Exercícios Resolvidos de Mecânica Orbital

Para a disciplina de Mecânica Orbital

Paulo J. S. Gil

Instituto Superior Técnico
$\boxed{\mathcal{IST}}$ 2021, vs. 0.1 (17 Nov. 2021)

Conteúdo

Prefácio

Apresentação e informações

Eis finalmente um conjunto de problemas de Mecânica Orbital com resolução. A maior parte destes problemas, se não todos, surgiram em exames de anos anteriores da disciplina de Mecânica Orbital ou suas encarnações passadas — Satélites e Dinâmica de Satélites — originalmente da Licenciatura em Engenharia Aeroespacial e depois do Mestrado Integrado em Engenharia Aeroespacial, no Instituto Superior Técnico. a disciplina sofreu pequenas alterações mas foram mínimas, mantendo-se os exercícios relevantes.

Estas resoluções foram realizadas originalmente com o propósito de ajudar a correcção de exames. Consequentemente, as resoluções não incluem, nesta versão, explicações ou comentários muito desenvolvidos e que seriam requeridos numa resolução durante um exame. Também por isso, muitas vezes o resultado é apresentado em diferentes unidades para levar em conta os usos diversos em respostas de exame. Em futuras iterações o número de comentários poderá aumentar de modo a aumentar a utilidade no processo de aprendizagem.

Estudar problemas resolvido pode ser muito útil mas também contraproducente. Efectivamente, a parte mais difícil de descobrir o caminho está feita e impede o estudante de desenvolver essa capacidade e espírito crítico. Por causa disso, sugere-se fortemente que o leitor tente em primeiro lugar resolver cada exercício sem consultar a resolução. Ao consultar esta, uma vez que é parca em comentários, o estudante deve manter um espírito crítico de se perguntar porque se está a seguir um caminho e não outro. Não que outros caminhos, e até alguns melhores, não possam ser seguidos.

Sendo que o programa da disciplina tem sofrido alguma evolução, algumas partes da matéria não estão cobertas, até porque em algumas o mais importante não são exercício mas sim a nomenclatura e os conceitos. Optou-se por manter os títulos do programa corrente presentes, mesmo que haja conteúdo vazio, para melhor guiar o estudante no conteúdo. No entanto, é inevitável que muitos problemas tenham questões de secções diferentes do programa. Para ajudar na resolução, incluiu-se em Apêndice o formulário corrente da disciplina, bem como os valores adoptados nas resoluções de alguns parâmetros frequentes.

O autor espera que este conjunto de resoluções seja útil no estudo, já que a sua publicação requereu um esforço considerável. O autor agradece *feedback* sobre gralhas, erros eventuais e sugestões de melhoria.

Nota sobre as referências

Muitos dos problemas apresentados neste documento tiveram origem, ou foram inspirados na bibliografia apresentada, nomeadamente [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Os alunos são convidados a resolver mais exercícios destas referências.

1 Introdução e Notas Históricas

2 O Teatro de Operações Celeste

3 Revisão da Mecânica de Partículas

4 Órbitas Keplerianas

Propriedades das Órbitas

1. Calcule o raio das órbitas geoestacionárias.

Correcção:

- 1 dia sideral $= 86\,164.09\,\mathrm{s} = 2\pi\sqrt{\frac{r_G^3}{\mu_\oplus}} \quad\Rightarrow\quad r_G = \left[\mu_\oplus\left(\frac{1\text{ dia sideral}}{2\pi}\right)^2\right]^{1/3} \quad\Rightarrow\quad \boxed{r_G = 42\,164.2\,\mathrm{km}}$

---

2. Calcule (ou justifique o valor) (d)os elementos clássicos de órbita i, a e e das órbitas geoestacionárias.

Correcção:

- Para ser geoestacionária a órbita tem que ser equatorial e circular $\quad\Rightarrow\quad \boxed{i = \pi/2, e = 0}$
- $T = 1$ dia sideral $= 86\,164.09\,\mathrm{s} = 2\pi\sqrt{\frac{r_G^3}{\mu_\oplus}} \quad\Rightarrow\quad r_G = \left[\mu_\oplus\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\right]^{1/3} \quad\Rightarrow\quad \boxed{r_G = a = 42\,164.2\,\mathrm{km}}$

---

3. Um satélite está a passar na periápside da órbita, situada a $2R_\oplus$ do foco, com velocidade $v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\mu_\oplus}{R_\oplus}}$. Determine o vector de Laplace-Runge-Lenz, escrito no referencial polar local $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$.

Correcção:

- Satélite na periápside $\quad\Rightarrow\quad \vec{r}\perp\vec{v}, \quad \vec{r} = r\vec{e}_r \Rightarrow \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r, \quad \vec{v} = v\vec{e}_\theta, \quad R_\oplus \equiv R, \mu_\oplus \equiv \mu$
- $h = r_p v_p = \cancel{2}R\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{3\mu}{R}} = \sqrt{3\mu R}, \quad \vec{h} = h\vec{e}_z, \qquad \vec{v}\times\vec{h} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\mu}{\cancel{R}}}\sqrt{3\mu\cancel{R}}\,\vec{e}_r = \frac{3\mu}{2}\,\vec{e}_r$
- $\vec{e} = \frac{\vec{v}\times\vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} = \frac{3\cancel{\mu}}{2\cancel{\mu}}\vec{e}_r - \vec{e}_r \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{e} = \frac{1}{2}\vec{e}_r}$

---

4. Considere uma partícula sujeita unicamente a uma força central com centro O. Demonstre, justificando todos os passos cuidadosamente, que o seu momento angular relativamente a O se conserva.

Correcção:

- Força central, logo: $\vec{F} = F\vec{e}_r$ M.A. relativamente a O é dado por: $\vec{H}_O = \vec{r}\times m\vec{v}$

  Derivando o M.A. e usando a 2a lei de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$:

  $$\frac{\mathrm{d}\vec{H}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{v} + \vec{r}\times m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\vec{v}\times m\,\vec{v}}_{=0\ (\vec{v}\,\|\,m\vec{v})} + \vec{r}\times\underbrace{m\,\vec{a}}_{=\vec{F}} = \underbrace{\vec{r}\times F\,\vec{e}_r}_{=0\ (\vec{r}\,\|\,F\vec{e}_r)} = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{H}_0 = \mathrm{Cte}} \qquad \text{qed}$$

---

5. Determine a (i) anomalia verdadeira θ e (ii) o respectivo *flight path angle* γ do(s) ponto(s) de uma órbita elíptica de excentricidade e onde a velocidade iguala a velocidade de uma órbita circular que tenha o mesmo raio; (iii) calcule $\{\theta, \gamma\}$ no caso $e = 1$, explique brevemente o que se passa, e determine o raio e a velocidade nesse caso.

Correcção:

(i) $r:$ $\quad v_{el} = v_c \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2\mu(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a})} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad \Leftrightarrow \quad r = a \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$

- Da eq. da órbita com $r = a$: $\quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} = a \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = -e \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\theta = \arccos(-e)}$

(ii) Conserv. mom. angular, $h_{\text{ponto}} = h_{\text{periápsis}}$:

- $r v \sin(\pi/2 - \gamma) = a\sqrt{\frac{\mu}{a}}\cos\gamma = \sqrt{\mu a}\cos\gamma = h = r_p v_p = a(1-e)\sqrt{2\mu(\frac{1}{a(1-e)} - \frac{1}{2a})} = \sqrt{\mu a}\sqrt{1-e^2} \Leftrightarrow$

  $\cos\gamma = \sqrt{1-e^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \arccos\sqrt{1-e^2}}$ $\quad$ (tb se pode obter $\boxed{\gamma = \arcsin e}$)

(ii) [Alt.] $\quad v_r = \dot r, v_\theta = r\dot\theta, \quad$ calcular em θ : $\quad \cos\theta = -e \quad$ (de (i)). $\quad$ Usando eq. órbita:

- $v_r = \dot r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\right)_{\cos\theta=-e} = \frac{a(1-e^2)e\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^2}\dot\theta_{\cos\theta=-e}, \qquad v_\theta = r\dot\theta = \left(\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2)^2}\right)\dot\theta_{\cos\theta=-e}$

- $\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\theta} = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \arctan\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}}$

(iii) De (i): $\theta \to \arccos(-1) = \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \pi}$ $\qquad$ De (ii): $\gamma \to \arcsin 1 = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \pi/2}$

- $e = 1 \quad \Rightarrow \quad$ órbita parabólica, $\quad$ de (i): $r = a = \infty \quad \Rightarrow \quad$ ponto no infinito: $\boxed{r = \infty, v = 0}$

  [Alt.] $e = 1 \quad \Rightarrow \quad$ órbita parabólica, $\quad \Rightarrow \quad$ condição: $v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \infty, v = 0}$

---

6. Um asteróide com 20 km de diâmetro foi detectado a descrever uma órbita parabólica heliocêntrica directa no plano da eclíptica com periélio $R_p = 1/2\,\text{UA}$.

(a) Escreva a equação da trajectória do asteróide e determine as anomalias verdadeiras quando o asteróide passa na órbita da Terra.

(b) (i) Utilizando a conservação do momento angular e a equação da trajectória, deduza as expressões das componentes (físicas) radial e tangencial da velocidade em função da anomalia verdadeira e parâmetros conhecidos do problema; (ii) calcule as componentes da velocidade em todos os casos em que o asteróide cruza a órbita da Terra.

(c) Determine o tempo, em dias, que decorre entre duas passagens dos asteróide pela órbita terrestre.

Correcção:

a) Órbita parabólica: $e = 1, \quad p = \dfrac{h^2}{\mu} = 2R_p = 1\,\text{UA} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \dfrac{2R_p}{1+\cos\theta} = \dfrac{1\,\text{UA}}{1+\cos\theta}}$

Nota: $h = R_p V_p = R_p\sqrt{\dfrac{2\mu}{R_p}} = \sqrt{2\mu R_p} \quad \Rightarrow \quad p = \dfrac{h^2}{\mu} = \dfrac{2\mu R_p}{\mu} = 2R_p$

- órbita da Terra: $r = 1\,\text{UA} = \dfrac{1\,\text{UA}}{1+\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}}$

---

b) Tem-se $v_r = \dot r, \quad v_\theta = r\dot\theta, \quad h = r v_\theta = r^2\dot\theta \quad \Rightarrow \quad \dot\theta = \dfrac{h}{r^2}$, logo, dif. a eq. órbita ($2R_p = 1\,\text{UA}$):

(i) $v_r = \dot r = \dfrac{2R_p \sin\theta\,\dot\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \dfrac{(2R_p)^2}{(1+\cos\theta)^2}\dfrac{\sin\theta}{2R_p}\dfrac{h}{r^2} = \dfrac{h}{2R_p}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad (h=\sqrt{2\mu R_p}) \quad \boxed{v_r = \sqrt{\dfrac{\mu}{2R_p}}\sin\theta}$

$$v_\theta = r\dot\theta = r\frac{h}{r^2} = \frac{h}{r} = h\frac{1+\cos\theta}{2R_p} = \frac{h}{2R_p}(1+\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad (h=\sqrt{2\mu R_p}) \quad \boxed{v_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{2R_p}}(1+\cos\theta)}$$

(ii) 2 casos: passagem pela órbita da Terra (I) antes e (II) depois do periélio, correspondentes a $\theta = \mp\dfrac{\pi}{2}$;

Tem-se: $\sqrt{\dfrac{\mu}{2R_p}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{1\,\text{UA}}} = V_\oplus = 29.7831\,\text{km/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_r(\theta = \mp\pi/2) = \mp V_\oplus} \quad \boxed{v_\theta(\theta=\mp\pi/2) = V_\oplus}$

Nota: $h = \sqrt{2\mu R_p} = 4.4555\times10^9\,\text{km}^2/\text{s} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\dfrac{\mu}{2R_p}} = \dfrac{h}{2R_p} = \dfrac{h}{1\,\text{UA}} = \dfrac{\mu}{h} = 8.87\times10^5\,\text{km/s}$

---

c) Tempo entre passagens, t_{TT}, é igual a 2 vezes o tempo do periélio à órbita, t_{pT}, $\quad t_{TT} = 2t_{pT}$

- $\theta = \dfrac{\pi}{2}$: $\quad 2\sqrt{\dfrac{\mu_\odot}{p^3}}t_{pT} = \tan\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{1}{3}\tan^3\dfrac{\theta}{2} = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad t_{pT} = \dfrac{4}{3\times2}\sqrt{\dfrac{p^3}{\mu_\odot}}$

- $p = 1\,\text{UA} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{TT} = 2t_{pT} = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{(1\,\text{UA})^3}{\mu_\odot}} = 6.697\,31\times10^6\,\text{s} = 77.5152\,\text{d}}$

Órbita estabelecida a partir de condições iniciais

7. Um satélite foi inserido numa órbita terrestre num ponto à distância de 7000 km do centro da Terra, com velocidade (módulo) igual a 7.5 km/s e ângulo de voo igual a 10°. Determine o raio do perigeu e diga justificando se a órbita vai existir durante muito tempo.

Correcção:

- $\gamma_0 = 10° = \dfrac{\pi}{18}\,\text{rad} = 0.174\,533\,\text{rad}$ Valores de r_0, v_0, γ_0 $\Rightarrow$ $K \equiv \dfrac{r_0 v_0^2}{\mu_\oplus} = 0.987\,832$
- $e^2 = (K-1)^2\cos^2\gamma_0 + \sin^2\gamma_0 = 0.0302973$ $\Rightarrow$ $e = 0.174\,061$
- $a = \dfrac{r_0}{2-K} = 6915.85\,\text{km}$ $\Rightarrow$ $\boxed{r_p = a(1-e) = 5712.07\,\text{km}}$
- $r_p < R_\oplus$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{órbita vai cair em menos de uma volta}}$

---

8. Um satélite foi inserido numa órbita terrestre num ponto à distância de 7000 km do centro da Terra, com velocidade (módulo) igual a 7.5 km/s e ângulo de voo igual a 10°. Determine a anomalia verdadeira da órbita no instante da inserção.

Correcção:

- $\gamma_0 = 10° = \dfrac{\pi}{18}\,\text{rad} = 0.174\,533\,\text{rad} > 0$ Valores de r_0, v_0, γ_0 $\Rightarrow$ $K \equiv \dfrac{r_0 v_0^2}{\mu_\oplus} = 0.987\,832$
- $\tan\theta_0 = \dfrac{K\sin\gamma_0\cos\gamma_0}{K\cos^2\gamma_0 - 1} = -4.0265$ $\Rightarrow$

  $\theta_0 = -1.327\,37\,\text{rad} = -76.0525°$ [Q4] $\vee$ $\theta_0 = -1.327\,37\,\text{rad} + \pi = 1.814\,23\,\text{rad} = 103.947°$ [Q2]
- $\gamma_0 > 0$ $\Rightarrow$ $\theta_0 \in [0,\pi]$ $\Rightarrow$ $\boxed{\theta_0 = 1.814\,23\,\text{rad} = 103.947°}$

---

9. Um satélite foi inserido numa órbita em torno da Terra com as condições iniciais: $r_0 v_0^2/\mu_\oplus = 3/2$, $\gamma_0 = -30°$, $r_0/R_\oplus = 2$. Determine os parâmetros da órbita do satélite, nomeadamente (i) a excentricidade, (ii) a anomalia verdadeira inicial, (iii) semi-eixo maior e (iv) a energia. **Nota**: deixe os resultados em função de constantes físicas conhecidas como por exemplo o raio da Terra.

Correcção:

[Tempo de resolução: 10 min]

(i) $e^2 = \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1\right)^2 \cos^2\gamma_0 + \sin^2\gamma_0$ $\Rightarrow$ $e^2 = \left(\frac{3}{2}-1\right)^2 (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$

$\Rightarrow$ $\boxed{e = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0.661438}$

(ii) $\tan\theta_0 = \frac{(r_0v_0^2/\mu)\sin\gamma_0\cos\gamma_0}{(r_0v_0^2/\mu)\cos^2\gamma_0 - 1}$ $\Rightarrow$ $\tan\theta_0 = \frac{(3/2)\times(-1/2)\times(\sqrt{3}/2)}{(3/2)\times(\sqrt{3}/2)^2-1} = -\frac{3\sqrt{3}/8}{1/8} = -3\sqrt{3}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\theta_0 = -79.1066°(\text{ou } 280.893°)$ $\vee$ $\theta_0 = 100.893°$

Como $\gamma_0 < 0$, o satélite está nos Quadrantes 3 ou 4 $\Rightarrow$ $\boxed{\theta_0 = 280.893°(\text{ou } -79.1066°)}$

(iii) $\frac{a}{r_0} = \frac{1}{2-\frac{r_0v_0^2}{\mu}}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{a}{2R_\oplus} = \frac{1}{2-\frac{3}{2}} = 2$ $\Rightarrow$ $\boxed{a = 4R_\oplus = 25512\,km}$

(iv) Da eq. da energia, usando 1o dado ($\frac{r_0v_0^2}{\mu} = \frac{3}{2}$): $\varepsilon \equiv \frac{E}{m} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = \frac{1}{2}\frac{3\mu}{2r_0} - \frac{\mu}{r_0} = \frac{\mu}{2R_\oplus}(\frac{3}{4}-1) = -\frac{1}{8}\times\frac{\mu}{R_\oplus}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\varepsilon = -\frac{1}{8}\frac{\mu}{R_\oplus} = -7.81\times 10^6\,\text{J/kg}}$

---

5 Determinação da Órbita e da Sonda no Espaço e no Tempo

5.1 Equação de Kepler

10. Um satélite encontra-se sobre o semi-eixo menor de uma órbita elíptica de excentricidade $e = 3/4$ onde a componente radial da velocidade é positiva. Calcule o tempo, em percentagem do período orbital, que o satélite demora a atingir a apoápside da órbita.

Correcção:

- Seja t_a o tempo para atingir a apoápside; $\dot{r} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ em t_0 o satélite está na 1a metade da órbita sendo t_0 o tempo desde periápside até semi-eixo menor; então: $\quad t_a = T/2 - t_0$
- Satélite no semi-eixo menor $\quad \Rightarrow \quad$ anomalia excêntrica $\quad E = \pi/2, \quad$ logo
- Eq. Kepler: $\quad M = E - e \sin E = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} = 0.820\,796\,\mathrm{rad}$
- Tem-se $\quad t_0 = M\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad$ e o período $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad$ logo

$$\frac{t_0}{T} = \frac{M}{2\pi} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8\pi} = 0.130634 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_a}{T} = \frac{1}{2} - \frac{t_0}{T} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8\pi} = 0.369366 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_a = 36.9366\%\,T}$$

---

11. Para uma órbita elíptica de excentricidade $e = 3/4$ calcule a fracção do período em que o satélite passa em cada um dos lados do *latus rectum*, em unidades do período orbital.

Correcção:

- latus rectum divide a elipse numa paralela ao eixo menor passando pelo foco $\quad \Rightarrow \quad \theta = \pm\pi/2$
- Seja t_s o tempo desde a periápside até ao semi-latus rectum, com E_s e M_s

período $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}, \quad t_s = M_s\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_s}{T} = \frac{M_s}{2\pi}$

- por simetria, tempo à direita do latus rectum: $\quad t_d = 2t_s \quad \Rightarrow \quad \tau_d \equiv \frac{t_d}{T} = \frac{2t_s}{T} = \frac{M_s}{\pi}$
- por simetria, tempo à esquerda do latus rectum: $\quad t_e = T - 2t_s \quad \Rightarrow \quad \tau_e \equiv \frac{t_e}{T} = 1 - \frac{2t_s}{T} = 1 - \frac{M_s}{\pi}$
- $e = 3/4, \theta = \pi/2: \quad \tan E_s = \dfrac{\sqrt{1-(\frac{3}{4})^2}\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{3}{4}\cos\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\sqrt{\frac{7}{16}}\times 1}{\frac{3}{4}+0} = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \quad$ (1° quadrante) $\quad \Leftrightarrow$

$E_s = 0.722\,734\,\mathrm{rad} = 41.4096°, \quad M_s = E_s - \frac{3}{4}\sin E_s = 0.226\,656\,\mathrm{rad} \quad \Rightarrow$

- $\tau_d = \dfrac{M_s}{\pi} = 0.0721468 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_d = 7.21468\%} \qquad \tau_e = 1 - \tau_d = 0.927853 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_e = 92.7853\%}$

12. Um satélite encontra-se numa órbita elíptica de excentricidade $e = 3/4$ e em que a distância mínima ao astro central é d. Calcule o tempo, em percentagem do período orbital, que o satélite demora a atingir a distância $4d/3$ a partir do ponto mais baixo da órbita.

Correcção:

- $e = 3/4 \quad$ e tem-se $\quad r_p = d \quad$ logo $\quad d = a(1-e) = a/4 \quad \Rightarrow \quad a = 4d$
- Da eq. órbita: $\quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4d}{3} = \frac{4d(1-\frac{9}{16})}{1+\frac{3}{4}\cos\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{5}{12}$

$\Rightarrow \quad \theta = 1.14102\,\mathrm{rad} = 65.3757° \quad$ [1° Q] $\quad \vee \quad$ [2a sol. (4o Q) não serve pq se vem do periápsis

- Anom. Excêntrica: $\quad \tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1/4}{7/4}}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{7}}\tan\frac{\theta}{2} = 0.242536$

$\Rightarrow \quad E = 2\arctan 0.242536 = 0.475882\,\mathrm{rad} = 27.266° \qquad$ [outra sol. não serve pq θ é do 1o Q]

- Eq. Kepler: $M = E - e\sin E = E - \frac{3}{4}\sin E = 0.13229\,\text{rad}$
- O tempo t para chegar a distância pretendida. $t = M\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ e o período é $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ logo

  o tempo t em fracção do período é: $\frac{t}{T} = \frac{M}{2\pi} = 0.0210546 \Rightarrow \boxed{t = 2.10546\%T}$

5.2 Elementos Clássicos de Órbita

13. Sabe-se que uma certa órbita é circular, directa, tem período igual a meio dia sideral e atinge a latitude máxima $\lambda_{\max} = 38.7°$ (Lisboa). Determine todos os Elementos Clássicos de Órbita que for possível.

Correcção:

- Apenas comentário: $e = 0 \Rightarrow T_0$ e ϖ não fazem sentido; Órbita circular $\Rightarrow \boxed{e = 0}$
- órbita directa, $\lambda_{\max} = 38.7° \Rightarrow \boxed{i = \lambda_{\max} = 38.7°}$
- $T = \dfrac{1\text{ dia sideral}}{2} = 43\,082\,\text{s} = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{\mu_\oplus}} \Rightarrow \boxed{a = \left[\mu_\oplus\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2\right]^{1/3} = 26\,561.8\,\text{km}}$

---

14. Uma órbita polar atinge altitudes máxima e mínima de 600 km e 400 km, respectivamente. Determine todos os Elementos Clássicos de Órbita que for possível.

Correcção:

- A órbita é polar, logo a normal à órbita é perpendicular a $\vec{e}_z \Rightarrow \boxed{i = \dfrac{\pi}{2}}$
- Sabendo-se r_p, r_a pode-se saber mais 2 ECO, a, e; usando $a = \dfrac{r_p + r_a}{2}$ e $r_p = a(1-e)$,

  obtém-se $\boxed{a = R_\oplus + 500\,\text{km} = 6878\,\text{km}}$ $\boxed{e = 1 - \dfrac{r_p}{a} = 0.0145391}$

---

15. Um radar detectou um satélite a orbitar a Terra e determinou que os seus vectores posição e velocidade, medidos hoje às 19h00 no referencial inercial centrado na Terra (ECI) $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, eram respectivamente $\vec{r}_0 = 2R_\oplus\vec{k}$ e $\vec{v}_0 = -\sqrt{2/5}\sqrt{\mu/R_\oplus}\,\vec{i}$. Determine todos os elementos clássicos de órbita do satélite.

Correcção:

- $\vec{r}_0 \parallel \vec{k},\ \vec{v}_0 \parallel \vec{i} \Rightarrow \vec{r}_0 \perp \vec{v}_0 \Rightarrow$ satélite encontra-se no perigeu ou no apogeu e $\gamma_0 = 0$
- $\vec{r}_0 \parallel \vec{k} \Rightarrow \boxed{i = 90°}$ com este resultado e o da linha anterior: $\varpi = 90° \vee \varpi = 270°$
- $\vec{h} = \vec{r}_p \times \vec{v}_0 \parallel \vec{j} \Rightarrow$ órbita no plano $\vec{i} - \vec{k}$; $\vec{v}_0 < 0 \Rightarrow$ nodo asc. é semi-eixo positivo de $\vec{i} \Rightarrow \boxed{\Omega = 0}$
- $\varepsilon = -\frac{\mu}{2a} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = \frac{2\times\mu}{2\times5\times R_\oplus} - \frac{\mu}{2R_\oplus} = \left(\frac{2}{5} - 1\right)\frac{\mu}{2R_\oplus} \Rightarrow a = R_\oplus/(1 - \frac{2}{5}) \Rightarrow \boxed{a = \frac{5R_\oplus}{3}}$
- $\gamma_0 = 0 \Rightarrow e^2 = \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1\right)^2 = \left(\frac{2R_\oplus}{\mu} \times \frac{2\mu}{5R_\oplus}\right)^2 = (\frac{4}{5} - 1)^2 = (\frac{1}{5})^2 \Rightarrow \boxed{e = \frac{1}{5}}$
- Usando a, e acima, $r_p = a(1-e) = \frac{4R_\oplus}{3} < 2R_\oplus = r_0 \Rightarrow r_0 = r_a \Rightarrow \boxed{\varpi = 270°}$
- $r_0 = r_a \Rightarrow \theta_0 = \pi \Rightarrow t - t_p = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}(\frac{5R_\oplus}{3})3/2 = 5453.57\,\text{s} = 1\,\text{h}\ 30\,\text{min}\ 53.57\,\text{s}$

  $\Rightarrow \boxed{t_p = 17\,\text{h}\ 29\,\text{min}\ 6.43\,\text{s de 23 de Novembro de 2017}}$

  [ou $t_p = 19\,\text{h} + \frac{T}{2} = 20\,\text{h}\ 30\,\text{min}\ 53.57\,\text{s}$]

---

16. Um satélite em órbita terrestre passou em 28 de Maio de 2014, 23h30 UTC pela linha do equador e foi determinado que esse ponto é o perigeu, situado a 200 km de altitude. Neste instante, o equinócio vernal encontra-se no zénite do lugar e o satélite desloca-se para Norte, numa linha paralela ao eixo de rotação da Terra. Diga justificando quanto valem a inclinação da órbita, a ascensão recta do nodo ascendente e o argumento do perigeu. Pode calcular mais algum parâmetro clássico de órbita? Se sim, determine-o, e diga que informação mínima necessita mais para calcular os restantes, se for o caso.

Correcção:

- órbita polar pois trajectória é $\perp$ plano do equador $\Rightarrow$ $\boxed{i = 90°}$
- perigeu no equador e velocidade dirigida para norte no perigeu (nodo ascendente) $\Rightarrow$ $\boxed{\varpi = 0°}$
- vertical do lugar é o eixo $\vec{e}_x$ e é o nodo ascendente (velocidade para Norte) $\Rightarrow$ $\boxed{\Omega = 0°}$
- *neste momento* o satélite passa no perigeu $\Rightarrow$ $\boxed{t_p = \textit{28 de Maio de 2014, 23h30 UTC}}$
- Faltam os ECO a, e; o raio do perigeu relaciona-os e é conhecido: $r_p = R_\oplus + 200\,\text{km} = a(1-e)$

$\boxed{\text{necessário apenas mais 1 dado}}$

---

17. A posição $\vec{r}$ e a velocidade $\vec{v}$ de um satélite no referencial geocêntrico inercial (ECI) foram determinadas hoje, às 18:30, como sendo $\vec{r} = 12\,670\,\vec{k}$ [km] e $\vec{v} = -3.874\,\vec{j} - 0.7905\,\vec{k}$ [km/s]. Calcule todos os elementos clássicos de órbita.

Correcção:

- $\vec{r} = 12670\,\vec{k} \equiv r\,\vec{k}$ [km], $\quad \vec{v} = -3.874\,\vec{j} - 0.7905\,\vec{k} \equiv -u\,\vec{j} - w\,\vec{k}$ [km/s] $\Rightarrow$

  $|\vec{r}| = r = 12\,670\,\text{km}, \qquad |\vec{v}| = v = 3953.83\,\text{km/s}$

- Da eq. energia: $\quad E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{r}{2-\frac{rv^2}{\mu}} = 8429.29\,\text{km}}$

- $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = ur\,\vec{i} = 49.083 \times 10^3\,\vec{i}\,[\text{km}^2/\text{s}]$, a órbita encontra-se no plano yz, logo:

  $\vec{h} = h\,\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = 90°}$, como tb $h > 0$, $\boxed{\Omega = 90°}$ e ainda, o nodo ascendente $\vec{n} = \vec{j}$

- $\vec{e} = \frac{1}{\mu}(\vec{v} \times \vec{h} - \mu\frac{\vec{r}}{r}) = \frac{\vec{v}\times\vec{h}}{\mu} - \vec{k} = (-\frac{uwr}{\mu})\vec{j} + (\frac{ru^2}{\mu} - 1)\vec{k} = -0.0973421\vec{j} - 0.522956\vec{k} \quad \rightsquigarrow$

- Componentes de $\vec{e}$ ambas negativas $\Rightarrow$ $\omega \in 3°$ Quadr., e $\boxed{e = \sqrt{\frac{r^2u^2w^2}{\mu^2} + (\frac{ru^2}{\mu})^2} = 0.531938}$

- $\frac{\vec{e}}{e} \cdot \vec{j} = \frac{\vec{e}}{e} \cdot \vec{n} = \cos\omega \quad \Rightarrow \quad \cos\omega = -0.182995 \quad \Rightarrow \quad \omega = 100.544° \quad \vee \quad \omega = 259.456°$

  mas $\omega \in 3°$ Quadr. $\Rightarrow$ $\boxed{\omega = 259.456°}$

- $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = (\frac{a}{r}(1-e^2) - 1)/e = -0.983114 \quad \Rightarrow \quad \theta = 169.456° \quad \vee \quad \theta = 190.544°$

  como $\vec{r} \parallel \vec{k}$ e $\omega \in 3°$ Quadr., então $\theta = 190.544°$

  Usando $\theta_{comp} = 169.456°$, pode-se calcular o tempo para completar o período T e $t - t_p = T - t_{comp}$

  $$\theta_{comp} = 169.456° = 2.95756\,\text{rad} \quad \Rightarrow \quad E_{comp} = 2\arctan\left(\sqrt{\tfrac{1-e}{1+e}}\tan(\tfrac{\theta_{comp}}{2})\right) = 2.81076\,\text{rad} = 161.045°$$

  $$M_{comp} = E_{comp} - e\sin E_{comp} = 2.63797 \quad \Rightarrow \quad t_{comp} = M_{comp}\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = 3233.61\,\text{s} = \frac{M_{comp}}{2\pi}T$$

  $$t - t_p = T - t_{comp} = T(1 - \frac{M_{comp}}{2\pi}) = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}(1 - \frac{M_{comp}}{2\pi}) = 4468.28\,\text{s} = 74\,\text{min}\;28.28\,\text{s} \simeq 1\,\text{h}\;14\,\text{min}\;28\,\text{s}$$

  $\boxed{t_p = t - (t - t_p) = \text{17h15m32s UTC, [data do exame]}}$

5.3 Problema de Lambert

6 Manobras Orbitais

Velocidade de escape

18. Considere uma sonda numa órbita circular de raio $r = 6700\,\text{km}$ em torna da Terra. Calcule o Δv mínimo necessário para a sonda escapar da atracção terrestre.

Correcção:

- $v_c = \sqrt{\dfrac{\mu_\oplus}{6700\,\text{km}}} = 7.713\,14\,\text{km/s}$, $\quad v_e = \sqrt{\dfrac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}v_c$, $\quad \boxed{\Delta v_e = (\sqrt{2}-1)v_c = 3.194\,89\,\text{km/s}}$

Transferências de Hohmann

19. Calcule o Δv total dispendido numa transferência de Hohmann entre uma órbita baixa em torno da Terra situada a 300 km de altitude e uma órbita quase geoestacionária (mas não exactamente) situada a 36 000 km de altitude.

Correcção:

- $r_1 = R_\oplus + h_1 = 6678\,\text{km}$, $\quad r_2 = R_\oplus + h_2 = 42\,378\,\text{km}$, $\quad 2a = r_1 + r_2 = 49\,056\,\text{km}$
- $v_{c1} = \sqrt{\dfrac{\mu_\oplus}{r_1}} = 7.725\,84\,\text{km/s}$, $\quad v_{pt} = \sqrt{2\mu_\oplus\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{2a}\right)} = 10.1551\,\text{km/s}$
- $v_{c2} = \sqrt{\dfrac{\mu_\oplus}{r_2}} = 3.066\,89\,\text{km/s}$, $\quad v_{at} = \sqrt{2\mu_\oplus\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{2a}\right)} = 1.600\,26\,\text{km/s}$
- $\Delta v_1 = v_{pt} - v_{c1} = 2.429\,27\,\text{km/s}$, $\quad \Delta v_2 = v_{c2} - v_{at} = 1.466\,63\,\text{km/s}$

$$\boxed{\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 3.895\,91\,\text{km/s}}$$

---

20. Calcule o Δv total dispendido numa transferência de Hohmann entre uma órbita baixa em torno da Terra situada a 180 km de altitude e a órbita da Lua. Considere que esta tem 384 400 km de raio.

Correcção:

- $r_1 = R_\oplus + h_1 = 6558\,\text{km}$, $\quad r_2 = 384\,400\,\text{km}$, $\quad 2a = r_1 + r_2 = 390\,958\,\text{km} \quad \Rightarrow \quad a = 195\,479\,\text{km}$
- $v_{c1} = \sqrt{\dfrac{\mu_\oplus}{r_1}} = 7.7962\,\text{km/s}$, $\quad v_{pt} = \sqrt{2\mu_\oplus\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{2a}\right)} = 10.9326\,\text{km/s}$
- $v_{c2} = \sqrt{\dfrac{\mu_\oplus}{r_2}} = 1.0183\,\text{km/s}$, $\quad v_{at} = \sqrt{2\mu_\oplus\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{2a}\right)} = 0.186\,515\,\text{km/s}$
- $\Delta v_1 = v_{pt} - v_{c1} = 3.136\,43\,\text{km/s}$, $\quad \Delta v_2 = v_{c2} - v_{at} = 0.831\,788\,\text{km/s}$

$$\boxed{\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 3.968\,22\,\text{km/s}}$$

Mudanças de plano

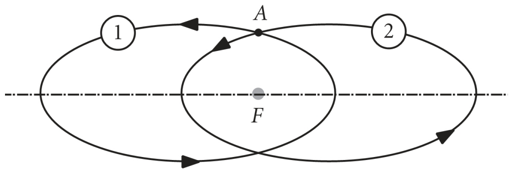
21. Considere uma sonda numa órbita circular de raio $r = 6700\,\text{km}$ e inclinação 39°, que passa sobre Lisboa. Calcule o Δv necessário (módulo) para transferir a sonda para uma órbita equatorial circular de igual raio.

Correcção:

- $r = 6700\,\text{km}$; a órbita é circular e tem velocidade $\quad v_c = \sqrt{\dfrac{\mu_\oplus}{r}} = 7.713\,14\,\text{km/s}$
- Órbitas equatoriais: $\quad i = 0 \quad \Rightarrow \quad |\Delta i| = 39° \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\Delta v| = 2v_c \sin\left(\dfrac{|\Delta i|}{2}\right) = 5.1494\,\text{km/s}}$

Problemas variados de manobras orbitais

22. Considere as órbitas 1 e 2 da figura, iguais e opostas.



(a) Calcule o Δv necessário em A na órbita 1 para que uma manobra de um único impulso rode a linha das ápsides 180° no sentido directo (passando para a órbita 2), mantendo a excentricidade e o momento angular inalterados.

(b) Calcule os Δv totais necessários para passar da órbita 1 para a 2 através de transferências de 2 impulsos similares às de Hohmann (i) entre as periápsides e (ii) entre as apoápsides.

(c) No caso de $e = 4/5$ determine qual das 3 manobras descritas nas alíneas anteriores é preferível utilizar, em função do valor $R = \sqrt{\mu/a}$. [Nota: se não calculou o resultado da alínea a), utilize o valor $\Delta v = 2\mu e/h$]

Correcção:

a) órbitas iguais e opostas, flight path angle igual em módulo, velocidade v de ambas as órbitas no ponto igual, $\theta = 90°, 270°$ para as órbitas 1 e 2, Δv radial negativo

- geometria do problema $\Rightarrow$ $\Delta v = 2v\sin\gamma$ No ponto: $r = r(\theta = 90°) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos 90°} = a(1-e^2)$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{a(1-e^2)} - \frac{1}{2a}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{\sqrt{1+e^2}}{\sqrt{1-e^2}} \left[= \frac{\mu}{h}\sqrt{1+e^2}\right]$$

- $h = rv\cos\gamma = r_p v_p, \qquad r_p = a(1-e) \qquad \Rightarrow \qquad v_p = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{a(1-e)} - \frac{1}{2a}\right)} = \ldots = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}$

$$\cos\gamma = \frac{r_p v_p}{rv} = \frac{a(1-e)\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}}{a(1-e^2)\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{\sqrt{1+e^2}}{\sqrt{1-e^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \frac{e}{\sqrt{1+e^2}}$$

- $\boxed{\Delta v = 2v\sin\gamma = 2e\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}}$ usando $a(1-e^2) = \frac{h^2}{\mu}$ para eliminar a $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta v = 2e\mu/h}$

---

b) (i) [(ii)] No periápside [apoápside] passa-se para uma órbita circular no ponto travando [acelerando]; quando se chega à outra órbita acelera-se [trava-se] com o mesmo Δv

- (i) $\Delta v_{tot} = 2(v_p - v_{cp})$ $\quad v_p =$ vel. no perigeu da órbita; $\quad v_{cp} =$ vel. da órbita circular com $r = r_p$
- $v_p =$ (alínea anterior) $= \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}; \qquad v_{cp} = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e)}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{1}{\sqrt{1-e}}$ logo

[Nota: $\frac{\mu}{h} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$] $\boxed{\Delta v_{tot} = 2\sqrt{\frac{\mu}{a}}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - \frac{1}{\sqrt{1-e}}\right) = 2\sqrt{\frac{\mu}{a}}\left(\frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1-e}}\right) \left[= 2\frac{\mu}{h}[(1+e) - \sqrt{1+e}]\right]}$

- (ii) $\Delta v_{tot} = 2(v_{ca} - v_a)$ $\quad v_a =$ vel. no apogeu da órbita; $\quad v_{ca} =$ vel. da órbita circular com $r = r_a$
- $r_a = a(1+e): \quad v_a = \sqrt{\mu(2/r_a - 1/a)} = \ldots = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}; \qquad v_{ca} = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1+e)}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{1}{\sqrt{1+e}}$ logo

$$\boxed{\Delta v_{tot} = 2\sqrt{\frac{\mu}{a}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+e}} - \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right) = 2\sqrt{\frac{\mu}{a}}\left(\frac{1-\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}}\right) \left[= 2\frac{\mu}{h}[\sqrt{1-e} - (1-e)]\right]}$$

---

c) $e = 4/5 \qquad R \equiv \sqrt{\frac{\mu}{a}} \qquad \Delta v_{a)} = 2R\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} = 2R\frac{4/5}{\sqrt{9/25}} = 2R\frac{4}{3} = 2R \times 1.33(3) = R \times 2.66(6)$

- $\Delta v_{b)(i)} = 2R\frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1-e}} = 2R(3-\sqrt{5}) = 2R \times 0.763932 = R \times 1.525786$
- $\Delta v_{b)(ii)} = 2R\frac{1-\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}} = 2R\left(\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3}\right) = 2R \times 0.412023 = R \times 0.824045$ $\qquad$ melhor na apoápside!

---

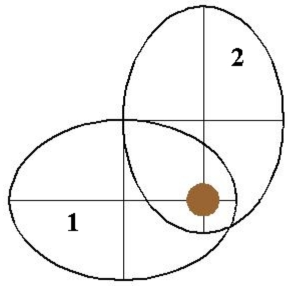
23. Uma sonda espacial encontra-se numa órbita circular de raio r e velocidade v_c em torno de um planeta não especificado. Um foguete de manobra é disparado, aumentando instantaneamente a velocidade na direcção do movimento em $\Delta v = \alpha v_c > 0$. Calcule a excentricidade da nova órbita em função de α.

Correcção:

- $v = v_c + \Delta v = v_c + \alpha v_c = (1+\alpha)\sqrt{\frac{\mu}{r}}, \quad v > v_c, v \parallel v_c \quad \Rightarrow \quad r = r_p$ periápside
- da energia $\quad -\frac{\mu}{2a} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{(1+\alpha)^2\mu}{2r} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2r}((1+\alpha)^2 - 2) \quad \Rightarrow \quad -\frac{r}{a} = 1 + \alpha^2 + 2\alpha - 2 = \alpha^2 + 2\alpha - 1$
- $r = r_p \quad \Rightarrow \quad r = a(1-e) \quad \Leftrightarrow \quad e = 1 - \frac{r}{a} = 1 + \alpha^2 + 2\alpha - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = \alpha(\alpha+2)}$

---

24. Considere as duas órbitas da figura, ambas com semi-eixo maior a e excentricidade e, em torno de um planeta de parâmetro μ. Um satélite, que descreve a órbita 1 no sentido directo, vai passar para a órbita 2 através de uma transferência de um único impulso.



(a) Mostre que, uma vez que um dos pontos de intersecção das órbitas é no semi-eixo menor de ambas, se tem excentricidade $e = \sqrt{2}/2$.

Correcção:

- Da figura, a distância do foco ao centro da elipse ae iguala o semi-eixo menor: $ae = b = a\sqrt{1-e^2}$ resolvendo para a excentricidade: $\quad e = \sqrt{1-e^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2e^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{e = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

(b) Sabendo que o eixo x do referencial está alinhado com o eixo maior da órbita 1 e sentido para o periápside, determine em função dos dados do problema (i) as equações da trajectória de ambas as órbitas; (ii) as anomalias verdadeiras de ambos os pontos de intersecção, (iii) as distâncias r a ambos os pontos de intersecção, e (iv) os raios da periápside e da apoápside.

Correcção:

(i) Órbita 1 está alinhada com coord. polares ($\beta_0 = 0$); órbita 2 está rodada $\frac{3\pi}{2}$ no sentido directo relativamente à órbita 1 ($\Rightarrow \beta_0 = 3\pi/2$) logo, da eq. trajectória $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\beta_0)}$ com $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

- Eq. órbita 1: $\quad \boxed{r = \frac{a/2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta}}, \quad$ Eq. órbita 2: $\quad \boxed{r = \frac{a/2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta - 3\pi/2)}}.$

(ii) $ae = b \;\Rightarrow\;$ intersecções nas bissectr. quadr. pares

$\Rightarrow$ Órb. 1: $\boxed{\mathrm{AV}_{1,2} = \theta_{1,2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} (\text{ou} \frac{7\pi}{4})}$

- $\Rightarrow$ Órb. 2: $\boxed{\mathrm{AV}_{1,2} = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} (\text{ou} - \frac{3\pi}{4}) \text{ (órb 2 directa)}}$ $\quad$ (órb. 2 retrógr. $\Rightarrow$ $\mathrm{AV}_{1,2} = \mathrm{AV}_{1,2}$(órb. 1))

(iii) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ é no semieixo menor $\quad \Rightarrow \quad \boxed{r(\theta = \frac{3\pi}{4}) = a}, \quad$ Da eq. órb.: $\boxed{r(\theta = -\frac{\pi}{4}) = \frac{a/2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(-\frac{\pi}{4})} = \frac{a}{3}}$

(iv) $\quad \boxed{r_p = a(1-e) = a(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0.292893\,a}, \quad \boxed{r_a = a(1+e) = a(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1.70711\,a}$

(c) Calcule em função dos dados do problema o módulo do momento angular por unidade de massa relativamente ao centro do astro central de cada uma das órbitas.

Correcção:

- M.A.(órb. 1)= h (directa); M.A.(órb. 2)= h [$-h$], para órb. 2 directa [retrograda]; usando órb. 1:

- $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad h = r_p v_p = a(1-e)\sqrt{2\mu(\frac{1}{a(1-e)} - \frac{1}{2a})} = \sqrt{\frac{2\mu a^2(1-e)^2}{a(1-e)} - \frac{2\mu a^2(1-e)^2}{2a}}$

$$= \sqrt{2\mu a(1-e) - \mu a(1-e)^2} = \sqrt{\mu a(1 - e[2-(1-e)])} = \sqrt{\mu a(1-e)(1+e)}$$

$$\Leftrightarrow \quad h = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \sqrt{\frac{\mu a}{2}} = 0.7071\sqrt{\mu a}}$$

(d) Calcule o $\Delta\vec{v}$ necessário (módulo, direcção e sentido) para a transferência do satélite da órbita 1 para a órbita 2 no ponto de intersecção de maior raio, para os casos de órbita 2 (i) directa e (ii) retrógrada.

Correcção:

- Transferência em pontos correspondentes das órbitas com $r = a$; vel. inicial $\vec{v}_i$ e finais $\vec{v}_f^{d,r}$ (órb. 2 directa ou retrógrada) iguais em módulo e perpendiculares a $\vec{v}_i$
- $v_i = \sqrt{2\mu(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a})} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\Delta\vec{v}| = \sqrt{v_i^2 + v_f^2} = \sqrt{\frac{2\mu}{a}} \text{ (órb. 2 directa ou retrógrada)}}$, e:

(i) órb. 2 directa: $\boxed{\Delta\vec{v} \text{ faz } -45^\circ \text{ com eixo } x}$ (ii) órb. 2 retrógrada: $\boxed{\Delta\vec{v} \text{ faz } +45^\circ \text{ com eixo } x}$

(e) Calcule o $\Delta\vec{v}$ se a transferência acontecer no ponto de intersecção das órbitas mais próximo do planeta, no caso de a órbita 2 final ser directa (tal como a órbita 1).

Correcção:

- As anom. verdadeiras das órb. 1 e 2 são respectivamente $\mp\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad v_i = v_f = v, \; \gamma_{i,f} = \mp|\gamma_0|$
- [alínea. b):] $r = \frac{a}{3} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{5\mu}{a}}$; [alínea. c):] $\sqrt{\frac{\mu a}{2}} = h = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{5\mu}{a}}\cos\gamma_0$

$$\Rightarrow \cos\gamma_0 = \frac{3}{\sqrt{10}} \;\Rightarrow\; \sin\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

- $|\gamma_0| = 0.321751\,\text{rad} = 18.43^\circ$, $|v|$ iguais $\quad \Rightarrow \quad \Delta v = 2v\sin\gamma_0 = 2\sqrt{\frac{5\mu}{a}}\sqrt{\frac{1}{10}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta v = \sqrt{\frac{2\mu}{a}}}$

(f) Sabendo que o satélite se encontra inicialmente na periápside na órbita 1, determine em função do período orbital T das órbitas quanto tempo demorará o satélite a atingir a periápside e a apoápside da órbita 2, para ambos os casos de a órbita 2 ser (i) directa e (ii) retrógrada.

Correcção:

- Seja t o tempo que o satélite demora a ir da periápside ao semi-eixo menor; claramente anom. exc. $E = \pi/2$
- $e = \frac{\sqrt{2}}{2}, E = \pi 2 \quad \Rightarrow \quad M = E - e\sin E = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau \equiv \frac{t}{T} = \frac{M}{2\pi} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4\pi} = 0.13746$
- (1) $t_{p1\to p2d} = t + t$, (2) $t_{p1\to a2d} = t + t + \frac{T}{2}$, (3) $t_{p1\to p2r} = t + T - t$, (4) $t_{p1\to a2r} = t + T - \frac{T}{2} - t$

com p,a = periápside,apoápside e d,r = órb. directa, retrógrada; Em unidades do período T:

- (1) $\boxed{\tau_{p1\to p2d} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} = 0.275}$, (2) $\boxed{\tau_{p1\to a2d} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} = 0.775}$,

(3) $\boxed{\tau_{p1\to p2r} = 1}$, (4) $\boxed{\tau_{p1\to a2r} = \frac{1}{2}}$

(g) Se o primeiro ponto de Áries se encontrar na direcção e sentido da periápside da órbita inicial e o eixo polar na direcção e sentido do apoápside da órbita final a partir do planeta, e ambas as órbitas forem descritas no sentido directo, determine para ambas o valor dos elementos clássicos de órbita inclinação, longitude do nodo ascendente e argumento do periápside.

Correcção:

- Ambas as órbitas no plano x, z $\quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{inclinação} \quad i_{1,2} = 90^\circ}$
- Nodo asc. das 2 órbitas passa na parte positiva de x $\quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Long. nodo asc.} \quad \Omega_{1,2} = 0^\circ}$
- Medindo $\angle$ nodo asc. — arg. da periápside: órb. 1: $\boxed{\varpi_1 = 0}$, órb. 2: $\boxed{\varpi_2 = \frac{3\pi}{2} (\text{ou} - \frac{\pi}{2})}$

---

25. Um satélite militar encontrava-se numa órbita equatorial circular de raio r em torno da Terra. Devido a convulsões políticas mundiais, foi decidido que ele devia passar para uma órbita circular com o mesmo raio mas com uma inclinação i diferente.

(a) Determine a inclinação a partir da qual é mais fácil ao satélite manobrar para escapar da atracção terrestre do que passar para a nova órbita.

(b) Tendo em conta a alínea anterior, imagine uma manobra que permita mudar a inclinação da órbita do satélite de modo mais económico que a mudança de plano directa e calcule o valor aproximado de i a partir do qual vale a pena utilizar essa manobra alternativa.

Correcção:

a) $v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$; Velocidade de escape: $v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}v_0$

- Logo: $\Delta v_e = v_e - v_0 = (\sqrt{2}-1)v_0 = (\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{\mu}{r}}$
- Mudança de plano: $\Delta v_{mp} = 2v\sin(\Delta i/2) = 2\sqrt{\frac{\mu}{r}}\sin(\Delta i/2)$
- $\Delta v_e = \Delta v_{mp} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\frac{\Delta i}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$
- $\boxed{\Delta i = 2\arcsin(\frac{\sqrt{2}-1}{2}) = 2\arcsin(0.207107) = 0.417233\,\text{rad} = 23.9057°}$
- Uma mudança de pano com $\Delta i > 23.9°$ custa mais que escapar para infinito

---

b) Escapar para $\infty \mapsto v = 0$ em $\infty \mapsto \Delta v_{mp} \simeq 0 \mapsto$ voltar de $\infty \mapsto$ travar

- $\Delta v_{\text{total}} = 2\Delta v_e = 2\,(\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{\mu}{r}}$
- Valerá a pena para: $\Delta i: \quad 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{\mu}{r}} \leqslant 2\sqrt{\frac{\mu}{r}}\sin\frac{\Delta i}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{2}-1) \leqslant \sin\frac{\Delta i}{2} \quad \Leftrightarrow$
- $\boxed{\Delta i > 2\arcsin(\sqrt{2}-1) = 0.854157\,\text{rad} = 48.9396°}$
- Para $\Delta i > 48.94°$ vale mais ir a infinito fazer a manobra

---

26. Uma sonda espacial encontra-se numa órbita circular em torno da Terra a 400 km de altitude. Imaginando que se podia ignorar a atmosfera:

(a) Determine o impulso (Δv_1) mínimo necessário para que a sonda rase a superfície da Terra, não se esquecendo de indicar módulo, direcção e sentido.

(b) Após o impulso da alínea anterior a sonda encontra-se agora na trajectória que rasa a Terra. Supondo que a Terra não roda, para além de não ter atmosfera, (i) calcule o impulso (Δv_2) que será necessário aplicar para que a sonda se imobilize na superfície (não se esqueça de indicar a localização do impulso, direcção e sentido relativamente à órbita). (ii) Usando no máximo 100 palavras, discuta a necessidade e viabilidade de realizar tal manobra na prática — com ou sem atmosfera.

(c) Para determinar qual seria o efeito da rotação da Terra, calcule a velocidade tangencial do planeta à superfície devido à sua rotação (i) no equador, (ii) a 30° de latitude e (iii) nos pólos; (iv) diga qualitativamente (usando não mais que 100 palavras) como a rotação da Terra afectaria a manobra da alínea b) no caso de a sonda atingir a superfície nas três possibilidades (i), (ii) e (iii), e nos casos de órbitas directas e retrógradas.

(d) (i) Calcule o tempo entre Δv_1 e Δv_2 das alíneas anteriores. (ii) Usando no máximo 100 palavras, diga justificando se este tempo é uma boa estimativa do caso real com atmosfera.

Correcção:

a) Órbita de transferência com apogeu $r_a = R_\oplus + 400\,\text{km}$ e perigeu $r_p = R_\oplus$, logo

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = 6578\,\text{km}, \qquad \text{vel. apogeu órb. transf.:} \quad v_{at} = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a}\right)} = 7.551\,15\,\text{km/s}$$

$$\text{vel. órb. original:} \quad v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} = 7.668\,63\,\text{km/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta v_1 = v_{at} - v_c = -117.48\,\text{m/s} \quad \text{[trava]}}$$

---

b) (i) Para ficar imóvel tem que anular a velocidade no perigeu da órbita de transferência $r_p = R_\oplus$, logo

$$\text{De a)}, \quad a = 6578\,\text{km} \quad \Rightarrow \quad v_{pt} = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{2a}\right)} = 8.024\,73\,\text{km/s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta v_2 = 0 - v_{pt} = -8.024\,73\,\text{km/s}}$$

- (ii) Com atmosfera não seria necessário gastar propelente, pois esta travaria o satélite e Δv_2 seria desnecessário. Por outro lado, Δv_2 é tão grande que seria necessário um foguete comparável com o que colocou o satélite em órbita para o realizar, e um muito maior para colocar tudo isso em órbita originalmente.

---

c) A velocidade angular da Terra é $\omega_\oplus = \dfrac{2\pi}{1\text{ dia sideral}} = \dfrac{2\pi}{86\,164.09\,\text{s}} = 7.292\,12 \times 10^{-10}\,\text{rad/s}$

A velocidade linear depende da latitude λ e é dada por $v(\lambda) = \omega_\oplus R_\oplus \cos\lambda \quad \Rightarrow$

(i) no equador, $\boxed{v(0) = 465.091\,\text{m/s}}$ (ii) na latitude $\lambda = 30°$, $\boxed{v(30°) = 402.781\,\text{m/s}}$

(iii) nos pólos, $\boxed{v(\pm 90°) = 0}$ [todas na direcção Leste]

(iv) No caso de órbitas directas a velocidade da Terra ajuda a que Δv_2 seja menor; o caso mais favorável é o caso da órbita equatorial, quando $\lambda = 30°$ ajuda significativamente, mas menos do que parece porque a velocidade da Terra não tem a mesma direcção da velocidade orbital; no caso da órbita polar não há diferença. Para órbitas retrógradas a rotação da Terra exige um aumento de Δv_2, na mesma proporção do caso anterior.

---

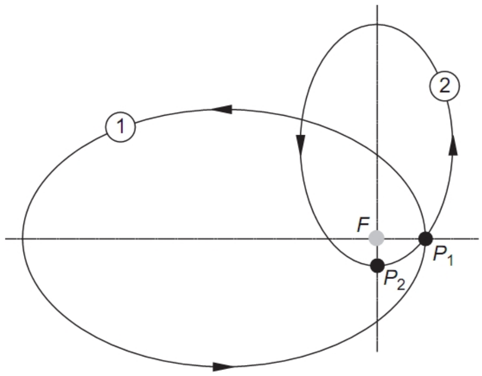
d) (i) O tempo que demora a chegar à superfície t_s é metade do período da órbita de transferência

$$\text{De a)}, \quad a = 6578\,\text{km} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_s = \frac{1}{2}T_t = \pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2654.74\,\text{s} = 44\,\text{min}\,14.74\,\text{s}}$$

(ii) É uma boa estimativa, pois se o satélite vai entrar na atmosfera a meio caminho e cair mais perto do ponto onde começou, vai por outro lado desacelerar na sua descida atmosférica. O tempo não deverá ser portanto muito diferente.

---

27. Um satélite na órbita 1 (ver figura) de semi-eixo maior $a_1 = a$ realiza uma manobra de um impulso no ponto P_1 às 15:00 de hoje, de tal modo que a órbita final 2 tem a mesma excentricidade $e_2 = e_1 = e$, mas a linha das ápsides está rodada 90° no sentido retrógrado relativamente à original. Ambas as órbitas são descritas no sentido directo. O corpo central é a Terra e $\overrightarrow{FP_1}$ aponta para o Equinócio Vernal enquanto que $\overrightarrow{P_2F}$ aponta para o pólo Norte.



(a) Calcule o momento angular por unidade de massa da órbita 2, h_2, em função do da órbita inicial 1, h_1, e da excentricidade e.

(b) No caso de $e = \frac{1}{2}$, determine quanto tempo o satélite vai demorar a chegar ao perigeu P_2 da órbita final, depois da manobra em P_1; obtenha a resposta em função do período T_2 da órbita final.

(c) Seja agora $a_2 = \frac{a}{1+e}$ e $e = \frac{1}{2}$. Determine (i) o ângulo de voo imediatamente após a manobra, e (ii) o módulo do Δv da manobra, em unidades de $\sqrt{\mu/a}$.

(d) Determine ou indique (i) os Elementos Clássicos de Órbita da órbita 1, e (ii) os Elementos Clássicos de Órbita da órbita 2 para os quais consegue um valor numérico (note que $a_2 = \frac{a}{1+e}$ e $e = \frac{1}{2}$).

Correcção:

a) $e_2 = e_1 = e$ $\quad$ P_1 é o perigeu da órbita 1, $r_p^{(1)} = a_1(1-e)$ e o semi-latus rectum da órbita 2, $r_0^{(2)}$

- e tem-se na órbita 1...: $\quad h_1 = r_p^{(1)} v_p^{(1)}$ $\quad$ ...e na órbita 2: $\quad r_0^{(2)} = \dfrac{a_2(1-e^2)}{1 + \underbrace{e\cos 90°}_{=0}} = a_2(1-e^2)$

- $a_1 \equiv a$ e das 2 linhas anteriores: $\quad r_0^{(2)} = r_p^{(1)} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \dfrac{a_1}{1+e} = \dfrac{a}{1+e}$

- $\dfrac{h^2}{\mu} = a(1-e^2), \quad e_1 = e_2 \quad \Rightarrow \quad h_{1,2} = \sqrt{\mu a_{1,2}(1-e^2)} \quad \Rightarrow$

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} = \sqrt{\frac{a_1/(1+e)}{a_1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_2 = \frac{h_1}{\sqrt{1+e}}}$$

---

b) T_2 = período orb. 2; $\quad t_s$ = tempo de P_2 a P_1; $\quad$ tempo pretendido t: $\quad t = T_2 - t_s \quad \Rightarrow \quad \dfrac{t}{T_2} = 1 - \dfrac{t_s}{T_2}$

- $\sin E = \dfrac{\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{1-e^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow$

$$\frac{t_s}{T_2} = \frac{M}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(E - e\sin E) = \frac{1}{2\pi}(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = \ldots\text{MMA, difícil}\ldots = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8\pi} = 0.0977506$$

Logo, $\boxed{\dfrac{t}{T_2} = 1 - \dfrac{t_s}{T_2} = \dfrac{5}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{8\pi} = 0.902249}$ $\quad$ [se $e \neq \frac{1}{2}$ então $\frac{t}{T_2} = 1 - \frac{\arcsin\sqrt{1-e^2}}{2\pi} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{2\pi}$]

---

c) $a_1 = a, \quad a_2 = \dfrac{a}{1+e}, \quad e = 1/2 \quad \Rightarrow \quad r_0 = a(1-e) = a/2 \quad v_i$ = vel. órbita i em P_1

(i) $v_1 = \sqrt{2\mu\left(\dfrac{1}{a(1-e)} - \dfrac{1}{2a}\right)} = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}}\sqrt{\dfrac{2}{1-e} - 1} = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}}\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}}\sqrt{3}$

- $v_2 = \sqrt{2\mu\left(\dfrac{1}{a(1-e)} - \dfrac{1}{2a_2}\right)} = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}}\sqrt{\dfrac{2}{1-e} - (1+e)} = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}}\sqrt{\dfrac{1+e^2}{1-e}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}}\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

- Conservação de M.A. na órbita 2: $\quad h_2 = rv\cos\gamma = \sqrt{\mu a_2(1-e^2)} \quad$ γ é o ângulo entre v_1 e v_2

- $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{\mu\dfrac{a}{1+e}(1+e)(1-e)}}{r_0 v_2} = \dfrac{\sqrt{\mu a(1-e)}}{a(1-e)\sqrt{\dfrac{\mu}{a}}\sqrt{\dfrac{1+e^2}{1+e}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^2}} = \sqrt{\dfrac{4}{5}}$ $\quad(\theta_2 \in [0,\pi] \ \Rightarrow\ \gamma > 0)$

- $\sin\gamma = \sqrt{1-\dfrac{4}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \boxed{\gamma = \arccos\sqrt{\dfrac{4}{5}} = 0.463648\,\text{rad} = 26.5651°}$

(ii) Seja $\vec{e}_x \parallel \overrightarrow{FP_1}$, $\vec{e}_z \parallel \overrightarrow{P_2F} \parallel v_1$ Então $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = v_2 \sin\gamma \vec{e}_x + (v_2\cos\gamma - v_1)\vec{e}_z$ ou seja

$$\Delta\vec{v} = \sqrt{\tfrac{\mu}{a}}\sqrt{\tfrac{5}{2}}\sqrt{\tfrac{1}{5}}\,\vec{e}_x + \sqrt{\tfrac{\mu}{a}}\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}\sqrt{\tfrac{4}{5}} - \sqrt{3}\right)\vec{e}_z = \sqrt{\tfrac{\mu}{a}}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_x + (\sqrt{2}-\sqrt{3})\,\vec{e}_z\right) = \sqrt{\tfrac{\mu}{a}}(0.7071\,\vec{e}_x - 0.317837\,\vec{e}_z)$$

- Logo: $|\Delta\vec{v}| = \sqrt{\tfrac{\mu}{a}}\sqrt{(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{\tfrac{\mu}{a}}\sqrt{\tfrac{1}{2}+2+3-2\sqrt{6}}$ $\quad\Rightarrow\quad \boxed{|\Delta\vec{v}| = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}}\,0.775255}$

---

d) $\overrightarrow{FP_1}$ aponta para o Equinócio Vernal, logo tem a direcção e sentido de $\vec{e}_x$ do ECI
$\overrightarrow{P_2F}$ aponta para Norte, logo tem a direcção e sentido de $\vec{e}_z$ do ECI, logo

(i) Órbita 1: Levando em conta $\vec{e}_x, \vec{e}_z$, $\boxed{i_1 = 90°}$, $\boxed{\Omega_1 = 0°}$, $\boxed{\varpi_1 = 0°}$

a_1, e_1 são dados e $t_p^{(1)}$ está no enunciado: $\boxed{a_1 = a}$, $\boxed{e_1 = \tfrac{1}{2}}$, $\boxed{t_p^{(1)} = \text{hoje, 15h00}}$

(ii) Órbita 2: $\boxed{e_2 = e = \dfrac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ $a_2 = \dfrac{a}{1+e} = \dfrac{2a}{3}$ $\quad t_p^{(2)} = t_p^{(1)} - t_s$ (alínea b)) $= t_p^{(1)} - 0.170423\,T_2$

$T_2 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a_2^{3/2} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left(\dfrac{2a}{3}\right)^{3/2}$ não se consegue um valor numérico para $t_p^{(2)}$ [não exijo mas calculei]

- Órbita 2 rodada $-\frac{\pi}{2}$ em relação à órbita 1 no mesmo plano): $\boxed{i_2 = 90°}$, $\boxed{\Omega_2 = 0°}$, $\boxed{\varpi_2 = -90°[\text{ou } 270°]}$

  Todos: $\left(a_2 = \frac{2a}{3}, e = \frac{1}{2}, t_p^{(2)} = t_p^{(1)} - 0.170423\,\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{2a}{3}\right)^{3/2}, i_2 = 90°, \Omega_2 = 0°, \varpi_2 = -90°[\text{ou } 270°]\right)$

---

7 Introdução às Perturbações Orbitais

28. Determine a(s) inclinação(ões) de uma órbita circular terrestre de período 2 h para que esta seja *Sun-synchronous*.

Correcção:

- Para ser Sun-synch.: $\dot{\Omega} = \dfrac{2\pi}{1 \text{ ano}} = \dfrac{2\pi}{365.26 \times 86400} = 1.990\,97 \times 10^{-2}\,\text{rad/s}$
- $T = 2\,\text{h} = 7200\,\text{s} = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{\mu_\oplus}} \qquad \Rightarrow \qquad a = \left(\dfrac{T\sqrt{\mu_\oplus}}{2\pi}\right)^{2/3} = 8058.99\,\text{km}$
- $e = 0, T = 2\,\text{h} = 7200\,\text{s}: \qquad \dot{\Omega} = -\dfrac{3nJ_2R_\oplus^2}{2a^2(1-e^2)^2}\cos i = -\dfrac{3\frac{\cancel{2}\pi}{T}J_2R_\oplus^2}{\cancel{2}a^2}\cos i = -\dfrac{3\pi J_2R_\oplus^2}{Ta^2}\cos i \qquad \Rightarrow$

  $\cos i = -\dfrac{Ta^2\dot{\Omega}}{3J_2R_\oplus^2} = -0.224\,305, \quad i \in [0,\pi] \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{i = 1.797\,03\,\text{rad} = 102.962°}$

---

29. Calcule a inclinação que uma órbita circular de raio $r = 3R_\oplus/2$ deve ter para estar sincronizada com o Sol (órbita *sun-synchronous*).

Correcção:

- órbita circular: $\quad e = 0, \quad a = r = \frac{3R_\oplus}{2}, \quad$ e tem-se $\quad n = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}} = \dfrac{\sqrt{\mu}}{(\frac{3}{2})^{3/2}R_\oplus^{3/2}} = \dfrac{2^{3/2}\sqrt{\mu}}{3^{3/2}R_\oplus^{3/2}}$
- logo $\quad \dot{\Omega} = -\dfrac{3nJ_2R_\oplus^2}{2a^2(1-e^2)^2}\cos i = -\dfrac{3\sqrt{\mu}2^{3/2}R_\oplus^2J_2}{3^{3/2}R_\oplus^{3/2}2\frac{3^2R_\oplus^2}{2^2}}\cos i = -\dfrac{2\times 2^{3/2}J_2\sqrt{\mu}}{3\times 3^{3/2}R_\oplus^{3/2}}\cos i$
- órbita Sun-sync. se: $\quad \dot{\Omega} = +\dfrac{2\pi}{1 \text{ ano sideral}} = \dfrac{2\pi}{365.26\times 24\times 3600} = 1.99097\times 10^{-7}\,\text{rad/s}$

  [ou seja, $\quad \dot{\Omega} = 0.9856°/\text{dia} \quad (\approx 1°/\text{dia})$]
- Logo $\quad \cos i = -0.408856 \qquad \Rightarrow \qquad i = 1.992\,\text{rad} = 114.133° \vee i = (2\pi - 1.992)\,\text{rad},$

  mas $\quad i \in [0,\pi] \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{i = 1.992\,\text{rad} = 114.133°}$

---

30. Calcule todas as inclinações possíveis que um satélite do tipo Molniya pode ter quando se encontra numa órbita de excentricidade $e = 1/8$ com período exactamente igual a metade do período sideral (i) em torno da Terra e (ii) em torno de Marte.

Correcção:

(i) Em sat. Molniya, $\dot{\varpi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{5}{2}\sin^2 i - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 i = \dfrac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \sin i = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \pm 0.894427$

- Como $\quad i \geqslant 0$ (pois $0 \leqslant i \leqslant \pi$) $\quad$ então $\quad \sin i = +\dfrac{2}{\sqrt{5}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{i = 63.43° \quad \vee \quad i = 116.56°}$

(ii) Em Marte: mesmo resultado (resultado não depende dos parâmetros físicos)

---

31. (i) Justifique a existência de um raio máximo para órbitas circulares sincronizadas com o Sol (Sun-synchronous) em torno da Terra e (ii) calcule-o.

Correcção:

- Órbitas sincronizadas com o Sol $\Rightarrow$ $\dot{\Omega} = \frac{2\pi}{1\,\text{ano}} = \frac{2\pi}{365.26\times24\times60\times60} = 1.99097\times10^{-7}\,\text{rad/s}$

- Mas $\dot{\Omega} = -\frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2a^2(1-e^2)^2}\cos i$, com $n \equiv \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ e com órbitas circulares $e=0, a\equiv r$, logo:

$\dot{\Omega} = -\frac{3\sqrt{\mu}J_2R_\oplus^2}{2r^{7/2}}\cos i \quad \Rightarrow \quad r = \left(-\frac{3\sqrt{\mu}J_2R_\oplus^2}{2\dot{\Omega}}\cos i\right)^{2/7} = \left(-6.62438\times10^{24}\cos i\right)^{2/7}$

(i) r só depende de $\cos i$, que é uma função limitada, logo r terá um máximo

(ii) r será máximo quando $\cos i = -1$ logo, $\boxed{r = \left(6.62438\times10^{24}\right)^{2/7} = 1.235251\times10^{7}\,\text{m} = 12352.5\,\text{km}}$

---

32. A órbita de um satélite à volta de um planeta não especificado tem uma inclinação de 40° e a sua periápside avança à razão de 7° por dia. A que razão regressa a linha dos nodos?.

Correcção:

- Tem-se $\dot{\Omega} = -\frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2a^2(1-e^2)^2}\cos i$, $\dot{\varpi} = -\frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2a^2(1-e^2)^2}(\frac{5}{2}\sin^2 i - 2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\Omega}}{\dot{\varpi}} = \frac{\cos i}{\frac{5}{2}\sin^2 i - 2}$

- $i = 40°$, $\dot{\varpi} = 7°/\text{dia} = \frac{2\pi}{360}\frac{7}{86400} = 1.41404\times10^{-6}\,\text{rad/s}$, logo

- $\dot{\Omega} = \frac{\cos i}{\frac{5}{2}\sin^2 i-2}\dot{\varpi} = -0.792137\dot{\varpi} = -1.12011\times10^{-6}\,\text{rad/s} = -1.12011\times10^{-6}\times\frac{86400\times360}{2\pi}(°/\text{dia})$

$\boxed{\dot{\Omega} = -5.545°/\text{dia} \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{regressa}} \text{ à razão de } +5°/\text{dia}}$

- Nota: não é necessário converter para rad/s: $\dot{\Omega} = \frac{\cos i}{\frac{5}{2}\sin^2 i-2}\dot{\varpi} = -0.792137\times7°/\text{dia} = -5.54496°/\text{dia}$

---

33. Considere um satélite artificial em órbita em torno da Terra num plano que faz 30° com o plano do equador e com altitudes de perigeu e apogeu de 160 km e 840 km, respectivamente. Calcule as variações seculares dos elementos orbitais em primeira aproximação.

Correcção:

- var. seculares $\Leftrightarrow$ $\dot{\varpi} = \frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2a^2(1-e^2)^2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)$, $\dot{\Omega} = -\frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2a^2(1-e^2)^2}\cos i$, $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$
- $R_\oplus \equiv R:$ $r_p = R + 160\,\text{km} = 6538\,\text{km}$, $r_a = R + 840\,\text{km} = 7218\,\text{km}$, logo:
- $2a = 2R + 1000\,\text{km} = 13\,756\,\text{km} \Rightarrow \boxed{a = R + 500\,\text{km} = 6878\,\text{km}} \Rightarrow n = 1.106\,82\times10^{-3}\,\text{rad/s}$
- $r_p = a(1-e) \Rightarrow e = 1 - \frac{r_p}{a} = 1 - \frac{R+160\,\text{km}}{R+500\,\text{km}} \Rightarrow \boxed{e = 0.049\,433}$
- $\frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2a^2(1-e^2)^2} = 1.553\,16\times10^{-6}$, $i = 30°$ logo $\boxed{\dot{\varpi} = 2.1356\times10^{-6}\,\text{rad/s} = 10.572°/\text{dia (solar)}}$

e $\boxed{\dot{\Omega} = -1.345\,08\times10^{-6}\,\text{rad/s} = -6.658\,61°/\text{dia (solar)}}$

---

8 Operações em Órbita e Planeamento de Missões Espaciais

8.1 Movimento relativo

8.2 Observações do Corpo Central

8.3 O Meio Ambiente Espacial

8.4 Elementos de Análise e Planeamento de Sondas Espaciais

9 Dinâmica Elementar de Foguetes

10 O Problema dos Três Corpos

34. Calcule as coordenadas dos pontos triangulares de Lagrange quando $\mu = 1/5$, no problema circular restrito dos três corpos (o primário m_1 tem coordenada $x > 0$, como habitualmente).

Correcção:

- $r_1 = 1, x_{m_1} = \mu : \quad \Rightarrow \quad x_{4,5} = \mu - 1\cos 60° = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{10}$
- $r_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_{4,5} = \pm 1 \sin 60° = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ logo $\boxed{(x_{4,5}, y_{4,5}) = (-\frac{3}{10}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})}$

---

35. As coordenadas do ponto triangular de Lagrange L_4 no referencial usual em rotação com origem no centro de massa num problema circular restrito dos três corpos (onde o primário m_1 tem coordenada $x > 0$) foram determinadas como sendo $\{-3/10, \sqrt{3}/2, 0\}$. Determine (i) o parâmetro μ do problema e (ii) a razão m_1/m_2 das massas dos primários.

Correcção:

- $r_1 = 1, x_{m_1} = \mu : \quad \Rightarrow \quad x_4 = -\frac{3}{10} = \mu - 1\cos 60° = \mu - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}}$
- $\mu = \frac{1}{5} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad 5m_2 = m_1 + m_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{m_1}{m_2} = 4}$

---

36. No caso do problema restrito circular de três corpos com $\mu = 1/3$, calcule a distância do ponto de Lagrange L_4 ao centro de massa do sistema.

Correcção:

- Tem-se $\quad x = \frac{1}{2} - \mu, \quad y = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad d = \sqrt{x^2 + y^2} = (\ldots) = \sqrt{1 + \mu^2 - \mu}$ logo:

$$\mu = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \sqrt{1 + \mu^2 - \mu} = \frac{\sqrt{7}}{3} = 0.881\,917}$$

---

37. No contexto do PRC3C com $\mu = 1/4$ calcule o módulo da velocidade de m_3, sabendo que esta se encontra em $(-1, 0, 0)$ e que o integral de Jacobi vale $C = -2$.

Correcção:

- $(x, y, z) = (-1, 0, 0), \quad C = -2, \quad \mu = \frac{1}{4}, \quad r_1 = \sqrt{(-1 - \frac{1}{4})^2} = \frac{5}{4}, \quad r_2 = \sqrt{(-\frac{1}{4})^2} = \frac{1}{4}$
- $C = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \quad \Leftrightarrow \quad -2 = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3/\cancel{4}}{5/\cancel{4}} - \frac{1/\cancel{4}}{1/\cancel{4}} \quad \Leftrightarrow$

$$-2 = \frac{v^2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{20}{10} = \frac{5v^2}{10} - \frac{21}{10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447\,214}$$

---

38. No contexto do problema restrito circular de três corpos, (i) calcule a distância do ponto de Lagrange L_5 ao centro de massa, d, em função do parâmetro μ; (ii) mostre que $d < 1$ para qualquer valor de μ admissível; (iii) determine, justificando, o valor de μ para o qual d é mínima, e qual o seu valor $d_{\min}$.

Correcção:

(i) Tem-se $x = \frac{1}{2} - \mu, \quad y = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \sqrt{x^2 + y^2} = (\ldots) = \sqrt{1 + \mu^2 - \mu}}$

(ii) $0 < |\mu| < 1 \quad \Rightarrow \quad \mu^2 < \mu \quad \Rightarrow \quad \mu^2 - \mu < 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \mu^2 - \mu < 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \sqrt{1 + \mu^2 - \mu} < 1}$

(iii) CM está na base do triângulo equilátero, logo d é mínimo quando CM sob vértice, i.e.

$$\boxed{\mu = 1/2}, \quad \text{caso em que} \quad \boxed{d_{\min} = \sqrt{x^2 + y^2} = |y| = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866\,025}$$

(resultados de (iii) também podem ser obtidos igualando a zero a derivada de d em ordem a μ)

---

39. Considere 3 corpos iguais, cada um de massa m, isolados no espaço e dispostos nos vértices de um triângulo equilátero de lado d. Estes três corpos na configuração descrita conseguem manter a sua posição relativa desde que descrevam órbitas circulares em torno do centróide do triângulo com um certo período P.

(a) Diga justificando qual é a localização do centro de massa e diga explicitamente a que distância r cada uma das massas se encontra dele, em função de d.

(b) Determine o período orbital P que mantém a configuração descrita em função de d, m e eventualmente outras constantes físicas universais.

Correcção:

a) CM está no centro geométrico do triângulo, por simetria

- Seja r a distância de cada massa ao CM: $\quad d = 2r\cos 30° = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}d}$

---

b) Por simetria a força em cada massa m é dirigida para o CM — 2 forças com componente útil num ângulo de 30°

- Cada $F = \frac{Gmm}{d^2} \quad \Rightarrow \quad F_u = 2F\cos 30° = \frac{2Gm^2}{d^2}\frac{\sqrt{3}}{2}$
- F_u iguala a força centrípeta: $\quad F_c = m\omega^2 r = m(\frac{2\pi}{P})^2 r = m(\frac{2\pi}{P})^2\frac{\sqrt{3}}{3}$
- Igualando $F_u = F_c$: $\quad \frac{2Gmm}{d^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = m(\frac{2\pi}{P})^2\frac{\sqrt{3}}{3}d \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{2\pi}{P})^2 = \frac{3GM}{d^3} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{P = 2\pi\frac{d^{3/2}}{\sqrt{3Gm}}}$

---

40. Considere a equação da coordenada z do problema restrito circular dos três corpos

$$\ddot{z} = -\left[\frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right] z. \tag{1}$$

Sabendo que todos os pontos de Lagrange se encontram no plano $z_e = 0$, considere pequenos deslocamentos a partir dos pontos de Lagrange $z = z_e + \delta z$ (e $x = x_e + \delta x, y = y_e + \delta y$) com $(x_e, y_e, z_e = 0)$ as coordenadas de um dos pontos de Lagrange. Estude a estabilidade linear dos pontos de Lagrange na direcção z:

(a) Sabendo que, em primeira aproximação, as distâncias aos primários são dadas por:

$$\frac{1}{r_1^3} \approx \frac{1}{r_{1e}^3} - \frac{3}{r_{1e}^5}[(x_e-\mu)\delta x + y_e \delta y], \qquad \frac{1}{r_2^3} \approx \frac{1}{r_{2e}^3} - \frac{3}{r_{2e}^5}[(x_e+1-\mu)\delta x + y_e \delta y], \tag{2}$$

com r_{1e}, r_{2e} as distâncias de cada um dos primários ao ponto de Lagrange, mostre que em primeira aproximação (desprezando termos em δ^2 e.g. $\delta x \delta y$) o deslocamento (pequeno) na direcção z relativo ao ponto de Lagrange é determinado por

$$\ddot{\delta z} = -\left[\frac{(1-\mu)}{r_{1e}^3} + \frac{\mu}{r_{2e}^3}\right] \delta z = (\mathrm{C^{te}})\, \delta z. \tag{3}$$

(b) Utilizando (3) mostre (ou justifique cuidadosamente) que o deslocamento na direcção z é sempre estável em todos os pontos de Lagrange.

(c) Resolva a equação (3) i.e. calcule o deslocamento $\delta z(t)$ em função das condições iniciais (pode deixar em função das constantes de integração) no caso do ponto triangular de Lagrange L_4. Escreva a solução numa forma que mostre explicitamente que ela é estável.

Correcção:

a) Substituindo $z = z_e + \delta z = \delta z$ e reparando que nas eqs. das distâncias dos primários o segundo termo do lado direito multiplicado por δz será de 2a ordem, só restará o 1o termo de cada uma

- Por outro lado $\ddot{z} = \ddot{z}_e + \ddot{\delta z} = 0 + \ddot{\delta z}$; substituindo resulta imediatamente na eq. pretendida

---

b) A equação é da forma $\ddot{\delta z} + K\delta z = 0, \quad K > 0$ (qq seja o ponto de Lagrange) com eq. característica

$$\lambda^2 = -K < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm i\sqrt{K}$$

- As soluções são então da forma $C \exp(\pm i\sqrt{K}\,t) \quad \Rightarrow \quad$ são estáveis ($\sin, \cos$ nunca se afastam)

---

c) Ponto de Lagrange $L_4 \quad \Rightarrow \quad r_{1e} = r_{2e} = 1$ e a eq. simplifica-se para $\quad \ddot{\delta z} = -\delta z$ ($K = 1$ em b))

- A solução bem imediatamente $\boxed{\delta z = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it} = C\cos(t + \phi_0)}$

---

11 Trajectórias Interplanetárias

41. Sabendo que os raios das órbitas, consideradas circulares e co-planares, da Terra e de Marte são, respectivamente, 1 UA e 1.52 UA, calcule o período sinódico em unidades de dia.

Correcção:

- $\tau_s = \dfrac{2\pi}{n_\oplus - n_M} \qquad n_M = \dfrac{2\pi}{T_M} = \sqrt{\dfrac{\mu_\otimes}{(1.52\,\mathrm{UA})^3}} = 1.062\,36 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad/s}$
- $n_\oplus = \dfrac{2\pi}{365.26\,\mathrm{dia}} = 1.990\,97 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad/s} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\tau_s = 6.766\,27 \times 10^7\,\mathrm{s} = 783.133\,\mathrm{d}}$

(Alt.) $n_\oplus = \sqrt{\dfrac{\mu_\otimes}{(1\,\mathrm{UA})^3}} = 1.990\,85 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad/s} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\tau_s = 6.767\,13 \times 10^7\,\mathrm{s} = 783.233\,\mathrm{d}}$

---

42. Determine de quanto em quanto tempo, em dias, se pode tentar ir a Marte, partindo da Terra, numa transferência de energia mínima. Marte encontra-se a 1.52 UA do Sol e considere as aproximações usuais de órbitas de planetas coplanares e circulares.

Correcção:

- O intervalo de tempo é o período sinódico, que repete as condições
- $\tau_s = \dfrac{2\pi}{n_\oplus - n_M} \qquad n_M = \dfrac{2\pi}{T_M} = \sqrt{\dfrac{\mu_\otimes}{(1.52\,\mathrm{UA})^3}} = 1.062\,36 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad/s}$
- $n_\oplus = \dfrac{2\pi}{365.26\,\mathrm{dia}} = 1.990\,97 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad/s} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\tau_s = 6.766\,27 \times 10^7\,\mathrm{s} = 783.133\,\mathrm{d}}$

(Alt.) $n_\oplus = \sqrt{\dfrac{\mu_\otimes}{(1\,\mathrm{UA})^3}} = 1.990\,85 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad/s} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\tau_s = 6.767\,13 \times 10^7\,\mathrm{s} = 783.233\,\mathrm{d}}$

---

43. Sabendo que os raios das órbitas, consideradas circulares e co-planares, da Terra e de Marte são, respectivamente, 1 UA e 1.52 UA, determine o tempo de viagem em dias de uma transferência interplanetária de energia mínima da Terra para Marte.

Correcção:

- $2a = 1\,\mathrm{UA} + 1.52\,\mathrm{UA} = 2.52\,\mathrm{UA} \qquad \Rightarrow \qquad a = 1.26\,\mathrm{UA} = 1.884\,96 \times 10^8\,\mathrm{km}$
- $t_v = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\dfrac{a^3}{\mu_\otimes}} = 2.231\,86 \times 10^7\,\mathrm{s} = \dfrac{2.231\,86 \times 10^7\,\mathrm{s}}{86\,400\,\mathrm{s/d}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t_v = 258.318\,\mathrm{d}}$

---

44. Sabendo que os raios das órbitas, consideradas circulares e co-planares, da Terra e de Marte são, respectivamente, 1 UA e 1.52 UA, determine o tempo de viagem em dias da viagem de volta de Marte para a Terra, considerando que é de energia mínima.

Correcção:

- $2a = 1\,\mathrm{UA} + 1.52\,\mathrm{UA} = 2.52\,\mathrm{UA} \qquad \Rightarrow \qquad a = 1.26\,\mathrm{UA} = 1.884\,96 \times 10^8\,\mathrm{km}$
- $t_v = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\dfrac{a^3}{\mu_\otimes}} = 2.231\,86 \times 10^7\,\mathrm{s} = \dfrac{2.231\,86 \times 10^7\,\mathrm{s}}{86\,400\,\mathrm{s/d}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t_v = 258.318\,\mathrm{d}}$

---

45. Determine o ângulo heliocêntrico entre o planeta de partida e o planeta de destino no instante da partida de uma viagem interplanetária de energia mínima entre a Terra e Marte (Marte situa-se a 1.52 UA de distância do Sol; considere que as órbitas dos planetas são circulares e coplanares).

Correcção:

- $2a = 1\,\text{UA} + 1.52\,\text{UA} = 2.52\,\text{UA} \qquad \Rightarrow \qquad a = 1.26\,\text{UA} = 1.884\,96 \times 10^8\,\text{km}$
- $t_v = \dfrac{T}{2} = \dfrac{2\pi}{2}\sqrt{\dfrac{a^3}{\mu_\odot}} = 2.231\,86 \times 10^7\,\text{s} = \dfrac{2.231\,86 \times 10^7\,\text{s}}{86\,400\,\text{s/d}} = 258.318\,\text{d}$
- $n_M = \sqrt{\dfrac{\mu_\odot}{(1.52\,\text{UA})^3}} = 1.062\,36 \times 10^{-7}\,\text{rad/s} \quad \Rightarrow \quad \pi - \psi = n_M\, t_v = 2.371\,05\,\text{rad} = 135.851°$

logo, $\boxed{\psi = \pi - n_M\, t_v = 0.770\,545\,\text{rad} = 44.149°}$

---

46. Determine o raio da região de influência da Terra.

Correcção:

- O raio r_i da região de influência é dado por $\quad r_i \approx R_T \left(\dfrac{m}{M}\right)^{2/5}$ Neste caso:

$R_T = 1\,\text{AU} = 149.6 \times 10^6\,\text{km}, \quad m = M_\oplus = 5.974 \times 10^{24}\,\text{kg}, \quad M = M_\odot = 1.973 \times 10^{30}\,\text{kg} \quad \Rightarrow$

$\boxed{r_i = R_T \left(\dfrac{m}{M}\right)^{2/5} = 927\,656\,\text{km} \sim 10^6\,\text{km}}$ [Nota: usando $\frac{\mu_\oplus}{\mu_\odot}$, dá $r_i = 924\,694\,\text{km}$]

---

47. Os elementos da hipérbole de partida da *Viking I Mars Lander* foram $a = -18\,849.7\,\text{km}$ e $e = 1.3482$. Marte encontra-se em média a 1.52 UA do Sol.

(a) Calcule a velocidade (relativamente à Terra) com que esta sonda atingiu a fronteira da zona de influência da Terra, considerando que esta está *suficientemente longe*, e o ângulo entre a assimptota da órbita e a sua linha das ápsides; faça um esboço da órbita que inclua a linha das ápsides, as assimptotas da órbita e a indicação do ângulo calculado.

(b) (i) Calcule a velocidade mínima (relativamente à Terra) na fronteira da zona de influênncia necessária para conseguir chegar a Marte, considerando as aproximações usuais do *patch-conic*; (ii) compare esta velocidade com a velocidade atingida no mesmo lugar pela *Viking I* (alínea anterior) e explique a que se pode dever a eventual diferença, se existir.

Correcção:

a) $E = -\frac{\mu_\oplus}{2a} = \frac{v_\infty^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_\infty = \sqrt{\frac{-2\mu_\oplus}{2a}} = \sqrt{\frac{-\mu_\oplus}{a}} = 4.5985\,\text{km/s}}$

- da eq. órbita: $\boxed{\theta_\infty = \arccos(-\tfrac{1}{e}) = 2.40644\,\text{rad} = 137.879°}$
- Gráfico deve incluir: $\boxed{\text{órbita}}$, $\boxed{\text{linha das ápsides}}$, $\boxed{\text{assímptotas}}$, $\boxed{\theta_\infty \text{ indicado}}$

---

b) (i) $2a_H = (1 + 1.52)\,\text{UA} = 3.76992 \times 10^8\,\text{km} \quad \Rightarrow \quad a_H = 1.88496 \times 10^8\,\text{km}$

- $V_{pH} = \sqrt{2\mu_\odot(\frac{1}{1\,\text{UA}} - \frac{1}{2a_H})} = 32.7119\,\text{km/s}$
- $V_\oplus = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{1\,\text{UA}}} = 29.7831\,\text{km/s} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_\infty^{(H)} = V_{pH} - V_\oplus = 2.92885\,\text{km/s}}$

- (ii) Vel. teórica bastante menor; possíveis razões:

$\boxed{\text{órbitas de planetas não exactamente co-planares (Transf. Hohmann impossível)}}$,
$\boxed{\text{órbitas de planetas não circulares}}$, $\boxed{\text{longe de Hohmann por conveniência de missão (outras razões)}}$,
$\boxed{\text{erros devido à aproximação de patch-conic}}$

---

48. Uma sonda interplanetária encontra-se numa órbita circular de raio $r = 7700\,\mathrm{km}$ em torno da Terra. Determine: (i) o Δv necessário dado pelos motores da sonda para que esta chegue a Neptuno (situado a 30.1 UA do Sol) numa transferência interplanetária de Hohmann; (ii) o ângulo heliocêntrico entre a Terra e Neptuno no instante da partida; (iii) o tempo da viagem de ida.

Correcção:

(i) $2a_t = 1\,\mathrm{UA} + 30.1\,\mathrm{UA} = 31.1\,\mathrm{UA} = 4.65256 \times 10^9\,\mathrm{km} \quad \Rightarrow \quad a_t = 15.55\,\mathrm{UA} = 2.32628 \times 10^9\,\mathrm{km}$

- Vel. periélio órb. transf.: $\boxed{v_p = \sqrt{2\mu_\odot \left(\frac{1}{1\,\mathrm{UA}} - \frac{1}{31.1\,\mathrm{UA}}\right)} = 41.4369\,\mathrm{km/s}}$

  Velocidade da Terra: $v_\oplus = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{1\,\mathrm{UA}}} = 29.7831\,\mathrm{km/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_\infty = v_p - v_\oplus = 11.6539\,\mathrm{km/s}}$

- $r_{ph} = 7700\,\mathrm{km}, \quad \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{v_{ph}^2}{2} - \frac{\mu_\oplus}{r_{ph}} \quad \Rightarrow \quad v_{ph} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_\oplus}{r_{ph}}} = 15.4708\,\mathrm{km/s}$

- órb. circular de parque: $v_c = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{ph}}} = 7.19488\,\mathrm{km/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta v = v_{ph} - v_c = 8.2759\,\mathrm{km/s}}$

(ii) Ângulo heliocêntrico ψ; $\quad \pi - \psi = n_{\mathrm{Nept}} t_v; \quad n_{\mathrm{Nept}} = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{(30.1\,\mathrm{UA})^3}}; \quad t_v = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{a_t^3}{\mu_\odot}} \quad \Rightarrow$

- $a_t = 15.55\,\mathrm{UA}: \quad \frac{\pi - \psi}{\pi} = \left(\frac{a_t}{30.1\,\mathrm{UA}}\right)^{3/2} = 0.371318 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi = 0.628682\pi = 1.97506\,\mathrm{rad}\ (= 113.163^\circ)}$

(iii) $a_t = 15.55\,\mathrm{UA}, \quad t_v = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{a_t^3}{\mu_\odot}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_v = 9.67626 \times 10^8\,\mathrm{s} \simeq 30.6614\,\mathrm{anos} = 11199.4\,\mathrm{dias}}$

49. Determine (i) o v_∞ de escape da Terra necessário para conseguir chegar a Vénus, situado à distância de 0.722 UA do Sol, numa trajectória de energia mínima; (ii) faça um esboço de todas as assímptotas possíveis que podem ser utilizadas, a partir de órbitas circulares a uma certa altitude, indicando a sua direcção e sentido relativamente a uma referência conhecida e a localização aproximada das periápsides em cada caso (sugestão: faça o esboço em 2D e generalize para 3D).

Correcção:

(i) A órbita de transferência tem semi-eixo maior $a_t = \frac{1\,\mathrm{UA} + 0.722\,\mathrm{UA}}{2} = 0.861\,\mathrm{UA} = 1.288\,06 \times 10^8\,\mathrm{km}$

- A velocidade no afélio (Terra) dessa órbita é $V_{at} = \sqrt{2\mu_\odot \left(\frac{1}{1\,\mathrm{UA}} - \frac{1}{2a_t}\right)} = 27.2732\,\mathrm{km/s}$

- $V_\oplus = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{1\,\mathrm{UA}}} = 29.7831\,\mathrm{km/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_\infty = V_{at} - V_\oplus = -2.509\,85\,\mathrm{km/s} \quad \text{(i.e. sentido contrário a } \vec{V}_\oplus)}$

(ii) ESBOÇO — fazer após imprimir:

50. Um asteróide com 20 km de diâmetro foi detectado a descrever uma órbita parabólica heliocêntrica retrógrada no plano da eclíptica com periélio $R_p = 1/2\,\mathrm{UA}$. Foi determinado que o asteróide vai cruzar a órbita terrestre a uma distância d à frente da Terra (entrando na sua zona de influência) quando ainda se está a aproximar do Sol. Considere que a velocidade do asteróide (medida no referencial heliocêntrico) no instante em que passa pela órbita terrestre tem componentes $\{V_r, V_\theta\} = \{-V_\oplus, -V_\oplus\}$, com $V_\oplus = \sqrt{\mu_\odot/1\,\mathrm{UA}}$, e que a velocidade da Terra tem a mesma direcção da componente V_θ da velocidade do asteróide (pois d é pequeno). [**Use pelo menos 5 algarismos significativos**]

(a) Calcule a distância mínima $d_{\min}$ para que o asteróide não caia na Terra, destruindo a humanidade (despreze a espessura da atmosfera e o diâmetro do asteróide).

(b) No caso de $d = 20\,000\,\mathrm{km}$, calcule (i) a distância mínima a que o asteróide passa da Terra, (ii) o semi-eixo maior e (iii) a excentricidade da órbita hiperbólica relativa à Terra.

(c) No caso da alínea anterior, calcule (i) a velocidade do asteróide relativamente ao Sol após este sair da zona de influência da Terra; (ii) determine, justificando, se o asteróide, após se ter afastado, poderá voltar a ser um perigo para a humanidade.

Correcção:

a) $\vec{v}_\infty = \vec{V}_{\mathrm{ast}} - \vec{V}_\oplus = \{-V_\oplus, -2V_\oplus\}, \quad V_\oplus = \sqrt{\dfrac{\mu_\odot}{1\,\mathrm{UA}}} = 29.7831\,\mathrm{km/s} \quad \Rightarrow \quad v_\infty = \sqrt{5}V_\oplus = 66.597\,\mathrm{km/s}$

ângulo entre $\vec{v}_\infty$ e $-\vec{e}_\theta$, $\psi \quad \Rightarrow \quad \tan\psi = \dfrac{1}{2}$ ou $\sin\psi = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \psi = 0.463\,648\,\mathrm{rad} = 26.5651°$

- No caso $d_{\min}$, o perigeu iguala o raio da Terra, $r_p = R_\oplus \quad \Rightarrow \quad v_p = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_\oplus}{R_\oplus}} = 67.5289\,\mathrm{km/s}$
- $b = y_{\min} = d_{\min}\sin\psi$, e por conserv. M.A.: $b = y_{\min} = \dfrac{r_p v_p}{v_\infty} = 6467.25\,\mathrm{km}$, logo

$$d_{\min} = \frac{b}{\sin\psi} = \frac{b}{1/\sqrt{5}} = b\sqrt{5} = 2.236\,07\,b \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_{\min} = 14\,461.2\,\mathrm{km}}$$

---

b) Neste caso $d = 20\,000\,\mathrm{km}$, mas ψ, v_∞ são os mesmos de a): $\psi = 26.5651°, v_\infty = 67.5289\,\mathrm{km/s}$

(i) tem-se $y = d\sin\psi = 8944.27\,\mathrm{km}$ e conserv. energia e M.A. pode-se determinar r_p, v_p:

$$y v_\infty = r_p v_p \quad \wedge \quad \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu_\oplus}{r_p} \quad \Rightarrow \quad [v_p = 67.2695\,\mathrm{km/s}\ (\text{não necess.})] \quad \boxed{r_p = 8854.85\,\mathrm{km}}$$

(ii) $\dfrac{v_\infty^2}{2} = -\dfrac{\mu_\oplus}{2a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = -\dfrac{\mu_\oplus}{v_\infty^2} = -89.8727\,\mathrm{km}}$ (iii) $r_p = a(1-e) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 1 - \dfrac{r_p}{a} = 99.5266}$

---

c) Para o cálculo é necessário saber a direcção do $\vec{v}_\infty$ de saída

(i) de b), $e = 99.5266$, e tem-se $\theta_\infty = \arccos(-1/e) = 1.580\,84\,\mathrm{rad} = 90.5757°$

o desvio (para a esq.) de uma assímptota para a outra é $2(\theta_\infty - \pi/2) = 0.020\,095\,5\,\mathrm{rad} = 1.151\,39°$

o ângulo do $\vec{v}_\infty$ de saída com $-\vec{e}_\theta$ é então $\psi' = \psi - 2(\theta_\infty - \pi/2) = 0.443\,552\,\mathrm{rad} = 25.4137°$

à saída, relativamente ao Sol, tem-se então: $V_r' = -v_\infty \sin\psi'$, $V_\theta' = -v_\infty\cos\psi' + V_\oplus$ logo:

$$V_r' = -28.5801\,\mathrm{km/s}, V_\theta' = -30.3695\,\mathrm{km/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\mathrm{ast}}' = \sqrt{(V_r')^2 + (V_\theta')^2} = 41.7029\,\mathrm{km/s}}$$

(ii) $V_{\mathrm{ast}}' = 41.7029\,\mathrm{km/s} < 42.1196\,\mathrm{km/s} = \sqrt{\dfrac{2\mu_\odot}{1\,\mathrm{UA}}} = V_e \quad \Rightarrow$ asteróide em órbita heliocêntrica elíptica

logo, asteróide vai cruzar órbita da Terra múltiplas vezes $\Rightarrow$ $\boxed{\text{asteróide continua a ser perigoso}}$

---

51. Considere uma missão interplanetária terrestre com destino Júpiter (Notas: Realize todos os cálculos com pelo menos 5 algarismos significativos; considere a distância Júpiter-Sol igual a 5.2 UA, o parâmetro gravitacional de Júpiter é $\mu_J = 1.267 \times 10^8\,\mathrm{km^3/s^2}$ e o seu raio equatorial é 71 492 km).

(a) Supondo impulsos instantâneos, calcule o Δv mínimo que tem que ser dado a uma sonda que se encontra numa órbita circular em torno da Terra com 6800 km de raio para conseguir chegar a Júpiter.

(b) Calcule a velocidade aproximada da sonda relativamente a Júpiter (incluindo direcção e sentido) quando ela entra na zona de influência deste planeta.

(c) Calcule o parâmetro de impacto i.e. a distância mínima (acima ou abaixo da órbita de Júpiter) a que a assímptota de entrada da sonda se pode encontrar sem que a sonda se despenhe; admita que a sonda se despenha se rasar a superfície do planeta definida pelo seu raio.
Nota: caso não tenha resolvido a alínea anterior use, referindo na resposta, o valor de 5 km/s para a velocidade de aproximação da sonda, relativa a Júpiter.

(d) No caso de a sonda rasar a superfície e realizar um fly-by sem utilizar propulsão, (i) calcule o módulo da velocidade relativamente ao Sol com que a sonda se afastará de Júpiter e (ii) verifique se a sonda consegue escapar do sistema solar.

Correcção:

a) semi-eixo maior a_h da órbita de transferência heliocêntrica da Terra para Júpiter:

$$2a_h = (1+5.2)\,\mathrm{UA} = 6.2\,\mathrm{UA} = 9.2752\times 10^8\,\mathrm{km} \qquad \Rightarrow \qquad a_h = 3.1\,\mathrm{UA} = 4.6376\times 10^8\,\mathrm{km}$$

- vel. no periélio (Terra) da órbita transferência $\quad V_p = \sqrt{2\mu_\odot\left(\frac{1}{1\,\mathrm{UA}} - \frac{1}{2a_h}\right)} = 38.5736\,\mathrm{km/s}$
- vel. Terra $\quad V_T = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{1\,\mathrm{UA}}} = 29.7831\,\mathrm{km/s} \quad$ logo $\quad v_\infty = V_p - V_T = 8.790\,54\,\mathrm{km/s}$
- Vel. sonda na órbita circular onde se encontra ($r = 6800\,\mathrm{km}$): $\quad v_c = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r}} = 7.656\,22\,\mathrm{km/s}$
- Para Energia mín. inserção em órbita de escape no perigeu, com assimptota tg. à órb. Terra:
- $E = \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{v_{pe}^2}{2} - \frac{\mu_\oplus}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{pe} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_\oplus}{r}} = 13.994\,66\,\mathrm{km/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta v = v_{pe} - v_c = 6.290\,43\,\mathrm{km/s}}$

---

b) Sonda aproxima-se no afélio, com vel. paralela à de Júpiter mas menor, com offset p/ não se despenhar

- vel. tranf. heliocêntrica no afélio $\quad V_a = \sqrt{2\mu_\odot\left(\frac{1}{5.2\,\mathrm{UA}} - \frac{1}{2a_h}\right)} = 7.4181\,\mathrm{km/s}$
- vel. Júpiter $\quad V_J = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{5.2\,\mathrm{UA}}} = 13.0607\,\mathrm{km/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{\infty J} = V_a - V_J = -5.642\,74\,\mathrm{km/s}}$
(a sonda aproxima-se de frente de Júpiter i.e. $\vec{V}_J$ e $\vec{v}_{\infty J}$ têm sentidos contrários)

---

c) Seja b a distância entre a assimptota de entrada e a paralela que passa por Júpiter (direcção de $\vec{V}_J$)

- b é o parâmetro de impacto, a órbita hiperbólica tem periápside na superfície de Júpiter, com vel. v_{pJ}
- eq. Energia: $\quad \frac{v_{\infty J}^2}{2} = \frac{v_{pJ}^2}{2} - \frac{\mu_J}{R_J} \quad \Rightarrow \quad v_{pJ} = \sqrt{v_{\infty J}^2 + \frac{2\mu_J}{R_J}} = 59.8021\,\mathrm{km/s}$
- $h = b\,v_{\infty J} = v_{pJ}\,R_J \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = \frac{R_J\,v_{pJ}}{v_{\infty J}} = \sqrt{R_J^2 + \frac{2\mu_j\,R_J}{v_{\infty J}^2}} = 757\,677\,\mathrm{km}}$

Alt.) res. alt. p/ $v_{\infty J} = 5\,\mathrm{km/s}$: $\quad v_{pJ} = 59.7449\,\mathrm{km/s} \quad \boxed{b = 854\,256\,\mathrm{km}}$

---

d) $\frac{v_{\infty J}^2}{2} = -\frac{\mu_J}{2a_{hJ}} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{\mu_J}{v_{\infty J}^2} = -3.979\,21\times 10^6\,\mathrm{km}, \quad$ e com $\quad R_J = -a(e-1) \quad \Rightarrow$

$$e = 1 + \frac{v_{\infty J}^2\,R_J}{\mu_J} = 1.017\,97 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_\infty = \arccos(-1/e) = 2.953\,44\,\mathrm{rad} = 169.219°$$

- o ângulo que $\vec{V}_J$ e $v_{\infty J}$ fazem à saída é $\quad \psi = 2\pi - 2\theta_\infty = 0.376\,313\,\text{rad} = 21.5612°$
- vel. heliocêntrica final $\quad \vec{V}_f = (\pm v_{\infty J}\sin\psi)\,\vec{e}_r + (V_J + v_{\infty J}\cos\psi)\,\vec{e}_t = \pm 2.073\,68\,\vec{e}_r + 18.3086\,\vec{e}_t \quad [\text{km/s}]$
- vel. escape $V_e = \sqrt{\dfrac{2\mu_\odot}{5.2\,\text{UA}}} = 18.4707\,\text{km/s}$ $\quad$ logo quase escapa: $\quad \boxed{V_f = 18.4257\,\text{km/s} < V_e}$

Alt.) res. alt. p/ $v_{\infty J} = 5\,\text{km/s}$: $\quad a = -5.068\times 10^6\,\text{km}, \quad e = 1.014\,11, \quad \theta_\infty = 2.9746\,\text{rad} = 170.432°$

$\psi = 0.333\,978\,\text{rad} = 19.113\,56°, \quad \vec{V}_f = \pm 1.639\,02\,\vec{e}_r + 17.7845\,\vec{e}_t \quad [\text{km/s}] \quad \boxed{V_f = 18.3819\,\text{km/s} < V_e}$

---

52. Considere uma missão interplanetária terrestre com destino Júpiter. A velocidade relativamente a Júpiter, quando a sonda entra na zona de influência deste planeta, é $v = 5.642\,74\,\text{km/s}$, aproximando-se do planeta de frente (relativamente a este). A assimptota de entrada é paralela à velocidade de Júpiter e dista deste $y = 1\,000\,000\,\text{km}$. (Notas: Realize todos os cálculos com pelo menos 5 algarismos significativos; considere a distância Júpiter-Sol igual a 5.2 UA, o parâmetro gravitacional de Júpiter é $\mu_J = 1.267\times 10^8\,\text{km}^3/\text{s}^2$ e o seu raio equatorial é 71 492 km).

   (a) Determine de quanto em quanto tempo — em unidade de dia — se pode lançar uma missão de energia mínima deste tipo.

   (b) Se a missão for de energia mínima e tiver que regressar à Terra, determine a duração mínima total da missão.

   (c) Calcule o Δv mínimo para que haja captura da sonda (considere uma única manobra).

   (d) Imagine que no ponto da trajectória da sonda mais próximo de Júpiter, a manobra de captura falha e é dado um impulso $\Delta v = 0.100\,00\,\text{km/s}$ na direcção e sentido da velocidade da sonda nesse instante. (i) Determine a velocidade da sonda relativamente ao Sol imediatamente após escapar do sistema Joviano e (ii) verifique se a sonda conseguirá escapar do sistema solar.

Correcção:

a) Janela de lançamento coincide com o período sinódico $\quad 2\pi + n_J\tau_s = n_\oplus\tau_s \quad \Rightarrow \quad \tau_s = \dfrac{2\pi}{n_\oplus - n_J}$

$n_\oplus = \sqrt{\dfrac{\mu_\odot}{(1\,\text{UA})^3}} = 1.990\,85\times 10^{-7}\,\text{s}^{-1}, \qquad n_J = \sqrt{\dfrac{\mu_\odot}{(5.2\,\text{UA})^3}} = 1.678\,93\times 10^{-8}\,\text{s}^{-1} \qquad \Rightarrow$

$$\boxed{\tau_s = \frac{2\pi}{n_\oplus - n_J} = 3.4467\times 10^7\,\text{s} = 398.924\,\text{d}} \quad (398\,\text{d}\ 22\,\text{h}\ 10\ \text{min}\ 33.6\,\text{s}\ )$$

---

b) Para órbita heliocêntrica de transf.: $\quad a_h = \frac{1\,\text{UA}+5.2\,\text{UA}}{2} = 3.1\,\text{UA} \quad \Rightarrow \quad T_h = 2\pi\sqrt{\dfrac{a_h^3}{\mu_\odot}} = 1.7226\times 10^8\,\text{s}$

tempo de viagem t_v é meio período: $\quad t_v = T_h/2 = 8.613\times 10^7\,\text{s} = 996.875\,\text{d}$ (2 ano 226.355 d)

$\psi \equiv$ âng. heliocêntr. à partida $\quad \Rightarrow \quad \pi - \psi = n_J t_v = 1.446\,06\,\text{rad} \quad \Rightarrow \quad \psi = 1.695\,53\,\text{rad} = 97.1467°$

O valor de t_v implica que Terra avançou 266.355 d (+2 anos i.e., 4π) até a sonda atingir Júpiter

Avanço da Terra menos voltas completas: $\quad \phi = n_\oplus \times 266.355\times 86\,400(+4\pi) = 4.581\,55\,\text{rad} = 262.504°$

Terra à chegada está então $\quad \phi - \pi = 1.439\,96\,\text{rad} = 82.5036°$ $\quad$ avançada relativamente a Júpiter

Na partida do regresso, a terra tem que estar $\quad \phi - \pi \quad$ atrasada relativamente a Júpiter, logo:

tempo de espera, t_e: $\quad n_\oplus t_e = n_J t_e + 2\pi - 2(\phi - \pi) \quad \Rightarrow \quad t_e = \dfrac{4\pi - 2\phi}{n_\oplus - n_J} = 1.8669\times 10^7\,\text{s} = 216.076\,\text{d}$

Assim: $\quad$ ida $= t_v = 996.875\,\text{d} =$ volta $\quad \Rightarrow \quad \boxed{t_t = 2t_v + t_e = 1.909\,29\times 10^8\,\text{s} = 2209.83\,\text{d} \simeq 6.05\,\text{ano}}$

---

c) A assimptota dista $y = 1\,000\,000\,\text{km}/$ do foco; da conserv. M.A. e energia usando *infinito* e periápside

tem-se: $\quad y v_{\infty i} = r_p v_p \quad \Leftrightarrow \quad r_p = \dfrac{y v_{\infty i}}{v_p}, \quad \dfrac{v_{\infty i}^2}{2} = \dfrac{v_p^2}{2} - \dfrac{\mu_J}{r_p} \quad \Rightarrow \quad v_p = \dfrac{\mu_J}{y v_{\infty i}}\left[1 \pm \sqrt{1 + \dfrac{y^2 v_{\infty i}^4}{\mu_J^2}}\right]$

O sinal na expressão de v_p tem que ser positivo

Das expressões acima tem-se: $\quad v_p = 45.6054\,\mathrm{km/s} \quad \Rightarrow \quad r_p = 123\,730\,\mathrm{km}$

Captura acontece se $\mathscr{E} \lesssim 0$. No limite, vel. tem que reduzir para a de escape, v_{eJ}:

$$v_{eJ} = \sqrt{\frac{2\mu_J}{r_p}} = 45.9558\,\mathrm{km/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta v = v_e - v_p = 350.433\,\mathrm{m/s}}$$

---

d) Hipérbole de aproximação: $\dfrac{v_{\infty i}^2}{2} = -\dfrac{\mu_J}{2a_i} \quad \Rightarrow \quad a_i = -\dfrac{\mu_J}{v_{\infty i}^2} = -3.979\,21 \times 10^6\,\mathrm{km}$

$$r_p = a_i(1 - e_i) \quad \Rightarrow \quad e_i = 1 - \frac{r_p}{a_i} = 1.031\,09, \qquad \theta_{\infty i} = \arccos\left(-\frac{1}{e_i}\right) = 2.895\,38\,\mathrm{rad} = 165.893°$$

Enunciado e usando dados c): $\quad v_{pf} = v_{pi} + 0.1\,\mathrm{km/s} \quad \Rightarrow \quad v_{\infty f} = \sqrt{v_{pf}^2 - \dfrac{2\mu_J}{r_p}} = 6.400\,91\,\mathrm{km/s}$

Semi-eixo maior e excentricidade: $\quad a_f = -\dfrac{\mu_J}{v_{\infty f}^2} = -3.092\,39 \times 10^6\,\mathrm{km}, \quad e_f = 1 - \dfrac{r_p}{a_f} = 1.040\,01$

$\theta_{\infty f} = \arccos\left(-\frac{1}{e_f}\right) = 2.863\,31\,\mathrm{rad} = 164.056°$ ângulo de assimp. saída com $\vec{V}_J$ é $\alpha = 2\pi - \theta_{\infty i} - \theta_{\infty f}$

$$V_x = V_J + v_{\infty f}\cos\alpha = 18.8754\,\mathrm{km/s}, \qquad \text{com} \qquad V_J = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{5.2\,\mathrm{UA}}} = 13.0607\,\mathrm{km/s}$$

$$V_y = v_{\infty f}\sin\alpha = 3.2054\,\mathrm{km/s} \quad \Rightarrow \quad \text{(i)}\ \boxed{V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 18.8754\,\mathrm{km/s}}$$

(ii) $V_e = \sqrt{\dfrac{2\mu_\odot}{5.2\,\mathrm{UA}}} = 18.4707\,\mathrm{km/s} < V \quad \Rightarrow \quad \boxed{V > V_e, \text{escapa do sistema solar!}}$

---

12 Dinâmica de Atitude de Veículos Espaciais

53. Um satélite axissimétrico achatado encontrava-se em voo livre no espaço profundo. Sabendo que a razão entre os momentos principais de inércia é 3, que o ângulo entre a velocidade angular e o eixo de simetria do corpo é $\pi/4$ e que a precessão é $\dot{\psi} = 5\,\text{rad/s}$, calcule a rotação própria do satélite.

Correcção:

- corpo achatado (precessão retrógrada) $\Rightarrow \quad C > A \quad \Rightarrow \quad \dfrac{A}{C} = \dfrac{1}{3}$
- $\tan\nu = \dfrac{A}{C}\tan\gamma = \dfrac{1}{3}\tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \nu = \arctan\dfrac{1}{3} = 0.321\,751\,\text{rad} = 18.4349°$
- $\dot{\psi} = \dfrac{C}{(A-C)\cos\nu}\dot{\sigma} \;\Rightarrow\; \dot{\sigma} = \dfrac{A-C}{C}\cos\nu\,\dot{\psi} = \left(-\tfrac{2}{3}\right)5\cos\nu \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{\sigma} = -\sqrt{10}\,\text{rad/s} = -3.162\,28\,\text{rad/s}}$

---

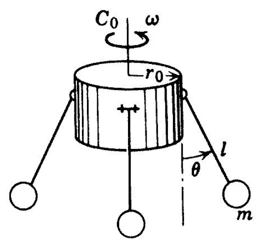
54. Uma sonda axissimétrica alongada encontrava-se em voo livre no espaço profundo. Sabendo que a razão entre os momentos principais de inércia é 3, que o ângulo entre a velocidade angular e o eixo de simetria do corpo é $\pi/4$, e que a precessão é $\dot{\psi} = 5\,\text{rad/s}$, calcule a rotação própria da sonda.

Correcção:

- corpo alongado (precessão directa) $\Rightarrow \quad C < A \quad \Rightarrow \quad \dfrac{A}{C} = 3$
- $\tan\nu = \dfrac{A}{C}\tan\gamma = 3\tan\dfrac{\pi}{4} = 3 \quad \Rightarrow \quad \nu = \arctan 3 = 1.249\,05\,\text{rad} = 71.5651°$
- $\dot{\psi} = \dfrac{C}{(A-C)\cos\nu}\dot{\sigma} \;\Rightarrow\; \dot{\sigma} = \dfrac{A-C}{C}\cos\nu\,\dot{\psi} = 2\times 5\cos\nu \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{\sigma} = \sqrt{10}\,\text{rad/s} = 3.162\,28\,\text{rad/s}}$

---

55. Foi proposto realizar o despin de um satélite através de n partículas pontuais de massa m cada, ligadas por braços rígidos e dispostas de modo simétrico em torno do eixo de rotação. Na figura são visíveis 3 partículas do caso particular $n = 4$. Determine a velocidade angular ω do satélite em função da velocidade angular inicial $\omega_0 = \omega(\theta = 0)$, do número n de partículas, do ângulo θ e outros parâmetros do problema. C_0 é o momento de inércia do satélite (sem partículas) em relação ao seu eixo de simetria.



Correcção:

- Da figura, os MI são: $\quad I_{ini} = C_0 + nmr_0^2 \qquad I_{fin} = C_0 + nm(r_0 + \ell\sin\theta)^2,\quad$ logo:
- Conservação de MA: $\quad L = I_{ini}\omega_0 = I_{fin}\omega \quad \Rightarrow$
- $\omega_0(C_0 + nmr_0^2) = \omega(C_0 + nm(r_0 + \ell\sin\theta)^2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0 \frac{C_0 + nmr_0^2}{C_0 + nm(r_0 + \ell\sin\theta)^2}}$

---

56. Para além da precessão dos equinócios, muito lenta, o movimento de rotação da Terra também inclui uma componente que pode ser interpretada como de precessão de corpo livre (em períodos curtos o binário que provoca a precessão dos equinócios pode ser desprezado). O ângulo de nutação correspondente a este movimento é muito pequeno e, devido ao achatamento dos pólos, a relação entre os momentos de inércia transversal e perpendicular ao eixo de simetria da Terra é $I_\perp = 0.996\,71 I_\parallel$.

(a) Sabendo que a frequência de rotação Ω da velocidade angular $\vec{\omega}$ em torno do eixo polar (cone do corpo) é determinada por $\Omega = \frac{I_\parallel - I_\perp}{I_\perp}\omega_z$ (fenómeno denominado variação em latitude) e que, para todos os efeitos práticos, o valor de ω_z é igual ao da velocidade angular da Terra (apenas diferem ligeiramente na direcção), (i) determine $T_\Omega = 2\pi/\Omega$ em dias e (ii) relacione ω_z com a precessão e a rotação própria e determine estas [note que o ângulo de nutação é muito pequeno].

(b) Na realidade, observa-se que $2\pi/\Omega \approx 433$ dias, muito maior que o calculado na alínea anterior [e o ângulo de abertura do cone do corpo à superfície da Terra é apenas ≈ 4 m, justificando a aproximação de ângulo de nutação pequeno]. Avance com uma hipótese fundamentada que possa explicar a discrepância.

Correcção:

[tempo de resolução (ambas alíneas): 19+1 min]

a) (i) $\omega_z = 2\pi/(1 \text{ dia sideral}) = 2\pi/86\,164.09\,\text{s} = 7.292\,12 \times 10^{-5}\,\text{rad/s}$

- $\Omega = \frac{I_\parallel - I_\perp}{I_\perp}\omega_z = \frac{\cancel{I_\parallel}(1-0.99671)}{0.99671\cancel{I_\parallel}}\omega_z = (3.300\,86 \times 10^{-3})\omega_z = 2.407\,03 \times 10^{-7}\,\text{rad/s}$

- $T_\Omega = \dfrac{2\pi}{\Omega} = 2.610\,35 \times 10^7\,\text{s} = 302.124\,\text{d}$ ou, usando expressões acima,

$$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_z} \times (3.300\,86 \times 10^{-3})^{-1} = (1 \text{ dia sideral}) \times 302.951 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_\Omega = 302.124\,\text{d}}$$

(ii) ν pequeno $\Rightarrow$ $\omega_z = \dot\sigma + \dot\psi\cos\nu \simeq \dot\sigma + \dot\psi$, $\quad \dot\psi = \frac{I_\parallel}{(I_\perp - I_\parallel)\cos\nu}\dot\sigma \simeq \frac{I_\parallel}{I_\perp - I_\parallel}\dot\sigma \quad \Rightarrow$

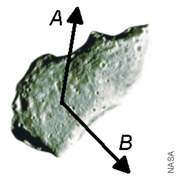
- $\dot\sigma = \dfrac{\omega_z}{1 + \frac{I_\parallel}{I_\perp - I_\parallel}} = \dfrac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp}\omega_z = -\Omega = (-3.300\,86 \times 10^{-3})\omega_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot\sigma = -2.407\,03 \times 10^{-7}\,\text{rad/s}}$

- $\dot\psi = \dfrac{I_\parallel}{I_\perp}\omega_z = \dfrac{1}{0.99671}\omega_z = 1.0033\,\omega_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot\psi = 7.316\,19 \times 10^{-5}\,\text{rad/s}}$

b) **A Terra não é um corpo rígido: (i) tem marés; (ii) núcleo move-se de modo diferente**

---

57. Considere o asteróide em forma de batata da figura. Foi determinado que o seu tensor de inércia, num referencial fixo relativamente ao asteróide com origem no centro de massa, era da forma $I_{ij} = C\delta_{ij}$, com $C = 3 \times 10^{13}\,\text{kg m}^2$ e δ_{ij} o símbolo de Kronecker. O asteróide está livre no espaço.



(a) Se o momento angular relativamente ao centro de massa for, num certo instante, $H_0 = 10^{13}\,\text{kg m}^2/\text{s}$ na direcção do vector $\vec{A}$ da figura, determine (i) o ângulo que a velocidade angular faz com o momento angular e (ii) o seu valor.

Correcção:

a) (i) $I_{ij} = C\,\delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad H_i = C\,\delta_{ij}\,\omega_j = C\,\omega_i \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = C\,\vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{H} \parallel \vec{\omega}}$

- (ii) $\vec{H} = C\,\vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \dfrac{H}{C} = \dfrac{10^{13}\,\text{kg m}^2/\text{s}}{3 \times 10^{13}\,\text{kg m}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{1}{3}\text{rad/s} = 0.3(3)\,\text{rad/s}}$

(b) Se o asteróide chocar com outro e a sua velocidade angular se alterar e ficar, imediatamente após o choque, com valor $\omega = 10^{-3}$ rad/s na direcção do eixo $\vec{B}$, que faz com $\vec{A}$ um ângulo de 120°, determine a direcção (relativamente a $\vec{B}$) e módulo do momento angular após o choque.

Correcção:

b) $\vec{H} = C\,\vec{\omega} \quad \Rightarrow$ como $\vec{\omega}$ tem a direcção de B, então $\vec{H}$ também, e

$$\boxed{H = C\,\omega = 3 \times 10^{13} \times 10^{-3} = 3 \times 10^{10}\,\text{kg m}^2/\text{s}}$$

58. Seja um asteróide rígido com momentos principais centrais de inércia A, B, C num referencial x, y, z fixo com o asteróide. O asteróide encontra-se em voo livre no espaço, sem forças ou binários aplicados. Começando na equação de Euler, (i) demonstre que o módulo do momento angular de rotação relativamente ao centro de massa é constante no referencial x, y, z e (ii) utilizando a sua expressão mostre que a velocidade angular verifica a equação de um elipsóide (i.e. que a ponta do vector está sobre o elipsóide, o denominado elipsóide do momento angular) e determine os seus semi-eixos.

Correcção:

(i) Corpo livre de binários: $\dfrac{{}^i\mathrm{d}\vec{H}}{\mathrm{d}t} = 0$ ($\vec{H}$ relativo ao CM) logo Eq. Euler: $0 = \dfrac{{}^i\mathrm{d}\vec{H}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{{}^s\mathrm{d}\vec{H}}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega} \times \vec{H}$

- $\vec{H} \cdot$ (eq. Euler): $\vec{H} \cdot 0 = \underbrace{\vec{H} \cdot \dfrac{{}^s\mathrm{d}\vec{H}}{\mathrm{d}t}}_{=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(H^2)} + \underbrace{\vec{H} \cdot \vec{\omega} \times \vec{H}}_{=0} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(H^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H^2 = \mathrm{cte} \Leftrightarrow H = \mathrm{cte}}$

(ii) $H^2 = I_{ij}\omega_j I_{ik}\omega_k$; no Ref. Principal Inércia $H^2 = A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 = (A\omega_x)^2 + (B\omega_y)^2 + (C\omega_z)^2$

- Dividindo eq. por H^2 e passando MI para o denominador fica $1 = \left(\dfrac{\omega_x}{H/A}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega_y}{H/B}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega_z}{H/C}\right)^2$

que é um elipsóide nas variáveis $\{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ com semi-eixos $\boxed{\left\{\dfrac{H}{A}, \dfrac{H}{B}, \dfrac{H}{C}\right\}}$

---

59. Seja um asteróide rígido livre no espaço com momentos principais centrais de inércia A, B, C num referencial x, y, z fixo com o asteróide. Utilizando a expressão da energia cinética de rotação, verifique que o vector velocidade angular verifica a equação de um elipsóide (i.e. que a ponta do vector está sobre o elipsóide — o denominado elipsóide da energia cinética) e calcule o valor dos 3 semi-eixos desse elipsóide.

Correcção:

- Seja T a energia cinética associada à rotação; tem-se

$$2T = I_{ij}\,\omega_i\,\omega_j = A\,\omega_x^2 + B\,\omega_y^2 + C\,\omega_z^2, \qquad \text{pois } I_{ij} \text{ é diagonal no Ref. Principal de Inércia}$$

- Expr. anterior $\Leftrightarrow$ $\frac{\omega_x^2}{2T/A} + \frac{\omega_y^2}{2T/B} + \frac{\omega_z^2}{2T/C} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\dfrac{\omega_x}{\sqrt{2T/A}}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega_y}{\sqrt{2T/B}}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega_z}{\sqrt{2T/C}}\right)^2 = 1}$

que é a eq. de um elipsóide com semi-eixos $\sqrt{2T/A}, \sqrt{2T/B}, \sqrt{2T/C}$ que o vector $\vec{\omega}$ verifica, ou seja a ponta do vector está sobre o elipsóide.

A Formulário

Conjunto de fórmulas úteis, tipicamente fornecidas em exames. A sua interpretação é da responsabilidade do leitor.

---

r, θ coord. polares: $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \qquad p = a(1-e^2) = \frac{h^2}{\mu}, \qquad b = a\sqrt{1-e^2},$$

$$\mathscr{E} = -\frac{\mu}{2a}, \qquad e = \sqrt{1 + 2\mathscr{E}\left(\frac{h}{\mu}\right)^2}, \qquad \vec{e} = \frac{1}{\mu}\left(\vec{v}\times\vec{h} - \frac{\mu\vec{r}}{r}\right)$$

Órbitas elípticas: $M = n(t - t_0) = E - e\sin E$, $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{3/2}$, $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$,

$$\tan E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{e + \cos\theta}, \qquad \tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2},$$

Órb. parabólicas: $2\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t - t_0) = \tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}$,

Órb. hiperbólicas: $\sqrt{\frac{\mu}{-a^3}}(t - t_0) = e\sinh F - F$, $\cos\theta = \frac{e - \cosh F}{e\cosh F - 1}$

$$\tan\theta_0 = \frac{\left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu}\right)\sin\gamma_0\cos\gamma_0}{\left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu}\right)\cos^2\gamma_0 - 1}, \qquad e^2 = \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1\right)^2\cos^2\gamma_0 + \sin^2\gamma_0, \qquad \frac{a}{r_0} = \frac{1}{2 - \frac{r_0 v_0^2}{\mu}}$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2a^2(1-e^2)^2}\cos i, \qquad \dot{\varpi} = \frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2a^2(1-e^2)^2}\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right)$$

$$C = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}, \qquad r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2},$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \qquad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \qquad r_2 = \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2}$$

Reg. influência: $\frac{r_i}{r_T} \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{2/5}$, | CG: $\vec{F}_{Kepler} = -\frac{\mu m}{\rho_G^3}\vec{\rho} = -\mu\int_m \frac{\vec{\rho}}{\rho^3}dm$

Corpo livre de binários: $\dot{\psi} = \frac{I_\parallel}{(I_\perp - I_\parallel)\cos\nu}\dot{\sigma}$, $\tan\nu = \frac{I_\perp}{I_\parallel}\tan\gamma$

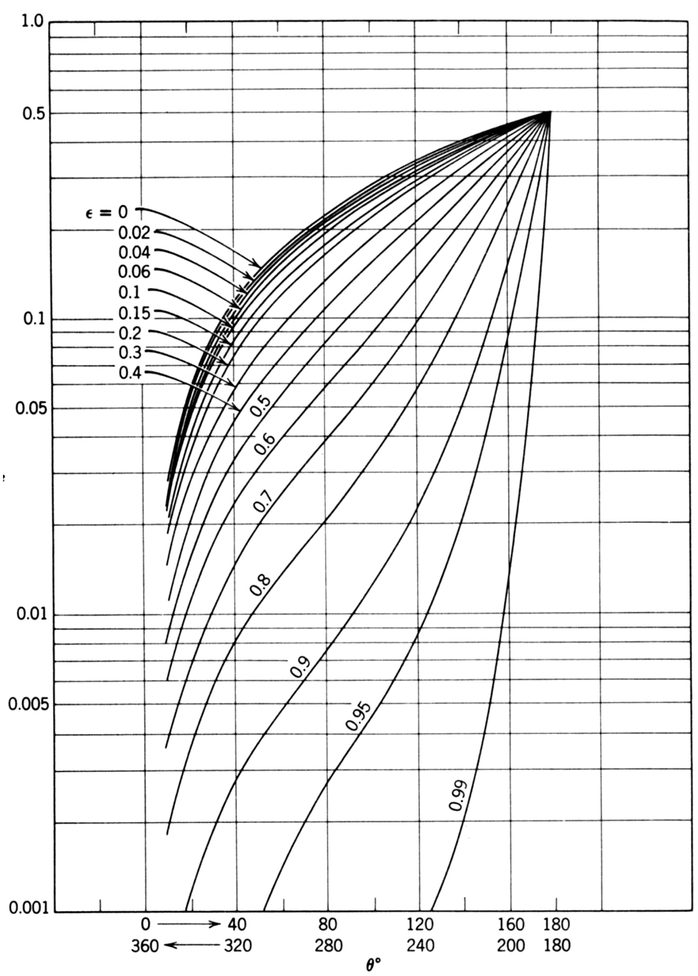


Fig. 4.13–4. Dimensionless time for elliptic orbits.

Figura 1: Em ordenada está o tempo adimensional $\tau_e = t_e\sqrt{\mu}/(2\pi a^{3/2})$ [2].

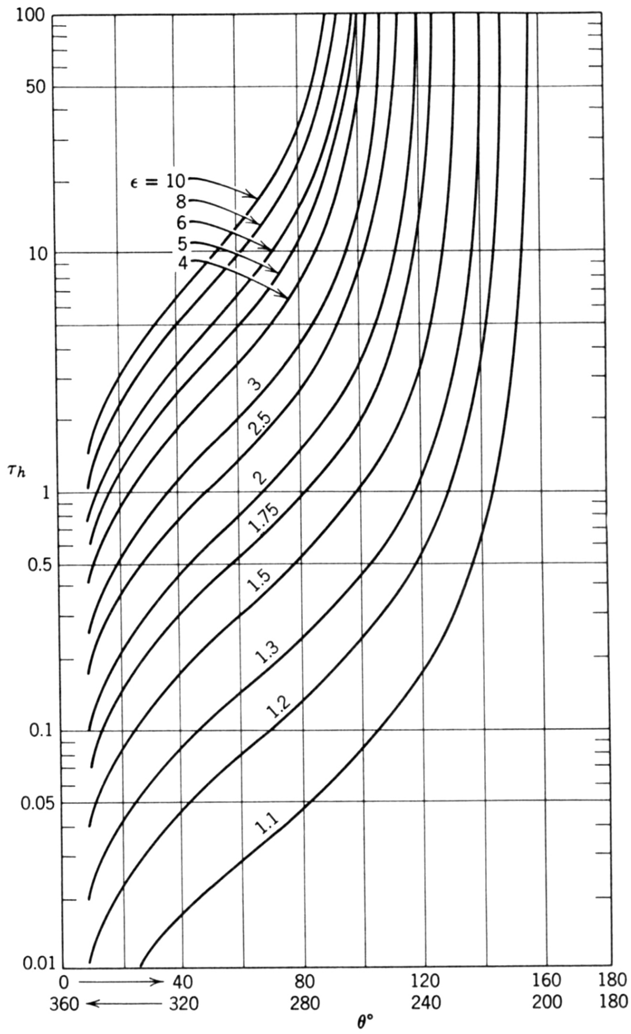


Fig. 4.13–5. Dimensionless time for hyperbolic orbits.

Figura 2: Em ordenada está o tempo adimensional $\tau_h = t_h\sqrt{\mu}/a^{3/2}$ [2].

B Parâmetros com os valores usados nos problemas

As resoluções tipicamente consideram estes valores exactos

Parâmetros			
$1\,\text{UA} = 1.496 \times 10^8\,\text{km}$	$\mu_\odot = 1.327 \times 10^{11}\,\text{km}^3/\text{s}^2$	$M_\odot = 1.973 \times 10^{30}\,\text{kg}$	$R_\odot = 6.96 \times 10^5\,\text{km}$
$G = 6.673 \times 10^{-20}\,\text{km}^3\,\text{s}^{-2}\,\text{kg}^{-1}$	$\mu_\oplus = 3.986 \times 10^5\,\text{km}^3/\text{s}^2$	$M_\oplus = 5.974 \times 10^{24}\,\text{kg}$	$R_\oplus = 6378\,\text{km}$
1 ano sideral = 365.26 dias			
1 dia sideral $= \begin{cases} 23\,\text{h}\,56\,\text{m}\,4.09\,\text{s} \\ 86164.09\,\text{s} \end{cases}$	$J_2 = 0.00108263$ (Terra)		

Referências

[1] W. E. Wiesel, *Spaceflight Dynamics*. McGraw-Hill, 2 ed., 1997.

[2] W. T. Thomson, *Introduction to Space Dynamics*. Dover, 1986.

[3] H. D. Curtis, *Orbital Mechanics For Engineering Students*. Amsterdam: Butterworth-Heinemann, 2 ed., 2010.

[4] V. G. Szebehely, *Adventures in Celestial Mechanics : A First Course in the Theory of Orbits*. University of Texas Press, 1989.

[5] R. R. Bate, D. D. Mueller, and J. E. White, *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover, 1971.

[6] V. A. Chobotov, *Spacecraft Attitude Dynamics and Control*. Malabar, Florida, U.S.A: Krieger Publishing Company, 1991.