Data: 4 de Fevereiro de 2022
Duração: 45 minutos
Professor responsável: Vasco Guerra

1^o Teste
FÍSICA ESTATÍSTICA, LEFT 2021/22

Justifique cuidadosamente as suas respostas e apresente detalhadamente todos os cálculos que efectuar.

1. [7 val] Considere uma caixa dividida por um pistão móvel, mantida à temperatura T por uma fonte de calor. Do lado esquerdo do pistão encontra-se um gás de Fermi ideal, constituído por N partículas de massa m, enquanto o lado direito da caixa está ocupado por um gás de Bose ideal, formado também por N partículas de massa m. Sabe-se que o comportamento de ambos os gases se aproxima do comportamento de gases ideais clássicos.

   a. [1,5 val] Defina as condições em que este comportamento pode ocorrer.

   b. [1,5 val] No equilíbrio, qual dos gases espera que ocupe um volume maior? Justifique.

   c. [2,0 val] Sabendo que $z \simeq n\lambda^3 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} n\lambda^3\right)$, mostre que a equação de estado para o gás de Fermi se pode escrever na forma
   $$\frac{PV}{NkT} \simeq 1 + \alpha(n\lambda^3) \ ,$$
   onde $\alpha = \frac{1}{4\sqrt{2}}$, $n = N/V$ e λ é o comprimento de onda térmico.

   d. [2,0 val] A equação de estado do gás de Bose pode escrever-se na mesma forma, mas trocando o sinal de α. Confirme a previsão que fez na alínea 1b.

   Sugestão: parta das equações de estado, imponha as condições de equilíbrio entre os dois gases, e mostre que
   $$\frac{n_F}{n_B} = \frac{1 - \alpha n_B \lambda^3}{1 + \alpha n_F \lambda^3} \ ,$$
   onde $n_F = N/V_F$, V_F é o volume ocupado pelo gás de Fermi, e definições análogas para o gás de Bose.

2. [13 val] No contexto da hierarquia BBGKY, considere um sistema de N partículas de massa m descrito por um hamiltoneano da forma
   $$\mathcal{H}(p, r) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i<j} U_{ij} \ ,$$
   onde U_{ij} é o potencial de interacção entre as partículas i e j, com $U_{ij} = U_{ji} = U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$, e $p_i^2 = p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2$. A força na partícula i devida à partícula j é $\vec{K}_{ij} = -\vec{\nabla}_{r_i} U_{ij}$ e $\vec{K}_{ii} = 0$.

   a. [2,0 val] Descreva o significado da função densidade $\rho(1, \ldots, N, t)$ e das funções de distribuição de N, $N-1$ e $N-2$ partículas, respectivamente $f_N(1, \ldots, N, t)$, $f_{N-1}(1, \ldots, N-1, t)$ e $f_{N-2}(1, \ldots, N-2, t)$, onde nos argumentos das funções a variável i é uma abreviatura para $z_i = (\vec{r}_i, \vec{p}_i)$.

   b. [2,0 val] Relacione as funções de distribuição f_N, f_{N-1} e f_{N-2} com a função densidade ρ e mostre que $f_{N-2} = \frac{1}{2} \int dz_{N-1} f_{N-1}$, onde $dz_i \equiv d^3r_i d^3p_i$.

c. A equação que rege a evolução de f_{N-1} pode obter-se a partir do teorema de Liouville, integrando em dz_N, obtendo-se

$$\frac{\partial f_{N-1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\vec{p}_i}{m} \cdot \vec{\nabla}_{r_i} f_{N-1} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \vec{K}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} f_{N-1} = - \sum_{i=1}^{N-1} \int d^3 r_N d^3 p_N \vec{K}_{iN} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} f_N \ .$$

Pretendemos agora obter a equação para f_{N-2}, integrando a equação para f_{N-1} em dz_{N-1}. Mostre que:

c1. [1,5 val] o primeiro termo da equação se reduz a $2\frac{\partial f_{N-2}}{\partial t}$;

c2. [2,0 val] o segundo termo toma a forma

$$2 \sum_{i=1}^{N-2} \frac{\vec{p}_i}{m} \cdot \vec{\nabla}_{r_i} f_{N-2} \ ;$$

c3. [2,0 val] o terceiro termo fica

$$2 \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-2} \vec{K}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} f_{N-2} + \sum_{i=1}^{N-2} \int dz_{N-1} \vec{K}_{i,N-1} \cdot \vec{\nabla}_{p_i} f_{N-1} \ .$$

c4. [2,0 val] Qual deverá ser o resultado da integração do termo do lado direito?

c5. [1,5 val] Concretize a integração do termo do lado direito e verifique que obtém efectivamente a equação para f_{N-2} da hierarquia BBGKY.