(1 + \alpha n_F \lambda^3\right) = n_B\left(1 - \alpha n_B \lambda^3\right) = \frac{P_B}{KT_B}$$

$$\frac{n_F}{n_B} = \frac{1 - \alpha n_B \lambda^3}{1 + \alpha n_F \lambda^3} < 1 \implies n_F < n_B$$

$$\frac{N}{V_F} < \frac{N}{V_B} \quad ; \quad V_F > V_B.$$

O limite clássico corresponde a $n\lambda^3 \to 0$, $\frac{n_F}{n_B} \to 1$, $V_F = V_B$.