Semana 1

Equações separáveis

1.1 Exercícios. Determine a solução geral de cada equação:

1. $y' = 3x^2$,
2. $y' = e^{-x^2}(1-x)$,
3. $(x^2+1)y' = 1$,
4. $(x^2-1)y' = 1$,
5. $y'\sqrt{1-x^2} = 1$.

Problemas de valor inicial

1.2 Exercícios. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

1. $y' = x(x+1)$, $y(1) = 3$.
2. $y' = \operatorname{sen}(5x)$, $y(0) = 2$.
3. $y' = (x^2-1)^{-1}$, $y(0) = 1$.

Equações Separáveis Gerais e Problemas de Valor Inicial

1.3 Exercícios. Resolva os seguintes problemas de valor Inicial:

1. $y' = y^3$, $y(1) = -1$.
2. $y' = (y-1)(y+1)$, $y(0) = 3$.
3. $y' = 1/(y+1)$, $y(0) = 0$.
4. $y' = \operatorname{sen}(x^2) + x$, $y(0) = 1$.
5. $y' = x/y$, $y(0) = -1$.
6. $y' = x^2 y$, $y(1) = 0$.
7. $y' = xy + x + y + 1$, $y(-1) = -2$.
8. $xy' = y + 2x^2 y$, $y(1) = 1$.
9. $y' = (y^2+1)/(x^2+1)$, $y(0) = 1$.

Equações Lineares da Primeira Ordem

1.4 Exercícios. Determine todas as soluções das equações:

1. $y' = ty$.
2. $y' + yt\cos(t) = 0$.
3. $y' = 2ty/(1+t^2) + t^2 - 1$.
4. $y' = -ty$.
5. $y' - \big(t\operatorname{sen}(t)\big)y = 0$.
6. $y' = y/(1+t) + t^2$.
7. $y' = -\cos(t) + y$.

Semana 2

Sistemas de Equações Lineares com Coeficientes Constantes

2.1 Exercícios.

1. Para cada problema verifique que o vetor dado é uma solução da equação:

   (a)
   $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t;$$

   (b)
   $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

2. Resolve cada PVI e estude a solução quando $t \to \infty$:

   (a)
   $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

   (b)
   $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

   (c)
   $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. Determine a solução geral real de cada equação:

   (a)
   $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x};$$

   (b)
   $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

   (c)
   $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

   (d)
   $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (e)
   $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (f)
   $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Semana 3

Existência, Unicidade, Continuidade e Comparação

3.1 Exercícios.

1. Para cada PVI determine a equação integral equivalente e as primeiras duas iteradas de Picard:

   (a) $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$;

   (b) $y' = y + t$, $y(0) = 0$.

2. Mostre que as funções seguintes são localmente lipschitzianas na variável y e determine uma constante L de Lipschitz:

   (a) $f(y,t) = te^{-y^2}$ na região $R = \{(y,t) : |t| \leqslant 1, |y| < \infty\}$;

   (b) $f(y,t) = t^2 + y^2$ na região $R = \{(y,t) : |t| \geqslant 2, |y| \leqslant 3\}$.

3. Para cada solução $y(t)$ dos seguintes problemas de valor inicial determine majorantes e minorantes:

   (a) $y' = \operatorname{sen}(xy)$, $y(0) = 1/2$ e $x \geqslant 0$;

   (b) $y' = y^3 - y$, $y(0) = 1/4$.

4. Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ e $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos ambos não vazios, e seja $\mathbf{f}\colon I \times U \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Considere-se o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0. \end{cases} \tag{1}$$

   Aqui $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in U$. Uma solução de (1) é um par $(J, \boldsymbol{\phi})$, com $J \subseteq I$ uma vizinhança aberta de t_0 e $\boldsymbol{\phi}\colon J \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável tal que para cada $t \in J$ $\big(t, \boldsymbol{\phi})\big) \in I \times U$ e

$$\boldsymbol{\phi}'(t) = \mathbf{f}\big(t, \boldsymbol{\phi}(t)\big).$$

   No caso $J = I$ dizemos que $\boldsymbol{\phi}$ é uma solução *global*; caso contrário dizemos que $\boldsymbol{\phi}$ é uma solução *local*. Se $(J_1, \boldsymbol{\phi}_1)$ e $(J_2, \boldsymbol{\phi})$ são soluções locais de (1) dizemos que $(J_2, \boldsymbol{\phi}_2)$ é uma *extensão* de $(J_1, \boldsymbol{\phi}_1)$ se $J_1 \subset J_2$ e $\boldsymbol{\phi}_2(t) = \boldsymbol{\phi}_1(t)$ para cada $t \in J_1$. Uma solução $(J, \boldsymbol{\phi}_1)$ chama-se *máxima* quando não tem uma extensão própria. Notamos que cada solução local pode ser entendida a uma solução máxima.

   Indique se o PVI $x' = -\big(3 + 2\cos(t + x)\big) \cdot x$, $x(0) = 1$ tem uma solução global.

5. Indique se o PVI $x' = 2\sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$, tem uma e só uma solução.

Semana 4

Equações Exatas e Redutíveis a Exatas

4.1 Exercícios.

1. Mostre que a equação diferencial

$$\frac{x}{t} + \log(x) + \left(\frac{t}{x} + \log(t)\right) x' = 0$$

   é exata e determine tão explicitamente quanto possível a solução com $x(1) = 1$.

2. Para cada equação seguinte determine todos os valores $b \in \mathbb{R}$ tais que a equação é exata e para os valores b encontrados resolva a equação:

   (a) $(xy^2 + bx^2y) + (x + y)x^2y' = 0$,

(b) $(ye^{2xy} + x) + bxe^{2xy}y' = 0$.

3. Considere a equação
$$(3t^2x^2 + t) + (t^3 + 1)xx' = 0$$
   (a) Verifique que a equação não é exata.
   (b) Determine um fator integrante.
   (c) Determine tão explicitamente quanto possível a solução com $x(0) = 1$.

4. Para cada equação seguinte determine um fator integrante e resolva a equação:
   (a) $(3x^2y + 2xy + y^3) + (x^2 + y^2)y' = 0$,
   (b) $y' = e^{2x} + y - 1$,
   (c) $1 + (x/y - \operatorname{sen} y)y' = 0$.

5. Mostre que $\mu(x, y) = 1/\big(xy(2x + y)\big)$ é um fator integrante da equação
$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0.$$

Semana 5

Equações Lineares de Ordem Superior

5.1 Exercícios.

1. Para cada equação determine a solução geral:
   (a) $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-t} + 3$,
   (b) $y^{(4)} - y = 3t + \cos t$,
   (c) $y''' + y'' + y' + y = e^{-t} + 4t$,
   (d) $y^{(4)} - 4y'' = t^2 + e^{2t}$,
   (e) $y^{(4)} + 2y'' + y = 3 + \cos 2t$,
   (f) $y^{(6)} + y''' = t$.

2. Considere a equação
$$y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5y' = 0$$
   (a) Determine a sua solução geral.
   (b) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \to \infty$.

3. Seja $k > 0$ um inteiro. Para que valores de $c \in \mathbb{R}$ é que a equação
$$y'' - 2cy' + y = 0$$
admite uma solução satisfazendo $y(0) = y(2k\pi) = 0$, que não seja identicamente nula?

4. Considere a equação
$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = t + \cos t \tag{2}$$
   (a) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (2).
   (b) Determine uma solução particular de (2).
   (c) Determine a solução de (2) que verifica a condição inicial
$$y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

5. Determine a solução da equação linear:

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' - 2y = b(t)$$

que verifica as condições iniciais

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 1$$

quando:

(a) $b(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
(b) $b(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
(c) $b(t) = e^t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

6. Para cada equação determine a solução geral:

(a) $y''' + y' = \operatorname{tg} t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$;
(b) $y''' - y' = \operatorname{tg} t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$.

7. Mostre que $y_1(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ é uma solução da equação diferencial

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + ty = 0 \tag{3}$$

e use redução de ordem para determinar a solução geral de (3).

8. Considere a equação diferencial

$$t^2y'' + ty' - y = t \tag{4}$$

Mostre que $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são soluções linearmente independentes de equação homogénea associada, e determine a solução geral de (4).

Transformada de Laplace

5.2 Exercícios.

1. Determine a transformada de Laplace das funções seguintes:

(a) $f(t) = t$,
(b) $f(t) = te^t$,
(c) $f(t) = \operatorname{sen} 3t$,
(d) $f(t) = t + \frac{1}{2}e^{-t}$,
(e) $f(t) = 2\operatorname{sen} t - \cos t$,
(f) $f(t) = \cos^3 t$,
(g) $f(t) = t^2 \cos t$,
(h) $f(t) = t^3 + e^{-t}$,
(i) $e^{2t} \operatorname{sen} t$.

2. Encontre a função original $f(t)$ se a sua transformada de Laplace $F(s)$ é :

(a) $F(s) = \dfrac{2e^{-s}}{s^3}$,
(b) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2}$,
(c) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s-1}$,
(d) $F(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s+3}$,

(e) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+5}$,

(f) $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2}$,

(g) $F(s) = \dfrac{1}{s^3+2s^2+s}$,

(h) $F(s) = \dfrac{2s^3+s^2+2s+2}{s^5+2s^4+2s^3}$,

(i) $F(s) = \dfrac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)}$,

(j) $F(s) = \dfrac{s}{s^3+1}$,

(k) $F(s) = \dfrac{3s^2}{(s^3-1)^2}$.

3. Calcule a inversa da Transformada de Laplace de

(a) $(s^2-1)^{-2}$ (b) $6(s^4+10s^2+9)^{-1}$

(c) $\dfrac{s+1}{s^2+s-6}$ (d) $\dfrac{1}{(s+1)^4}$

4. Utilizando a Transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y''-y'-6y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$

(b) $y''+\omega^2y=\cos(2t)$, $\omega^2\neq 4$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

(c) $y''+2y'+2y=h(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ sendo

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi \leqslant t < 2\pi \\ 0 & \text{se } 0 \leqslant t < \pi \text{ e } t \geqslant 2\pi \end{cases}$$

5. Designa-se por δ a função de Dirac com suporte na origem. Utilizando a transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y''+2y'+2y=\delta(t-\pi)$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

(b) $y''+y=\delta(t-\pi)-\delta(t-2\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

(c) $y''+y=\delta(t-\pi)+\cos t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

Semana 6

Integrais de Linha e Integrais em Subvaridades

6.1 Exercícios.

1. Calcule o integral de linha do campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(1+y,y+z,x)$ sobre o caminho $\gamma(t)=(t,e^t,\cos t)$ com $0\leqslant t\leqslant\pi$.

2. Seja $\phi\in[-\pi/2,\pi/2]$. Calcule o integral de linha do campo vetorial

$$\mathbf{G}(x,y,z)=\frac{z}{x^2+y^2}(y,-x,0)$$

sobre o caminho $\gamma(t)=\big(\cos(t)\cdot\cos(\phi),\operatorname{sen}(t)\cdot\cos(\phi),\operatorname{sen}(\phi)\big)$, com $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$.

3. Para a curva $A=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^{2/3}+y^{2/3}=1\big\}$ e a região R limitada por A verifique:

(a) $\int_R 1 = 3\pi/8$,

(b) $\int_A 1 = 6$.

Sugestão: Mostre que $\gamma(t) = \left(\cos^3(t), \operatorname{sen}^3(t)\right)$*, com* $-\pi < t < \pi$*, é uma parametrização de* $R \setminus \{(-1,0)\}$.

4. Seja $V = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\right\}$. Mostre que

$$\int_V x_i^2 = \frac{4}{3}\pi, \quad i = 1,2,3.$$

Semana 7

Teorema de Gauss

7.1 Exercícios.

1. Seja $\Sigma^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ e } 0 < x_i,\ i = 1,2,3\right\}$. Mostre que

$$\int_{\Sigma^2} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

2. Considere o campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, y^2, z^2)$ e o vetor normal $\nu = (x,y,z)$ na esfera

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Calcule

$$\int_{S^2} \langle \mathbf{F}, \nu \rangle.$$

3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ o aberto limitado por
   - a esfera $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\right\}$;
   - o cilindro $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\right\}$;
   - os dois planos $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = h_i\right\}$ com $i = 1,2$ e $-1 < h_1 < h_2 < 1$.

   O bordo $\partial\Omega$ é a união de uma concha S_1 na esfera, uma concha S_2 no cilindro e regiões nos planos. Usando o teorema de divergência de Gauss e o campo

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0\right)$$

   mostre que a área de S_1 é igual à área de S_2.

Semana 10

Teorema de Stokes

10.2 Exercícios.

1. Para um inteiro $n > 0$ define-se o operador $\nabla = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{e}_j$, onde $\left\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\right\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $g\colon U \to \mathbb{R}$ e $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ temos

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right) \qquad \nabla \cdot f = \langle \nabla, f \rangle = \frac{f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \operatorname{div} f$$

   e

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \langle \nabla, \nabla \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

   Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ e $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ um campo de classe $\mathcal{C}^2$.

   (a) Mostre que $\operatorname{rot} f = \nabla \times f$.

(b) Mostre que
$$\nabla \times (\nabla \times f) = \nabla\langle\nabla, f\rangle - \langle\nabla,\nabla\rangle f$$
e portanto
$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} f) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} f) - \Delta f,$$
onde $\Delta f = \big(\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3\big)$.

2. Na teoria de electromagnetismo há três campos vetorais importantes

   campo eléctrico E: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{E}(x,y,z,t)$;
   campo magnético H: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{H}(x,y,z,t)$;
   densidade de corrente eléctrica j: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{j}(x,y,z,t)$;

   e o campo escalar **densidade de carga eléctrica** ρ: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\rho(x,y,z,t)$. As equações de Maxwell, a mensos de constantes físicas que para simplificar têm o valor 1, são
$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho, \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{H} = 0, \qquad \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

   (a) Mostre que
$$\nabla\cdot\left(\mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) = 0,$$
   e deduza a equação
$$\nabla\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

   (b) Mostre que numa região sem cargas eléctricas nem correntes, isto é, $\mathbf{j} = 0$ e $\rho = 0$, temos
$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\Delta\mathbf{E} \quad \text{e} \quad \nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}) = -\Delta\mathbf{H},$$
   e deduz que **E** e **H** satisfazem
$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{E} = 0, \qquad \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{H} = 0.$$
   A equação acima chama-se *equação das ondas*.

3. Calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (x+y, -2y+z, z+x)$ através da superfície
$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 3 \wedge x^2+y^2 < 2\big\}$$
   segundo a normal $\eta = (1,1,1)$

   (a) pela definição;
   (b) usando o teorema de Gauss;
   (c) usando o teorema de Stokes.

Semana 11

Série de Fourier

11.1 Exercícios.

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

2. Calcule a série de Fourier da função e^x em $[-\pi,\pi]$.

3. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

4. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \operatorname{sen} x > 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{sen} x \leqslant 0 \end{cases}$$

6. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

7. Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine:

   (a) a série de Fourier associada a f;

   (b) a série de senos associada a f;

   (c) a série de cosenos associada a f.

8. Mostre que

$$\left|\operatorname{sen}(x)\right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$$

   para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

9. Seja $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Mostre que F é uma função par quando f é ímpar e F é uma função ímpar quando f é par.

Semana 12

Equações de Primeira Ordem

12.1 Exercícios.

1. Resolve as equações seguintes:

   (a) $yu_x - xu_y = 0$,

   (b) $2u_x + 3u_y = 1$,

   (c) $u_x + u_y = u$.

2. Resolve os problemas seguintes:

   (a) $u_x + 2u_y = 0$, $u(x, 0) = \operatorname{sen} x$;

   (b) $u_x + 4u_y = 0$, $u(x, 0) = 1/(1 + x^2)$;

   (c) $yu_x - xu_y = 0$, $u(x, 0) = x$, com $x > 0$;

   (d) $u_x + xu_y = 0$, $u(0, y) = \operatorname{sen} y$;

   (e) $yu_x - 2xyu_y = 2xu$, $u(0, y) = y^2$, com $y > 0$.

Semana 13

Equações do Calor

13.1 Exercícios.

1. Determine uma solução do problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1,71\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x/2) + 3\operatorname{sen}(5\pi x/2),\ 0 < x < 2$$
$$u(0,t) = u(2,t) = 0.$$

2. Determine uma solução do problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1,14\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 10x, & 0 < x < 5 \\ 10(10-x), & 5 \leqslant x < 10 \end{cases}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(10,t) = 0.$$

Semana 14

Equação de Laplace

14.1 Exercícios.

1. Resolve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = \cos(x) - 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$
$$u(0,t) = 0 \qquad u(2\pi,t) = 0.$$

2. (a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } x \in]0,1[\\ u(0,t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(1,t) = \operatorname{sen} 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

   (b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = 3\operatorname{sen}(2\pi x) - 7\operatorname{sen}(4\pi x) + \operatorname{sen}(x)\ .$$

3. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx},\ x \in (0,\pi),\ \text{com}\begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(x) - 2\operatorname{sen}(5x). \end{cases}$$

4. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u,\ x \in (0,L),\ \text{com}\begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

5. (a) Determine a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que também satisfaz a condição na fronteira

$$\begin{array}{lll} u(0,y) = 0, & u(a,y) = 0, & 0 < y < b \\ u(x,0) = 0, & u(x,b) = g(x), & 0 \leqslant x \leqslant a. \end{array}$$

(b) Determine a solução se $g(x)$ é dada por

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant a/2 \\ a - x & a/2 \leqslant x \leqslant a. \end{cases}$$

6. (a) Determine a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que também satisfaz a condição na fronteira

$$\begin{array}{lll} u(0,y) = 0, & u(a,y) = 0, & 0 < y < b \\ u(x,0) = h(x), & u(x,b) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant a. \end{array}$$

(b) Determine a solução se $g(x)$ é dada por

$$h(x) = x(a - x).$$

Semana 15

Equação das Ondas

15.1 Exercícios.

1. Considere a equação
$$4u_{xx} = u_{tt} \quad 0 < x < 30,\ 0 < t.$$
E a condições iniciais $u_t(x,0) = 0$ e
$$u(x,0) = \begin{cases} x/10, & 0 \leqslant x \leqslant 10, \\ (30-x)/20, & 10 < x \leqslant 30. \end{cases}$$
Determine $u(x,t)$.

2. Mostre a mudança de variáveis $\xi = x - ct$ e $\eta = x + ct$ transforma a equação
$$c^2 u_{xx} = u_{tt}$$
em $u_{\xi\eta} = 0$, e portanto $u(x,t) = \phi(x - ct) + \psi(x - ct)$, onde ϕ e ψ são funções arbitrária de classe $\mathcal{C}^2$.

3. Considere a equação
$$c^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad -\infty < x < \infty$$
com a condições iniciais $u_t(x,0) = 0$ e $u(x,0) = f(x)$.

(a) Mostre que a funções ϕ e ψ do problema 2 tem de satisfazem
$$\begin{aligned} f(x) &= \phi(x) + \psi(x) \\ 0 &= -\phi'(x) + \psi'(x) \end{aligned}$$

(b) Portanto
$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2}.$$

(c) Considere a equação
$$c^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad -\infty < x < \infty$$
com a condições iniciais $u_t(x,0) = g(x)$ e $u(x,0) = 0$.

i. Mostre que a funções ϕ e ψ do problema 2 tem de satisfazem

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(x) + \psi(x) \\ g(x) &= -c\phi'(x) + c\psi'(x) \end{aligned}$$

ii. Portanto

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi.$$

Semana 16

Transformada de Fourier

Recordamos que se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo dizemos que uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ é *seccionalmente contínua* quando existe um conjunto finito $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset I$ de pontos tais que f é contínua em $I \setminus A$ e os limites à esquerda e à direita

$$\lim_{x \to a_j^{\pm}} f(x)$$

existem e são finitos para cada $a_j \in A$. Designa-se por $\mathcal{D}(I)$ o espaço linear real de funções seccionalmente contínuas em I. O espaço de *Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ é o subespaço de funções f de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0$$

para cada inteiros m, n não negativos. Notamos que a condição do limite acima é equivalente a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^m \cdot \left|f^{(n)}(x)\right| < \infty.$$

As funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tem decaimento rápido, e temos que para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ as funções $x \cdot f(x)$ e $f'(x)$ pertencem a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dizemos que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tem decaimento moderada se existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\left|f(x)\right| \leqslant \frac{A}{1+x^2}, \qquad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo, para cada $a > 0$ a função $e^{-a|x|}$ tem decaimento moderada. Designa-se por $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ o espaço linear real de funções com decaimento moderada. Temos $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ e para cada $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ a transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$$

existe. Para funções $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ a *convolução* $f * g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ é definida por

$$(f * g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ temos $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

16.1 Exercícios.

1. Dado $a > 0$, calcule a transformada de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ e^{-ax} & \text{se } x \geqslant 0. \end{cases}$$

2. Calcule a transformada de Fourier da função $e^{-|x|}$.

Inversão da Transformada de Fourier

16.2 Exercícios.

1. Usando o fato que se $F(x,y)$ é uma função com a propriedade

$$|F(x,y)| \leqslant \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)},$$

tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dydx,$$

mostre que para $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)g(y)\,dy.$$

Sugestão: Considere $F(x,y) = f(x)g(y)e^{-ixy}$.

2. Usando

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)}\,dx\\ &= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\pi r^2} r\,drd\theta\\ &= 2\pi\int_{0}^{\infty} e^{-\pi r^2} r\,dr\\ &= 1,\end{aligned}$$

calcule $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx$ e mostre que a transformada de Fourier da função $f(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ é

$$\widehat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi}\,dx = e^{-\xi^2/2}.$$

3. Para $\delta > 0$, sejam $K_\delta(x) = \dfrac{e^{-x^2/2\delta}}{\sqrt{2\pi\cdot\delta}}$ e $G_\delta(x) = \dfrac{-\delta x^2/2}{2\pi}$. E seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

 (a) Mostre que a transformada de Fourier da função $K_\delta(x)$ é $\widehat{K}_\delta(\xi) = e^{-\delta\xi^2/2}$.

 (b) Mostre que $\widehat{G_\delta}(x) = K_\delta(x)$ e portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)G_\delta(\xi)\,d\xi.$$

 (c) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x)\,dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left|K_\delta(x)\right|\,dx \leqslant M,$$

 e para cada $\eta > 0$

$$\int_{|x|>\eta} \left|K_\delta(x)\right|\,dx \to 0 \quad \text{como } \delta \to 0.$$

 (d) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(x)\,dx \to f(0) \quad \text{como } \delta \to 0$$

 (e) Deduz

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(x)\,dx = \int_{-infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)G_\delta(\xi)\,d\xi.$$

 e mostre

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,d\xi.$$

 (f) Mostre que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Sugestão: Considere a função $F(y) = f(x+y)$ e mostre

$$f(x) = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi.$$

4. Considere a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

com a condição inicial $u(0,x) = f(x)$, onde $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(a) Calcule a transformada de Fourier, em relação à variável x, da equação do calor.

(b) Sendo $\mathcal{H}_t(x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/4t}$, mostre que $u(t,x) = f * \mathcal{H}_t(x)$ é uma solução da equação do calor e $u(t,x) \to f(x)$ como $t \to 0$.

5. Considere a equação de Laplace $\Delta u = 0$ no semi-plano $\Omega = \big\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\big\}$ com a condição da fronteira $u(x,0) = f(x)$, onde $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que para cada $y > 0$ a função

$$\mathcal{P}_y(x) = 2\frac{y}{x^2+y^2} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}).$$

(b) Sendo $u(x,y)$ uma solução da equação de Laplace, seja

$$\mathcal{F}(u)(\xi,y) = \widehat{u}(\xi,y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{-ix\xi}\, dx.$$

Calcule $\mathcal{F}\big(\Delta u\big)(\xi,y)$.

(c) Deduz que

$$\widehat{u}(\xi,y) = \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}.$$

(d) Mostre que

$$\mathcal{P}_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|y} e^{i\xi x}\, d\xi\,;$$
$$e^{-|\xi|y} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(x) e^{-ix\xi}\, dx\,;$$

e para $u(x,y) = (f * P_y)(x)$

$$\Delta u(x,y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R} \text{ e } y > 0\,;$$
$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = f(x).$$