Física estatística

Fotões e a radiação do corpo negro

MEFT, IST

"A scientific truth does not triumph by convincing its opponents and making them see the light, but rather because its opponents eventually die and a new generation grows up that is familiar with it."

Max Planck (1858–1947)

O corpo negro

- Corpo com volume V, cujas paredes se mantêm à temperatura T.
- Corresponde a fazer uma cavidade num material, fazer vácuo na cavidade e aquecer o material até uma dada temperatura.
- Os átomos das paredes emitem e absorvem continuamente radiação electromagnética.
  [originada pela agitação térmica das partículas $\rightarrow$ aceleração de partículas carregadas]
- Queremos conhecer as propriedades da radiação electromagnética no interior da cavidade na situação de equilíbrio.

Sobre a natureza da radiação do corpo negro

Para um corpo de dimensões maiores que os comprimentos de onda de interesse, em equilíbrio, o campo de radiação é:

- homogéneo;
- isotrópico.
- independente da polarização.
- independente da forma e volume do recipiente, do material que é feito e dos corpos que pode conter!

Em resumo

$\Rightarrow$ o campo de radiação só depende de T!

- Podemos escolher a configuração na fronteira que nos é mais conveniente $\ddot\smile$

Fotões e o campo electromagnético

- Hamiltoneano do campo electromagnético pode escrever-se como uma soma de termos, cada um com a forma de um oscilador harmónico.
- Vemos o campo de radiação como uma sobreposição de ondas planas de várias frequências
- Quanticamente, cada oscilador de frequência ω pode ter energia $\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega,\ n = 1, 2, \cdots$
- Associamos os fotões, de energia $\hbar\omega$, aos quanta do campo electromagnético.

$\Rightarrow$ O estado do campo electromagnético é especificado pelos números n para cada um dos osciladores $\leftrightarrow$ pelo número de fotões em cada frequência.

Fotões

- Os fotões são bosões de massa nula e spin $\hbar$.
- O spin pode ter duas orientações independentes (paralela ou anti-paralela ao momento) $\leftrightarrow$ onda plana electromagnética com polarização circular direita ou esquerda.
- Energia $E = \hbar\omega$; momento $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, com $|\vec{k}| = \omega/c$ (*i.e.*, $p = E/c$).
- Para cada direcção de $\vec{k}$ temos duas direcções de polarização linearmente independentes ($\vec{E} \perp \vec{k}$)
- A onda associada é da forma $\exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right]$

Densidade de estados

- Impondo condições de fronteira periódicas num cubo de volume $V = L^3$ (*cf.* aula 16)

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}$$

  onde $\vec{n}$ é um vector cujas componentes podem tomar os valores $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

- Os valores de $\vec{p}$ estão distribuídos numa rede de passo h/L
- Um elemento de volume d^3p contém $(L/h)^3 d^3p = (V/h^3)d^3p$ valores de p.

  [No limite $V \to \infty$, $\sum_p \to \int (V/h^3) d^3p$]

Porque são os fotões mais simples de tratar $\ddot\smile$

- A energia total é dada por

$$E\{n_{p,a}\} = \sum_{p,a} \hbar\omega n_{p,a}$$

  onde $n_{p,a}$ é o número de fotões de momento $\vec{p}$ e polarização $\vec{a}$, $\omega = pc/\hbar$ e $n_p = 0, 1, 2, \cdots$

- Normalmente o conjunto $\{n_{p,a}\}$ está sujeito à restrição $\sum_{p,a} n_{p,a} = N$...
- ... mas o número de fotões é indefinido: os fotões podem ser absorvidos e emitidos das paredes!

Função de partição

- A função de partição é então

$$Q = \sum_{\{n_{p,a}\}} \exp\left(-\beta E\{n_{p,a}\}\right)$$

sem nenhuma restrição em $\{n_{p,a}\}$.

- Obtemos, sucessivamente,

$$Q = \sum_{a} \sum_{n_{1,a},n_{2,a},\cdots=0}^{\infty} \exp\left(-\beta \sum_{p,a} \hbar\omega_p n_{p,a}\right)$$

$$= \prod_{p,a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\beta\hbar\omega_p n\right)\right]$$

$$\boxed{Q = \prod_{p,a} \frac{1}{1-\exp\left(-\beta\hbar\omega_p\right)}}$$

Números de ocupação

- Os números médios de ocupação são dados por

$$\langle n_p \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial E_p}\log Q$$

- Ora $E_p = \hbar\omega_p$ e

$$\log Q = -\sum_{p,a}\log\left[1-\exp\left(-\beta\hbar\omega_p\right)\right]$$

$$= -2\sum_{p}\log\left[1-\exp\left(-\beta\hbar\omega_p\right)\right]$$

- Finalmente, o número médio de fotões com momento p (independentemente da polarização), é

$$\langle n_p \rangle = \frac{2}{\exp\left(\beta\hbar\omega_p\right)-1}$$

Parentesis para reforço de ideias

- A última expressão corresponde ao gás de Bose, com a fugacidade $z = 1$ ($\mu = 0$), onde o factor 2 é a degenerescência resultante da polarização [na verdade... $Q \equiv \Xi$]
- Os parâmetros μ (ou z) e β são multiplicadores de Lagrange; o primeiro corresponde à condição de normalização no número de partículas... que agora não existe!
- Ainda sobre $z = 1$: neste caso o número de partículas é *indefinido*, pelo que o seu valor de equilíbrio $\bar{N}$ se determina a partir da condição de mínimo da energia livre de Helmholtz,

$$\left.\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T}\right|_{N=\bar{N}} = 0 \equiv \mu$$

- Ou ainda: $\sum_i \mu_i \nu_i = 0$ e reacções do tipo $e \to e + \gamma$

Energia interna

- A energia interna obtém-se de

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Q = 2 \sum_p \frac{\hbar\omega_p}{1 - \exp\left(-\beta\hbar\omega_p\right)} \exp\left(-\beta\hbar\omega_p\right)$$

$$= 2 \sum_p \hbar\omega_p \frac{1}{\exp\left(\beta\hbar\omega_p\right) - 1} = \sum_p \hbar\omega_p \langle n_p \rangle$$

  [como tinha que ser!!!]

- No limite $V \to \infty$, usando $\hbar\omega_p = pc$,

$$U = \frac{V}{h^3} \int d^3p \, \hbar\omega_p \langle n_p \rangle = \frac{2V}{h^3} \int_0^\infty dp \, 4\pi p^2 \frac{pc}{\exp\left(\beta pc\right) - 1}$$

Lei de Planck

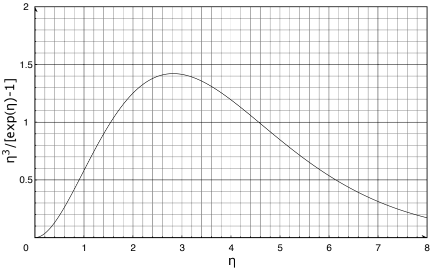
- Podemos escrever o resultado anterior na forma de *lei de Planck*
$$\frac{U}{V} = \int_0^\infty d\omega\, u(\omega, T)$$
com
$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}$$
- $u(\omega, T)$ é a densidade de energia dos fotões de frequência ω (independentemente da polarização e da direcção do momento).
- Na forma adimensional, $\eta = \hbar\omega/kT$,
$$u(\eta, T) = \frac{(kT)^4}{\pi^2\hbar^3 c^3} \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} \quad ; \quad \frac{U}{V} = \int_0^\infty d\eta\, u(\eta, T)$$

Lei do deslocamento de Wien

- A função $\eta^3/(e^\eta - 1)$ tem um máximo para $\eta \simeq 2.8214$
- Se à temperatura T_1 o máximo de emissão ocorre para um comprimento de onda λ_1, então a T_2 ocorre para λ_2 tal que

$$\eta_1 = \eta_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_1}{T_1} = \frac{\omega_2}{T_2} \quad ; \quad \lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2$$

$$\lambda_{max} T \simeq 2.898 \times 10^{-3} \ \ \text{m.K}$$



Energia interna e calor específico

- O integral pode calcular-se $\ddot\smile$

$$\int_0^\infty d\eta \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

- A energia interna por unidade de volume é

$$\frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{15(\hbar c)^3}(kT)^4 \propto T^4$$

- Calor específico (por unidade de volume)

$$c_V = \frac{4\pi^2}{15(\hbar c)^3}k^4 T^3 \propto T^3$$

Parentesis: a catástrofe dos ultra-violeta

- Classicamente cada oscilador contribui com kT para a energia média $\Rightarrow$ a energia total seria infinita.
- Da lei de Planck, para $\hbar\omega \ll kT$, $\frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega)-1} \simeq \frac{kT}{\hbar\omega} \ldots$
- $\ldots$ e $u(\omega, T) \simeq u_{RJ}(\omega, T) = \frac{kT\omega^2}{\pi^2 c^3}$ – lei (clássica) de *Rayleigh-Jeans*
- O integral de $u_{RJ}(\omega, T)d\omega$ diverge, como antecipado.
- A distribuição de Planck resolve o problema: para as altas frequências (baixos comprimentos de onda - "ultra-violeta") o termo exponencial torna a contribuição para $u(\omega, T)$ negligenciável!

Lei de Stephan-Boltzmann

- Se abrirmos uma pequena "janela" para o mundo exterior na cavidade do corpo negro, podemos verificar as propriedades da radiação.

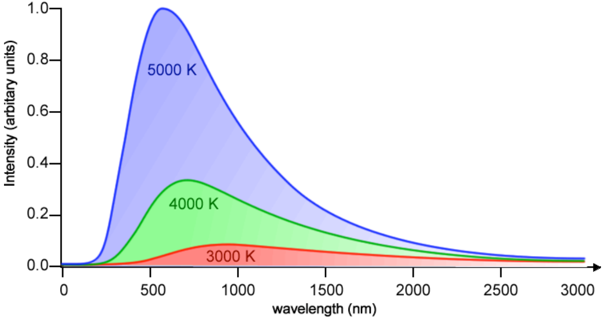
- A energia que escapa por unidade de tempo, por unidade de área, sob a forma de fotões de frequência ω é

$$I(\omega, T) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega u(\omega, T) c \cos\theta = \frac{1}{4} u(\omega, T) c$$

- Integrando em todas as frequências, obtemos a *lei de Stephan-Boltzmann*

$$I(T) = \int_0^\infty d\omega\, I(\omega, T) = \sigma T^4 \quad ; \quad \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2}$$

Lei de Stephan-Boltzmann



$$\sigma \simeq 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$$

Equação de estado

- A equação de estado obtém-se de

$$A = -kT \log Q \quad ; \quad P = -\frac{\partial A}{\partial V}$$

- Usando os resultados anteriores,

$$\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\vec{n} = \frac{2\pi\hbar}{V^{1/3}}\vec{n} \quad ; \quad \omega_p = \frac{pc}{\hbar} = 2\pi c V^{-1/3}|\vec{n}|$$

$$\log Q = -2\sum_p \log\left[1 - \exp\left(-\beta\hbar\omega_p\right)\right]$$

$$= -2\sum_n \log\left[1 - \exp\left(-\beta\hbar 2\pi c V^{-1/3}|\vec{n}|\right)\right]$$

- Finalmente,

$$P = \frac{1}{3V}\sum_p \hbar\omega\langle n_p\rangle \quad ; \quad \boxed{P = \frac{1}{3}\frac{U}{V}}$$

Notas finais

- Podemos obter directamente

$$
\begin{aligned}
A = -kT \log Q &= 2kT \sum_p \log\left[1 - \exp\left(-\beta\hbar\omega_p\right)\right] \\
&\simeq \frac{V}{h^3} \int 4\pi p^2 \log\left[1 - \exp\left(-\beta\hbar\omega_p\right)\right] \\
&= -\frac{VkT}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega\omega^3 \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{e^{-\beta\hbar\omega} - 1} = -\frac{\sigma}{3c} V T^4
\end{aligned}
$$

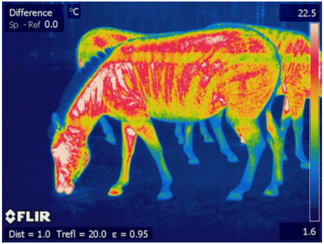
- donde

$$
\begin{aligned}
P &= -\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_T = \frac{4\sigma}{3c} T^4 = \frac{1}{3}\frac{U}{V} \\
S &= -\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_V = \frac{16\sigma}{3c} V T^3 \propto T^3
\end{aligned}
$$

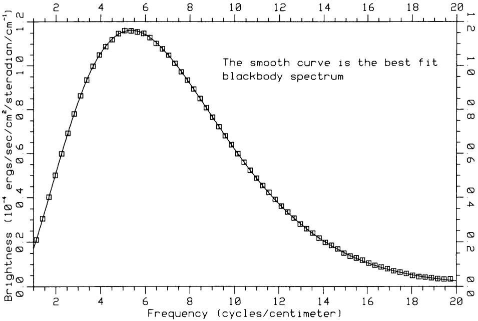
Notas finais (cont)

- A equação de estado também se poderia ter obtido de $\frac{PV}{kT} = \log \Xi$
- Os resultados $P = (1/3)(U/V)$ e $U \propto T^4$ podem obter-se classicamente.
- Os valores das constantes só se podem obter com o tratamento quântico.
- A lei de Planck dá uma confirmação experimental adicional que os fotões não devem ter massa $\ddot\smile$
  [a degenerescência devido à polarização seria 3 e não 2]

Bónus



Bónus



Medidas do satélite COBE (Cosmic Background Explorer) da radiação de fundo, entre 1 cm e 0.5 mm

J. C. Mather *et al*, *The Astrophysical Journal* (1990) **354** L37–L49